

TD1 — Introduction

Exercice 1.1. *Marche simple symétrique sur $\mathbb{Z}$.* Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(X_1 = -1)$. Pour tout $n \geq 0$, soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (par convention, $S_0 = 0$).

— *Inégalité de Hoeffding* —

- 1) Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{P}(S_n \geq x\sqrt{n}) \leq e^{-x^2/2}$. [Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Markov pour majorer la probabilité $\mathbb{P}(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda x\sqrt{n}})$ avec $\lambda > 0$.]
- 2) Comparer le résultat précédent avec celui donné par le théorème-limite central.

— *Ruine du joueur* —

Pour tout $A \subset \mathbb{Z}$, on note $T_A = \inf \{n \geq 0 ; S_n \in A\}$ le temps d'atteinte de A . Soit $-a < 0 < b$. On cherche d'abord à calculer $\mathbb{P}(T_{\{b\}} < T_{\{-a\}})$. Pour tout $k \in \llbracket -a, b \rrbracket$, on note $p_k = \mathbb{P}(T_{\{b-k\}} < T_{\{-a-k\}})$.

- 3) Que valent p_{-a} et p_b ?
- 4) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket -a, b \rrbracket$, $p_k = (p_{k-1} + p_{k+1})/2$. [Indication : on pourra conditionner $\mathbb{P}(T_{\{b-k\}} < T_{\{-a-k\}})$ par rapport à la valeur de S_1 .]
- 5) En déduire p_0 .

On s'intéresse maintenant à $\mathbb{E}[T_{\{-a, b\}}]$. Pour tout $k \in \llbracket -a, b \rrbracket$, on note $t_k = \mathbb{E}[T_{\{-a-k, b-k\}}]$.

- 6) Que valent t_{-a} et t_b ?
- 7) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket -a, b \rrbracket$, $t_k = 1 + (t_{k-1} + t_{k+1})/2$.
- 8) En déduire t_0 .

— *Récurrence* —

- 9) Pour tout $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathbb{P}(S_n = x)$.
- 10) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $a \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(S_n = a - x, \sup_{0 \leq k \leq n} S_k \geq a\right) = \mathbb{P}(S_n = a + x).$$

- 11) On note $R_0 = \inf \{n \geq 1 ; S_n = 0\}$ le temps de retour en 0. À l'aide de la question précédente, montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(R_0 = 2k) = 2^{-2k+1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}.$$

- 12) Montrer que $\mathbb{P}(R_0 < \infty) = 1$. [Indication : on pourra remarquer que $\mathbb{P}(R_0 = 2k) = u_{2k-2} - u_{2k}$ avec $u_{2k} = 2^{-2k} \binom{2k}{k}$.]

- 13) Soit $N \geq 0$. On note $D_0 = \sup \{n \in \llbracket 0, 2N \rrbracket ; S_n = 0\}$ le temps de dernier passage en 0 avant l'instant $2N$. Déduire de la question précédente que, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\mathbb{P}(D_0 = 2k) = u_{2k} u_{2N-2k}$.

Exercice 1.2. *Photomaton.* Au photomaton, Jeanne cherche à obtenir la meilleure photo possible. Elle a trois essais. Après le premier, elle peut l'accepter ou continuer, auquel cas elle perd la première photo. Idem pour le deuxième. Et, si elle a refusé la deuxième photo, elle est obligée de prendre la troisième. Pour modéliser la situation, supposons que Jeanne mette une note entre 0 et 5 à chaque photo et supposons que ces notes soient des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\llbracket 0, 5 \rrbracket$. Voici plusieurs stratégies. Pour chacune d'elles, calculer la note moyenne de la photo obtenue par Jeanne.

- 1) Jeanne n'accepte la première ou la deuxième photo que si elle la note 5. Sinon, elle prend la troisième.
- 2) Jeanne refuse la première photo systématiquement. Puis, elle décide de prendre la deuxième si et seulement si sa note est supérieure à un seuil s . Quel est le meilleur choix pour s ?
- 3) Jeanne refuse la première photo systématiquement. Puis, elle décide de prendre la deuxième si et seulement si sa note est dans un ensemble A . Quel est le meilleur choix pour A ?
- 4) Forte des expériences précédentes, Jeanne envisage la stratégie optimale. Quelle est-elle ?

TD2 — Conditionnement discret

Exercice 2.1. Soit $0 \leq p \leq q \leq 1$ tels que $1 + p - 2q \geq 0$ et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi donnée par

$X \backslash Y$	0	1
0	$1 + p - 2q$	$q - p$
1	$q - p$	p

- 1) Donner la loi de X et la loi de Y .
- 2) Calculer $\mathbb{E}[X | Y]$.
- 3) On définit $\text{Var}(X | Y) := \mathbb{E}[X^2 | Y] - \mathbb{E}[X | Y]^2$. Montrer que

$$\text{Var}(X | Y) = \left(\frac{q-p}{1-q} - \left(\frac{q-p}{1-q} \right)^2 \right) \mathbb{1}_{Y=0} + \left(\frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q} \right)^2 \right) \mathbb{1}_{Y=1}.$$

- 4) Vérifier que

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(\mathbb{E}[X | Y]) + \mathbb{E}[\text{Var}(X | Y)].$$

Exercice 2.2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 .

- 1) Déterminer $\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$.
- 2) Calculer $\mathbb{E}[X_1 | X_1 + X_2]$.

Exercice 2.3. Soit $(p, q) \in [0, 1]^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un nombre X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Cette valeur de X étant connue, on tire au hasard un nombre Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(X, q)$. Montrer que Y suit encore une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Exercice 2.4. Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \mathcal{B}(p)^{\otimes n}$. Déterminer la loi conditionnelle de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sachant $X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Exercice 2.5. Soit X une variable aléatoire réelle discrète et $a \in \mathbb{R}$. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $\min(X, a)$.

Exercice 2.6. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes bornées et soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer les espérances conditionnelles suivantes en fonction de $\mathbb{E}[X | Y]$:

$$\mathbb{E}[X + a | Y], \quad \mathbb{E}[X | a + Y], \quad \mathbb{E}[XY | Y^3].$$

Exercice 2.7. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- 1) Montrer sans calculs que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $\mathbb{E}[X_i | S_n] = \mathbb{E}[X_j | S_n]$.
- 2) En déduire que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{E}[X_i | S_n] = S_n/n$.
- 3) Évaluer, pour $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{E}[S_m | S_n]$.

TD3 — Chaînes de Markov (1)

Exercice 3.1. On dispose de deux pièces : l'une est normale et équilibrée, l'autre présente "face" des deux côtés. On choisit l'une des deux pièces au hasard, puis on la lance une infinité de fois. On modélise la suite des résultats des lancers par un processus $(X_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $\{P, F\}$.

- 1) On a obtenu pile au n^{e} lancer. Quelle est la probabilité d'obtenir face au $(n+1)^{\text{e}}$ lancer ?
- 2) On a obtenu face au n^{e} lancer. Quelle est la probabilité d'obtenir face au $(n+1)^{\text{e}}$ lancer ?
- 3) On a obtenu pile au $(n-1)^{\text{e}}$ lancer et face au n^{e} lancer. Quelle est la probabilité d'obtenir face au $(n+1)^{\text{e}}$ lancer ?
- 4) Le processus $(X_n)_{n \geq 1}$ est-il une chaîne de Markov ?

Exercice 3.2. *La météo en Syldavie.* Le temps évolue de façon assez simple en Syldavie : s'il fait beau, alors il fera encore beau le lendemain avec une probabilité de $5/6$; s'il pleut, alors il pleuvra le lendemain avec une probabilité de $2/3$. C'est Noël et il fait beau. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau à Noël prochain ?

Exercice 3.3. *Marche sur le graphe complet.* Soit $k \geq 1$ et $G = (V, E)$ le graphe complet à k sommets, autrement dit le graphe à k sommets dans lequel toute paire de sommets est reliée par une arête. On s'intéresse à la marche aléatoire simple sur G , chaîne de Markov de transition Q que l'on notera $(X_n)_{n \geq 0}$.

- 1) Donner l'expression de Q .
- 2) Pour tout $n \geq 0$, calculer Q^n . [Indication : on pourra écrire $Q = \frac{1}{k-1}(J_k - I_k)$.]
- 3) En déduire que, pour toute loi μ sur V , $\mathcal{L}_\mu(X_n)$ converge et préciser sa limite.
- 4) Si $v \in V$, déterminer la loi, sous $\mathbb{P}_v$, du temps de retour en v .

Exercice 3.4. Abel dit à Caïn : « Nous allons lancer une pièce jusqu'à ce que les mots PPP ou PFP apparaissent. Si c'est PPP, c'est toi qui gagnes, si c'est PFP, c'est moi. Ce jeu est honnête, puisque chaque mot a la probabilité $1/8$ d'apparaître. » Qu'en pensez-vous ?

- 1) Modéliser le jeu par une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états, le graphe, la matrice de transition et l'état initial.
- 2) Calculer la probabilité qu'Abel gagne.
- 3) Quelle est la durée moyenne du jeu ?

Exercice 3.5. *Mesure invariante, propriété de Markov* Soit E un ensemble fini et Q une matrice stochastique irréductible sur E . Soit π l'unique probabilité Q -invariante. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de transition Q . Pour tout $x \in E$, on note R_x le temps de retour de la chaîne en x .

- 1) Montrer qu'il existe $r \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathbb{P}_x(\exists n \in \llbracket 0, r \rrbracket \ X_n = y) \geq \varepsilon$.
- 2) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}_x(R_x > kr) \leq (1 - \varepsilon)\mathbb{P}_x(R_x > (k-1)r)$.
- 3) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x[R_x] < \infty$.
- 4) Soit $x \in E$. Montrer que la mesure μ sur E donnée par

$$\mu(y) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{R_x-1} \mathbb{1}_{X_k=y} \right]$$

est une mesure Q -invariante.

- 5) En déduire que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x[R_x] = 1/\pi(x)$.

Exercice 3.6. *Marche aléatoire sur $\llbracket 0, N \rrbracket$ réfléchie au bord.* Une particule dans $\llbracket 0, N \rrbracket$ se déplace à chaque instant, avec probabilité $p \in]0, 1[$, d'un pas vers la droite et, avec probabilité $q = 1 - p$, d'un pas vers la gauche. Sauf quand elle est en 0 (resp. en N), auquel cas elle se déplace, avec probabilité 1, en 1 (resp. en $N-1$).

- 1) Modéliser le déplacement de la particule par une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ et préciser son graphe et sa matrice de transition Q .
- 2) Montrer qu'il existe une unique probabilité π invariante pour Q .
- 3) Calculer π .
- 4) En déduire le temps moyen de retour en 0, en partant de 0.

Exercice 3.7. *Marche du cavalier.* Sur un échiquier, un cavalier part de la case A1 et se déplace au hasard. Au bout de combien de temps en moyenne le cavalier revient-il sur la case A1 ?

TD4 — Chaînes de Markov (2) – Convergence

Exercice 4.1. *Théorème de Perron-Frobenius.* Soit Q une matrice stochastique sur un ensemble fini E . On suppose Q irréductible apériodique. On rappelle qu'il existe une unique probabilité π invariante pour Q et que $\pi > 0$.

- 1) Montrer que 1 est valeur propre simple de Q , i.e. le sous-espace caractéristique de Q associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
- 2) Montrer que 1 est valeur propre dominante de Q , i.e. pour toute valeur propre λ de Q , $\lambda \neq 1$ entraîne $|\lambda| < 1$.
- 3) En déduire que Q^n converge exponentiellement vite vers une matrice stochastique $\Pi > 0$, dont toutes les lignes sont égales.

Exercice 4.2. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur $E = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer qu'il existe une unique probabilité π invariante pour Q .
- 2) Calculer π .
- 3) π est-elle réversible?
- 4) Montrer que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n X_k(X_k + 1)$$

converge $\mathbb{P}_2$ -p.s. quand $n \rightarrow \infty$ et calculer sa limite.

- 5) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_3[e^{\lambda X_n}]$$

converge quand $n \rightarrow \infty$ et calculer sa limite.

- 6) Montrer que la proportion de temps passé par la chaîne dans l'état 3 entre les instants 0 et n converge $\mathbb{P}_1$ -p.s. quand $n \rightarrow \infty$ et calculer sa limite.

Exercice 4.3. On lance un dé un grand nombre de fois et on effectue la somme des résultats obtenus. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 13?

Exercice 4.4. Un étudiant range ses trois livres préférés ensemble sur une étagère. Chaque matin, il prend l'un des trois, la probabilité qu'il prenne le i^e (en partant de la gauche) étant p_i . Le soir, il range le livre à la gauche des deux autres. Sur une année, combien de fois les livres ont-ils été rangés dans l'ordre 1, 2, 3?

Exercice 4.5. On considère la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $E = \llbracket 1, 8 \rrbracket$ telle que, sous $\mathbb{P}_\mu$, $(X_n)_{n \geq 0}$ soit une chaîne de Markov de transition Q et de loi initiale μ .

- 1) Tracer le graphe de la chaîne de Markov.
- 2) Calculer, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{P}_2(X_n = 3)$.

On note $i \rightarrow j$ s'il existe n tel que $\mathbb{P}_i(X_n = j) > 0$, autrement dit s'il existe, dans le graphe, un chemin de i vers j .

- 3) Dire pour quels couples (i, j) on a $i \rightarrow j$.

TD5 — Chaînes de Markov (3) — Classes de communication

Exercice 5.1. Soit $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et μ_0 une probabilité sur E . On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur E de loi initiale μ_0 et de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Identifier les probabilités invariantes pour Q .
- 2) Déterminer les états $x \in E$ pour lesquels $\mu_n = \mathcal{L}_x(X_n)$ converge. Le cas échéant, préciser la limite de $(\mu_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 5.2. Soit $E = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $a \in [0, 1/2]$. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur E de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 - a & 0 & a \\ 1/3 & 2/3 - a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Donner le graphe de la chaîne, ainsi que les classes et leur nature (discuter suivant a).
- 2) Donner les probabilités invariantes pour Q (discuter suivant a).
- 3) Montrer que $\frac{1}{n+1}(X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_n^2)$ converge $\mathbb{P}_1$ -p.s. Préciser la limite (discuter suivant a).
- 4) En notant μ_n la loi de X_n sous $\mathbb{P}_1$ et en prenant $a = 1/3$, montrer que μ_n converge et préciser sa limite.
- 5) La suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge-t-elle $\mathbb{P}_1$ -p.s. ?

Exercice 5.3. *Variables i.i.d.* Soit E un ensemble dénombrable. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. sur E .

- 1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition.
- 2) Donner les classes de communication et leur nature.

Exercice 5.4. *Records.* Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0, 1]$. Pour tout $n \geq 0$, soit

$$Z_n = \max(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

- 1) Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition.
- 2) Donner les classes de communication et leur nature.

TD6 — Chaînes de Markov (4) – Récurrence et transience

Exercice 6.1. *Château de cartes.* Soit $(p_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels de $[0, 1]$. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de loi initiale δ_0 et de matrice de transition

$$Q(k, l) = \begin{cases} p_k & \text{si } l = k + 1 \\ 1 - p_k & \text{si } l = 0. \end{cases}$$

On note $R_0 = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = 0\}$.

On suppose d'abord que pour tout $k \geq 0$, $p_k = p$, où $p \in]0, 1[$.

- 1) Dessiner le graphe de la transition.
- 2) Montrer que la transition est irréductible.
- 3) Déterminer la loi de X_1 et celle de X_2 .
- 4) Montrer qu'il existe une probabilité π invariante pour Q .
- 5) La transition est-elle récurrente ou transiente ?
- 6) Calculer $\mathbb{E}_0[R_0]$.
- 7) Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n X_k$ converge presque sûrement et calculer sa limite.

On suppose maintenant que pour tout $k \geq 1$, $p_k = 1 - 2^{-k-1}$.

- 8) Montrer que la transition est irréductible.
- 9) Montrer que

$$\mathbb{P}_0(R_0 = \infty) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2^{-k}).$$

- 10) En étudiant la convergence du produit précédent, dire si la transition est récurrente.

Exercice 6.2. *Marche simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$.* Soit $d \geq 1$. On considère, sur le groupe $\mathbb{Z}^d$, la marche $(X_n)_{n \geq 0}$ engendrée par $\pm e_1, \dots, \pm e_d$ avec probabilité uniforme. Après avoir vérifié que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont la transition est irréductible, étudier la récurrence de la transition.

Exercice 6.3. *Nombre de particules.* Pour tout $n \geq 0$, X_n désigne le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume V . On suppose que, pendant l'intervalle de temps $[n, n + 1[$, chacune des X_n particules présentes a une probabilité $p \in]0, 1[$ de quitter V et que, pendant ce même temps, un nombre aléatoire de nouvelles particules, suivant une loi de Poisson de paramètre a , entre dans V . On suppose que les différents phénomènes aléatoires ainsi considérés sont indépendants les uns des autres.

- 1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov, dont on précisera l'espace d'états E et la matrice de transition Q .
- 2) Calculer directement $\mathbb{E}_x[e^{itX_1}]$.
- 3) En déduire la fonction caractéristique de X_1 lorsque $X_0 \sim \mathcal{P}(\theta)$.
- 4) Montrer que, pour une valeur convenable de θ , la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ est invariante pour Q .
- 5) Montrer que Q est irréductible et récurrente positive.
- 6) Pour $x \in E$, la fréquence des passages en x entre l'instant 1 et l'instant n a-t-elle une limite quand $n \rightarrow \infty$?

TD7 — Processus de Poisson

Exercice 7.1. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ . Pour $0 < s < t$, déterminer la loi conditionnelle de N_s sachant N_t .

Exercice 7.2. À un arrêt passent deux lignes de bus : la 4 (un bus toutes les 4 minutes, en moyenne) et la 12 (un bus toutes les 12 minutes, en moyenne). On modélise les passages de chaque ligne par deux processus de Poisson indépendants.

- 1) Préciser l'intensité de chacun des processus de Poisson. On prendra l'heure pour unité de temps.
- 2) Sachant que 3 bus 12 sont passés dans la première demi-heure, quelle est la probabilité qu'ils soient tous passés dans les vingt premières minutes ?
- 3) Sachant qu'aucun bus 12 n'est passé dans le premier quart d'heure et que 3 bus 12 sont passés dans la première demi-heure, quelle est la probabilité qu'il en arrive exactement 1 dans les 10 minutes suivantes ?
- 4) Sachant qu'en dix minutes, 3 bus sont passés, quelle est la probabilité que ce fussent 3 bus 4 ?
- 5) J'arrive à l'arrêt. Quelle est la probabilité que le premier bus qui passe soit un 12 ?

Exercice 7.3. *Paradoxe de l'autobus.* Les arrivées des autobus à un arrêt sont modélisées par un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ . On appelle J_n l'instant d'arrivée du n^{e} bus ($J_0 = 0$). On définit

$$U_t = t - J_{N_t} \quad \text{et} \quad V_t = J_{N_t+1} - t.$$

- 1) Calculer la loi du couple (U_t, V_t) .
- 2) Vérifier que $\mathcal{L}(U_t) \rightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ quand t tend vers $+\infty$.
- 3) Calculer $\mathbb{E}[U_t + V_t]$. Trouver sa limite quand t tend vers $+\infty$.
- 4) Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 7.4. Un appareil de comptage dénombre les voitures sur une route, dont le flux est modélisé par un processus de Poisson d'intensité λ . L'appareil tombe en panne à un instant $T \sim \mathcal{E}(\alpha)$. Si V désigne le nombre de véhicules comptés par l'appareil, déterminer la loi et l'espérance de V .

TD8 — Conditionnement

Exercice 8.1. *Processus de Poisson composé.* Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ν sur $\mathbb{Z}$. On suppose que $Y_1 \in L^2$. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ indépendant de $(Y_n)_{n \geq 1}$. Pour tout $t \geq 0$, on pose $Z_t = Y_1 + \dots + Y_{N_t}$.

- 1) Montrer que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.
- 2) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $Z_t \in L^1$ et $\mathbb{E}[Z_t] = \lambda t \mathbb{E}[Y_1]$.
- 3) Montrer que Z_t/t converge p.s. quand $t \rightarrow \infty$ et préciser sa limite.
- 4) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $Z_t \in L^2$ et $\text{Var}(Z_t) = \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2]$.
- 5) Montrer que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{i\xi Z_t}] = \exp[\lambda t (\mathbb{E}[e^{i\xi Y_1}] - 1)]$.
- 6) Montrer que $(Z_t - \mathbb{E}[Z_t])/\sqrt{t}$ est asymptotiquement normale quand $t \rightarrow \infty$.

Exercice 8.2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, d'espérance nulle et de variance 1. Soit a , b et c trois paramètres réels fixés et

$$Y = aX_1 + bX_1X_2 + cX_2.$$

- 1) Calculer $Y_1 = \mathbb{E}[Y|X_1]$ et $Y_2 = \mathbb{E}[Y|X_2]$.
- 2) En déduire $v_1 = \text{Var}(Y_1)$ et $v_2 = \text{Var}(Y_2)$.

Soit maintenant X_1 , X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$. Soit

$$Y = \sin(X_1) + 7 \sin^2(X_2) + 5X_3^4 \sin(X_1).$$

- 3) Donner la densité de X_1 , puis calculer son espérance et sa variance.
- 4) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $Y_i = \mathbb{E}[Y|X_i]$, puis $v_i = \text{Var}(Y_i)$. [Indication : $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ et $\sin^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$.]

Exercice 8.3. Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$.

- 1) On suppose que les tribus $\sigma(\sigma(Y) \cup \mathcal{B}_1)$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y | \mathcal{B}] = \mathbb{E}[Y | \mathcal{B}_1].$$

- 2) Application : Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, intégrables et i.i.d. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Déterminer $\mathbb{E}[X_1 | S_n, S_{n+1}, \dots]$.

Exercice 8.4. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y} dy.$$

- 1) Pour toute fonction mesurable $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(Y)$ soit intégrable, calculer $\mathbb{E}[h(Y) | X]$.
- 2) Calculer $\mathbb{E}[Y(X+1)^{-1}]$.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = n | Y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X=n} | Y]$.
- 4) Calculer $\mathbb{E}[X | Y]$.

Exercice 8.5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires positives. On suppose que $\mathbb{E}[X | Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y | X] = X$.

- 1) Si X et Y sont dans L^2 , montrer que $X = Y$ p.s.
- 2) Montrer que, si Z est une variable aléatoire positive et $a \geq 0$, alors

$$\mathbb{E}[Z | Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a \quad \text{p.s.}$$

- 3) Montrer que le couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que (X, Y) .
- 4) En déduire que $X = Y$ p.s.

TD9 — Martingales (1)

Exercice 9.1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$P_n = \prod_{k=1}^n X_k.$$

Montrer que $(P_n)_{n \geq 1}$ est, pour la filtration naturelle associée à $(X_n)_{n \geq 1}$, une martingale si $\lambda = 1$, une sous-martingale si $\lambda \leq 1$, et une sur-martingale si $\lambda \geq 1$.

Exercice 9.2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^3] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$. On note

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

et $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ la filtration naturelle associée à $(X_n)_{n \geq 1}$.

- 1) Pour tout $n \geq 1$, soit $Y_n = S_n^3 - 3nS_n$. Montrer que $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ -martingale.
- 2) Soit $Q(x, t) = x^3 + ax^2t + bx + ct + d$. Pour quelles valeurs de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$ la suite $Q(S_n, n)$ est-elle une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ -martingale ?

Exercice 9.3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -surmartingale. On suppose que toutes les X_n ont même loi.

- 1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale.
- 2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $((X_n - a)_+)_{n \geq 0}$ et $((X_n - a)_-)_{n \geq 0}$ sont des $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingales.
- 3) En déduire que, si $n \geq k$, X_n est presque sûrement supérieur à a sur l'ensemble $\{X_k \geq a\}$.
- 4) En déduire que, presque sûrement, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $X_n = X_k$.

TD10 — Martingales (2) – Convergence

Exercice 10.1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées et de carré intégrable. Pour tout $n \geq 1$, on note σ_n l'écart-type de X_n . Pour tout $n \geq 0$, on définit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_1, \dots, X_n)$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad M_n = S_n^2 - \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

- 1) Montrer que $(S_n)_{n \geq 0}$ et $(M_n)_{n \geq 0}$ sont des $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingales.
- 2) Montrer que, si la série des σ_n^2 converge, alors $(S_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. et dans L^2 .

Exercice 10.2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_1, \dots, X_n)$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad M_n = \exp\left(tS_n - \frac{nt^2}{2}\right).$$

- 1) Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale.
- 2) Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ converge p.s.
- 3) Si $t \neq 0$, montrer que $tS_n - nt^2/2$ diverge p.s. vers $-\infty$.
- 4) En déduire que, si $t \neq 0$, $(M_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas dans L^1 .

Exercice 10.3. Soit $(\theta, p) \in [0, 1]^2$. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit

$$\begin{cases} X_0 = p \\ \varepsilon_{n+1} = \mathbb{1}_{U_{n+1} < X_n} \\ X_{n+1} = \theta X_n + (1 - \theta)\varepsilon_{n+1} \end{cases}$$

On note $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ la filtration canonique associée au processus $(U_n)_{n \geq 1}$ (avec $\mathcal{F}_0$ triviale).

- 1) Vérifier que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq X_n \leq 1$.
- 2) Montrer que la suite $(X_n, \varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$.
- 3) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$.
- 4) En déduire que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale qui converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire L .
- 5) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = (1 - \theta)^2 \mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$

- 6) Pour $\theta < 1$, calculer $\mathbb{E}[L(1 - L)]$ et en déduire que $L \sim \mathcal{B}(p)$. Qu'en est-il si $\theta = 1$?
- 7) Soit $T = \inf \{n \geq 0 ; X_n \notin [p/2, (1 + p)/2]\}$. Montrer que T est fini presque sûrement et calculer $\mathbb{E}[X_T]$.
- 8) Montrer que

$$\frac{1-p}{1+p} \leq \mathbb{P}\left(X_T \leq \frac{p}{2}\right) \leq \frac{1-p}{1-p/2}.$$

Exercice 10.4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées et réduites. Pour tout $n \geq 1$, on définit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_1, \dots, X_n)$,

$$Y_n = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

- 1) Montrer que $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ -martingale.
- 2) Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. et dans L^2 .
- 3) Généraliser au cas où l'on remplace $1/n$ par a_n .

TD11 — Martingales (3) — Théorème d'arrêt

Exercice 11.1. Reprendre le problème de la ruine du joueur dans le cas $p = 1/2$.

Exercice 11.2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Dans tout le problème, $(X_n)_{n \geq 0}$ désigne un processus intégrable et adapté sur cet espace.

1) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et T un temps d'arrêt borné, montrer que

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0].$$

On suppose maintenant que, pour tout temps d'arrêt borné T , $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$. Le but de l'exercice est de montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est alors une martingale.

2) Montrer que, pour tout $n \geq 0$: $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$.

3) Soit $n \geq 0$ et $A \in \mathcal{F}$. On définit

$$T = n\mathbb{1}_A + (n+1)\mathbb{1}_{A^c}.$$

À quelle condition T est-il un temps d'arrêt ? On supposera dans la suite que cette condition est réalisée.

4) Montrer que

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}].$$

5) Justifier que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}].$$

6) Montrer que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_A].$$

7) Conclure.

Exercice 11.3. Soit E un ensemble fini, soit Q une matrice stochastique irréductible sur E , et soit $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique pour Q , i.e. telle que $Qh = h$. Soit $x \in E$ et soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de transition Q et de loi initiale δ_x . Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ la filtration naturelle associée à $(X_n)_{n \geq 0}$. Soit $y \in E$ et T_y le temps d'atteinte de y .

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$h(X_{n \wedge T_y}) = \mathbb{1}_{\{T_y \leq n\}}h(y) + \mathbb{1}_{\{T_y \geq n+1\}}h(X_n).$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$h(X_{(n+1) \wedge T_y}) - \mathbb{1}_{\{T_y \leq n\}}h(y) - \mathbb{1}_{\{T_y \geq n+1\}}h(X_{n+1}).$$

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = h(X_n).$$

4) Dédire des questions précédentes que $(h(X_{n \wedge T_y}))_{n \geq 0}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

5) Montrer que

$$h(X_{n \wedge T_y}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h(y) \quad \text{p.s.}$$

6) Montrer que $h(x) = h(y)$.

7) Qu'en déduit-on pour h ?

Exercice 11.4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. positives et intégrables. Soit $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ la filtration canonique associée à $(S_n)_{n \geq 0}$. Soit enfin T un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ que l'on suppose intégrable.

1) Montrer que $(S_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

2) Préciser le compensateur de $(S_n)_{n \geq 0}$, c'est-à-dire le processus croissant et prévisible $(A_n)_{n \geq 0}$ tel que $(S_n - A_n)_{n \geq 0}$ soit une martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

3) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $S_{T \wedge n}$ est intégrable et que $\mathbb{E}[S_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[T \wedge n] \cdot \mathbb{E}[X_1]$.

4) En déduire que S_T est intégrable et que $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T] \cdot \mathbb{E}[X_1]$.