

TD1 — Dénombrement

Exercice 1.1. Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et E un ensemble.

- 1) Montrer qu'il existe une application injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$ si et seulement si $n \leq k$. Pour le sens direct, on pourra faire une récurrence sur n .
- 2) Montrer qu'il existe une application surjective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$ si et seulement si $n \geq k$.
- 3) Montrer qu'il existe une application bijective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$ si et seulement si $n = k$.
- 4) En déduire que si $f: E \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ et $g: E \rightarrow \llbracket 1, k \rrbracket$ sont des bijections, alors $n = k$.

Exercice 1.2. *Parties paires et impaires.* Soit E un ensemble fini non vide et a un élément fixé de E . On note $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$f: \mathfrak{P}(E) \rightarrow \mathfrak{P}(E)$$

$$A \mapsto \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{si } a \in A. \end{cases}$$

- 1) Montrer que, pour tout $A \in \mathfrak{P}(E)$, on a $f \circ f(A) = A$.
- 2) Montrer que f est bijective.
- 3) Soit $A \in \mathfrak{P}(E)$. Montrer que, si $|A|$ est pair, alors $|f(A)|$ est impair. Montrer que, si $|A|$ est impair, alors $|f(A)|$ est pair.
- 4) En déduire que l'ensemble E a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
- 5) On suppose que $|E| = n$. Quel est le cardinal de $\mathfrak{P}(E)$? En déduire le cardinal des ensembles suivants :

$$P = \{A \in \mathfrak{P}(E) ; |A| \text{ est pair}\} \text{ et } I = \{A \in \mathfrak{P}(E) ; |A| \text{ est impair}\}.$$

Exercice 1.3. *Principe des tiroirs généralisé.* Soit E et F deux ensembles et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $|E| > k|F|$. Montrer que, pour toute application $f: E \rightarrow F$, il existe $y \in F$ tel que $|f^{-1}(\{y\})| \geq k + 1$.

Exercice 1.4. On choisit 9 points dans un carré de côté unité. Montrer qu'il existe un disque de rayon $1/2$ contenant au moins 3 de ces 9 points.

Exercice 1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Montrer qu'il existe $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sum_{i \in I} a_i$ soit divisible par n .

Exercice 1.6. *Théorème de Dirichlet (1842).* Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq}$. [Indication — Considérer la suite $(\{kx\})_{k \in \mathbb{N}}$, où $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ désigne la partie fractionnaire du réel y .]

Exercice 1.7. *Principe d'inclusion-exclusion.* Soit E un ensemble fini.

- 1) Montrer que, si A et B sont deux parties disjointes de E , alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- 2) Montrer que, si A et B sont deux parties de E , alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- 3) Trouver une expression analogue pour $|A \cup B \cup C|$, où A , B et C sont trois parties de E .
- 4) Montrer que, si $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathfrak{P}(E)^n$, alors

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} \left| \bigcap_{i=1}^r A_{k_i} \right|.$$

Exercice 1.8. *Indicatrice d'Euler.*

- 1) Soit $(N, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Quel est le nombre d'entiers dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ qui sont multiples de d ?
- 2) Dans l'ensemble $\llbracket 1, 1000 \rrbracket$, on enlève tous les multiples de 2, 3, 5 et 7. Combien reste-t-il de nombres?

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\text{pgcd}(k, n) = 1$. Montrer que, si la décomposition de n en produit de facteurs premiers s'écrit $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, alors

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

[Indication — On pourra considérer les ensembles $A_k = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket ; p_i | k\}$.]

Exercice 1.9. Dérangements. Un dérangement d'un ensemble X est une permutation sans point fixe de X , autrement dit une bijection $\sigma: X \rightarrow X$ telle que, pour tout $x \in X$, $\sigma(x) \neq x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $d(n)$ le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (on remarquera que $d(0) = 1$).

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(n) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

[Indication — On pourra considérer les ensembles $A_k = \{\sigma: X \rightarrow X ; \sigma \text{ bijective et } \sigma(k) = k\}$.]

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $d(n)$ est l'entier le plus proche de $n!/e$.

Exercice 1.10. Théorème de Lagrange. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G . Pour tout $g \in G$, on note $g \cdot H = \{g \cdot h ; h \in H\}$.

1) Montrer que, pour tout $g \in G$, $|g \cdot H| = |H|$.

2) On considère la fonction $\varphi: G \rightarrow \mathfrak{P}(G)$ définie par : pour tout $g \in G$, $\varphi(g) = g \cdot H$. Montrer que, pour tout $y \in \varphi(G)$, $|\varphi^{-1}(\{y\})| = |H|$.

3) En déduire que $|H|$ divise $|G|$.

Exercice 1.11. Soit $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ deux ensembles finis.

1) Quel est le cardinal de Y^X , l'ensemble des fonctions de X dans Y ?

2) En construisant une bijection de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\{0, 1\}^X$, déduire le cardinal de $\mathfrak{P}(X)$.

3) Donner le nombre d'injection de X dans Y . On note A_n^k ce nombre.

4) Donner le nombre de bijection de X dans Y .

5) Donner le cardinal de l'ensemble des parties de cardinal k de Y , noté $\mathfrak{P}_k(Y)$. On note $\binom{n}{k} = C_n^k$ ce nombre.

Exercice 1.12. Une urne contient n boules distinctes et on veut sélectionner k boules. Pour faire cette sélection, il faut préciser :

— si le tirage est fait avec ou sans remise de chacune des boules tirées ;

— si l'on tient compte ou non de l'ordre dans lequel les k boules ont été tirées.

Il y a donc quatre manières différentes de faire le tirage. Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas le nombre de sélections possibles.

Tirages de k éléments parmi n	Ordonnés	Non ordonnés
Avec remise		
Sans remise		

Exercice 1.13. 1) De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro ?

2) De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants (un enfant peut ne rien recevoir) ?

3) De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins deux euros ?

4) De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k garçons et l filles de sorte que chaque fille ait au moins un euro ?

On suppose dans chaque cas que les répartitions demandées sont possibles (i.e. que n est assez grand...).

Exercice 1.14. Soit $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ deux ensembles finis. On suppose que X et Y sont ordonnées de telle sorte que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ et $y_1 < y_2 < \dots < y_n$.

1) Donner le nombre de fonctions strictement croissantes de X dans Y .

2) Donner le nombre de fonctions croissantes de X dans Y .

3) Donner le nombre de surjections de X dans Y .

Exercice 1.15. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.

1) Montrer qu'il y a autant de façons de tirer p éléments parmi n dans le désordre et sans remise que de tirer $n - p$ éléments parmi n dans le désordre et sans remise. En déduire que

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}.$$

2) En dénombrant de deux façons différentes le nombre de façons de tirer $p + 1$ éléments parmi $n + 1$, montrer que

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

3) En dénombrant de deux façons différentes le nombre de parties d'un ensemble à n éléments, montrer que

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

4) Montrer que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

5) Retrouver ces formules par le calcul.

Exercice 1.16.

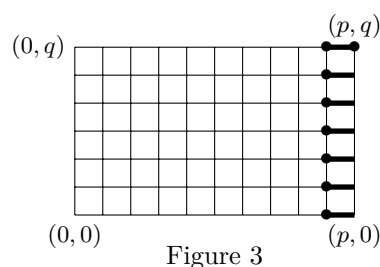
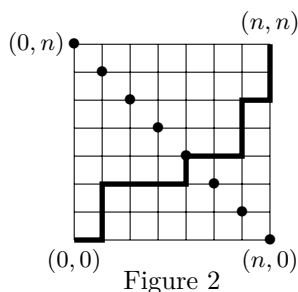
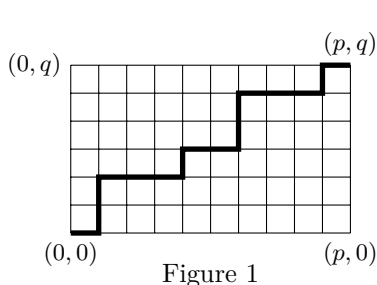
1) On considère le quadrillage du plan dont $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est l'ensemble des sommets. Quel est le nombre de plus courts chemins du sommet $(0, 0)$ au sommet (p, q) (figure 1) ?

2) À l'aide de la figure 2, en déduire que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

3) À l'aide de la figure 3, montrer que

$$\binom{p+q}{p} = \sum_{k=0}^q \binom{p+k-1}{k} = \sum_{k=0}^p \binom{q+k-1}{k}.$$



TD2 — Premières notions sur les graphes

Exercice 2.1. On considère le graphe orienté $G = (S, A)$ tel que

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}.$$

- 1) Donner la représentation sagittale de G .
- 2) Donner le dictionnaire des successeurs et des prédécesseurs du graphe G .
- 3) Écrire la matrice d'adjacence de G .
- 4) À partir de la matrice, calculer les degrés entrants et sortants de chaque sommet.
- 5) Quel est le sous-graphe induit G' de G de sommets $S' = \{1, 2, 4\}$? Comment obtenir la matrice d'adjacence de G' à partir de celle de G ?

Exercice 2.2. Soient n un entier naturel non nul et $S = \{1, 2, \dots, n\}$. On définit le graphe orienté $G = (S, A)$ par : pour tout $(s, t) \in S^2$, on a

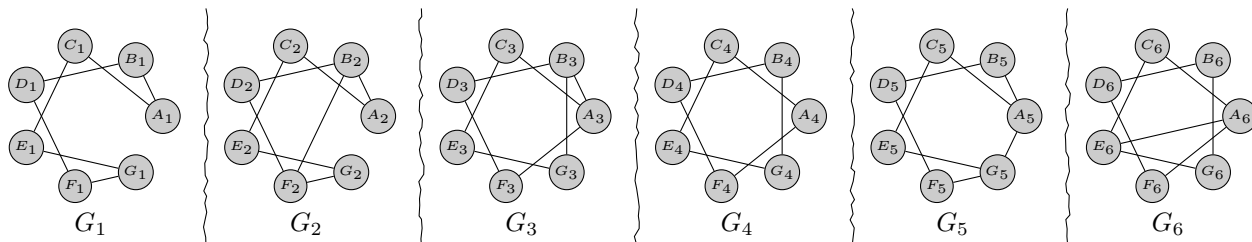
$$(s, t) \in A \iff s \text{ divise } t.$$

- 1) Donner explicitement le dictionnaire des prédécesseurs, la matrice d'adjacence et une représentation sagittale de G pour $n = 6$.
- 2) Soient s et t deux sommets de G . Caractériser la propriété : « s et t sont premiers entre eux ».
- 3) À l'aide des prédécesseurs d'un sommet s de G , caractériser la propriété : « s est premier ».

Exercice 2.3. *Un peu de dénombrement.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On se fixe un ensemble de n sommets $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

- 1) ensemble des graphes orientés ;
- 2) ensemble des graphes simples ;
- 3) ensemble des graphes non orientés ;
- 4) ensemble des multigraphes orientés avec $p \in \mathbb{N}$ arcs ;
- 5) ensemble des multigraphes non orientés avec $p \in \mathbb{N}$ arêtes.

Exercice 2.4. *Isomorphisme* Parmi les graphes suivants, dire, en justifiant, lesquels sont isomorphes entre eux.

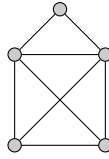


Exercice 2.5. *Football.* On organise un tournoi de football sous forme de poule de n équipes où chaque équipe doit rencontrer toutes les autres.

- 1) Représenter la situation par un graphe lorsque $n = 5$.
- 2) Combien de matchs joue chaque équipe ?
- 3) Le nombre de matchs étant trop important, les organisateurs décident de faire jouer seulement 3 matchs à chaque équipe. Comment organiser le tournoi ?

Exercice 2.6. *Amitiés.* Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Exercice 2.7. *Théorème de Havel et Hakimi.* Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté défini à partir de l'ensemble de sommet $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. On note $d(v_i)$ le degré de v_i . La **suite des degrés** de G est la suite $(d(v_1), \dots, d(v_n))$. En général, on ne tient pas compte de l'ordre des termes dans cette suite, et par convention, on écrira ses termes dans l'ordre décroissant. La suite des degrés du graphe suivant est $(4, 4, 3, 3, 2)$.



Dans la suite, nous étudions le problème suivant. Étant donnée une suite d'entiers naturels $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ telle que $d_1 \geq \dots \geq d_n$, existe-t-il un graphe simple dont la suite des degrés vaut $\mathbf{d}$? Lorsque c'est le cas, on dira que la suite $\mathbf{d}$ est **graphique**. Par exemple, la suite $(4, 4, 3, 3, 2)$ est graphique.

- 1) Est-ce que les suites $(3, 3, 3, 3, 2)$ et $(4, 3, 3, 3, 2)$ sont graphiques?
- 2) Soit $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ une suite graphique. Donner une majoration de d_i en fonction de n .
- 3) Montrer que $\mathbf{d}$ doit contenir deux termes égaux.
- 4) Montrer que $\mathbf{d}$ doit avoir un nombre pair de termes impairs.
- 5) Soient $n > 1$ et $d_1 \geq \dots \geq d_n$ des entiers naturels. Montrer que, si la suite à $n - 1$ termes définie par $\mathbf{d}' = (d'_1, \dots, d'_n) = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n)$ est graphique, alors la suite $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ est graphique.
- 6) Soit $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ où $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ est une suite graphique. On veut montrer qu'il existe un graphe simple $G = (S, A)$ où $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ tel que $d(v_i) = d_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tel que v_1 soit adjacent à tous les sommets dans $\{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}$.

Supposons par l'absurde qu'un tel graphe n'existe pas. Considérons alors un graphe simple $G = (S, A)$ et une numérotation des sommets $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ telle que $d(v_i) = d_i$ et telle que v_1 soit adjacent à un maximum de sommets dans $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$.

6a) Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 2, d_1 + 1 \rrbracket$ et $l \in \llbracket d_1 + 2, n \rrbracket$ tel que $\{v_1, v_k\} \notin A$ et $\{v_1, v_l\} \in A$.

6b) Suivant que $d(v_k) = d(v_l)$ ou $d(v_k) > d(v_l)$, montrer qu'on peut construire un graphe simple G' ayant $\mathbf{d}$ pour suite de degrés et tel que v_1 soit adjacent à strictement plus de sommets dans $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$ que G .

6c) En déduire le théorème suivant (dû à Havel et Hakimi) : si $n > 1$ et $d_1 \geq \dots \geq d_n$ sont des entiers naturels, alors, on a l'équivalence suivante :

$$(d_1, \dots, d_n) \text{ est graphique} \iff (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n) \text{ est graphique.}$$

- 7) Utiliser le théorème de Havel et Hakimi pour déterminer si les suites suivantes sont graphiques : $(4, 3, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 3, 1)$ et $(6, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$.

Exercice 2.8. *Groupe de personne.* Un groupe de personnes est tel que :

- (a) chaque personne est membre d'exactly deux associations ;
- (b) chaque association comprend exactement trois membres ;
- (c) deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun.

Combien y a-t-il de personnes ? d'associations ?

Exercice 2.9. *Poignées de mains.* M. et Mme X assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. X constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.

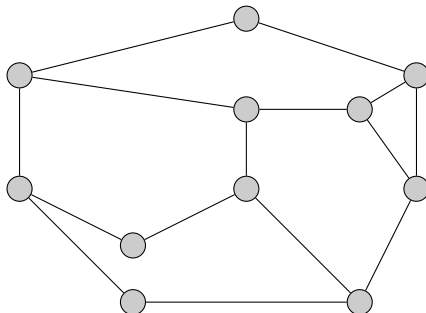
- 1) Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre de poignées de mains serrées par chaque personne ? Que peut on en déduire pour M. X ?
- 2) Représenter la situation par un graphe. [Indication — Positionner les 8 sommets du graphes en 4 groupes de 2 et tracer les arêtes en commençant par le sommet de plus haut degré.]
- 3) Combien de poignées de mains M. et Mme X ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

Exercice 2.10. Dans chaque case d'un tableau de $n \times n$ cases unités, on a inscrit un nombre. Deux lignes quelconques sont toujours différentes (i.e. il existe au moins une colonne qui rencontre ces lignes selon des nombres différents). Prouver qu'il existe une colonne que l'on peut effacer de sorte que, dans le tableau $n \times (n - 1)$ restant, les lignes soient encore deux à deux différentes.

Exercice 2.11. *Seau d'eau.* On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, on a à disposition deux récipients (non gradués!), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres. Comment doit-on faire ?

Exercice 2.12. *Musée.* Le graphe ci-dessous représente le plan des couloirs d'un musée.

- 1) Un gardien placé dans un couloir peut surveiller les deux carrefours placés à ses extrémités. Combien de gardiens sont nécessaires (et comment les placer) afin que tous les carrefours soient surveillés ?
- 2) Si l'on place maintenant les gardiens aux carrefours, en supposant qu'un tel gardien peut surveiller tous les couloirs amenant à ce carrefour, combien de gardiens sont nécessaires ?



Exercice 2.13. *Amitiés (bis).* Une fête regroupe n personnes, chacune ayant au moins un ami présent (l'amitié étant réciproque). Il se trouve que dans tout groupe d'au moins trois personnes, il n'y a jamais exactement deux paires d'amis. Prouver que chaque personne est amie avec toutes les autres.

Exercice 2.14. *Tableau.* Les nombres $0, 1, 2, \dots, 9$ sont écrits 10 fois chacun dans un tableau 10×10 . Prouver qu'il existe une ligne ou une colonne qui contient plus de trois nombres différents.

Exercice 2.15. Au goûter, n enfants désirent se partager équitablement m barres chocolatées identiques, aucune de ces barres ne devant être coupée plus d'une fois. Prouver que, cela est réalisable si et seulement si : $m > n$ ou ($m < n$ et $m = n - \text{pgcd}(m, n)$).

Exercice 2.16. Des jetons sont placés sur un tableau carré de $n \times n$ cases unités de façon à satisfaire les règles suivantes :

- (a) toute case qui ne contient pas un jeton possède un côté commun avec une case qui en contient un ;
- (b) pour toute paire $\{c, c_0\}$ de cases qui contiennent chacune un jeton, il existe une suite de cases contenant chacune un jeton qui commence par c et se termine par c_0 , et telle que deux cases consécutives de la suite ont toujours un côté en commun.

Prouver qu'il y a au moins $\frac{n^2-3}{2}$ jetons.

TD3 — Connectivité

Exercice 3.1. *Matrice d'adjacence.* Soit $G = (S, A)$ un multigraphe non orienté à n sommets, que l'on notera $v_1, v_2, \dots, v_n$. La **matrice d'adjacence** M_G est définie par : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient $m_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes de i à j .

- 1) Pourquoi la matrice d'adjacence est-elle symétrique ?
- 2) Donner le graphe obtenu à partir de la matrice suivante :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3) Montrer que le nombre de chaînes de longueur k reliant le sommets i au sommet j correspond au coefficient d'indice (i, j) de M_G^k .
- 4) Montrer que le diamètre de G est le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que tous les coefficients de $(M_G + I_n)^k$ soient non nul.
- 5) Donner la matrice d'adjacence de $K_{p,p}$, le graphe biparti complet à $n = 2p$ sommets.
- 6) À l'aide de la matrice d'adjacence, calculer le nombre de chaînes fermées de longueur k dans $K_{p,p}$.
- 7) On note $P_G(X) = \det(M_G - XI_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice d'adjacence associée à G . Montrer que si G et G' sont isomorphe alors $P_G = P_{G'}$.
- 8) On suppose qu'il est de la forme $P_G(X) = (-X)^n + c_1(-X)^{n-1} + \dots + c_n$. Montrer que :
 - 8a) c_1 est le nombre de boucles ;
 - 8b) si G est simple, $-c_2$ est le nombre d'arêtes ;
 - 8c) si G est simple, c_3 est le double du nombre de triangles.
- 9) Montrer que si G est un graphe biparti, alors, pour toute valeur propre λ de M_G , $-\lambda$ est aussi une valeur propre de M_G avec la même multiplicité¹.

Exercice 3.2. Montrer que, dans un graphe connexe, une arête est un pont si et seulement si elle ne se trouve sur aucun cycle.

Exercice 3.3. *Autoroutes.* Dans un tout petit pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute directe. Peut-on se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes ? Quel est le diamètre du graphe associé à ce réseau autoroutier ?

Exercice 3.4. Dans un pays, il y a au moins 101 villes, et des liaisons aériennes directes (aller-retour) existent entre certaines d'entre elles. La capitale du pays est ainsi reliée à (exactement) 100 villes, et chaque autre ville possède (exactement) 10 liaisons aériennes différentes. Il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre par les liaisons aériennes, en transitant éventuellement par d'autres villes. Prouver qu'il est possible de fermer la moitié des liaisons aériennes de la capitale tout en préservant la capacité de voyager d'une ville à l'autre.

Exercice 3.5. *Lien entre connexe et fortement connexe.* Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté tel que, pour tout $s \in S$, on ait $d^+(s) = d^-(s)$. Montrer que G est fortement connexe si et seulement si G est faiblement connexe, i.e. le graphe non orienté associé est connexe.

Exercice 3.6. *Fil de fer.* On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer ?

Exercice 3.7. *Condition suffisante pour être hamiltonien.* Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté et on pose $n = |S|$.

- 1) Quel est le nombre maximal d'arêtes que peut avoir G ?
- 2) Supposons que, pour toute paire de sommets $\{u, v\} \subset S$, on a $d(u) + d(v) \geq n$. En utilisant une récurrence sur $t = \binom{n}{2} - |A|$, montrer que G admet un cycle hamiltonien.

1. Comme M_G est symétrique, M_G est diagonalisable, donc la multiplicité géométrique de λ (dimension du sous-espace propre associé) est égale à la multiplicité algébrique (ordre de λ comme racine de P_G).

3) En déduire que, si G vérifie que pour toute paire de sommets $\{u, v\} \subset S$ on a $d(u) + d(v) \geq n - 1$, alors G admet une chaîne hamiltonienne. [Indication — Ajouter un sommet annexe à G et le relier à tous les sommets de G .]

4) Le roi Arthur fait s'asseoir ses $2n$ chevaliers autour de la Table Ronde. Chacun des chevaliers possède au plus $n - 1$ ennemis parmi les autres chevaliers. Prouver que Merlin l'Enchanteur peut trouver un arrangement des $2n$ chevaliers de sorte qu'aucun ne soit assis à côté d'un de ses ennemis. (Bien sûr, l'animosité est réciproque, et seuls les chevaliers s'assoient autour de la table.)

Exercice 3.8. *Méthode probabiliste.* Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant : *il existe une orientation du graphe complet K_n à n sommets qui admette $\frac{n!}{2^{n-1}}$ chemins hamiltoniens.* On note Ω l'ensemble des orientations de K_n . On suppose que l'on choisit aléatoirement une orientation du graphe en choisissant de manière indépendante une orientation de chaque arête avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

1) Est-ce que la probabilité définie correspond à la probabilité uniforme ?

2) Étant donné $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X_\sigma : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ la variable aléatoire telle que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_\sigma(\omega) = 1$ si tous les arcs $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ avec $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ appartiennent à ω , et 0 sinon. Calculer $\mathbb{E}[X_\sigma]$.

3) Calculer l'espérance de $X = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X_\sigma$ et en déduire le résultat.

Exercice 3.9. *Réunions dans un club.*

1) Un club de 9 personnes se réunit chaque jour autour d'une table ronde. Combien de jours peuvent-ils se réunir si l'on souhaite que personne n'ait deux fois le même voisin ?

2) Généraliser la question précédente au cas où le club à n personnes.

3) Le club de 9 personnes a cette fois deux tables, l'une de 4 places, l'autre de 5. Combien y a-t-il de jours de réunion possibles ? Et avec trois tables de 3 places ?

Exercice 3.10. Vingt équipes de football participent à un tournoi. Le premier jour, chacune dispute un match. Le second jour, chaque équipe joue un autre match, contre une équipe différente de celle de la veille. Prouver qu'après ce second jour, il est possible de trouver un groupe de 10 équipes dont deux quelconques ne se sont pas encore rencontrées.

TD4 — Arbres

Exercice 4.1. *Caractérisation de la suite des degrés.* Soit G un graphe connexe à $n \geq 2$ sommets.

- 1) Montrer que G est un arbre si et seulement si la suite des degrés $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ vérifie $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.
- 2) Pour $n \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$, écrire toutes les suites de degrés possibles pour un arbre à n sommets.
- 3) À isomorphisme près, donner tous les arbres non orientés d'ordre inférieur à 6.

Exercice 4.2. *Un peu de chimie.*

- 1) Montrer que la représentation graphique des alcanes (hydrocarbures) de formule $C_n H_{2n+2}$ est un arbre (on rappelle que l'atome de carbone est de valence 4, et celui d'hydrogène de valence 1).
- 2) Pour $n \in \llbracket 4, 7 \rrbracket$, donner le nombre d'isomères de formule $C_n H_{2n+2}$ et dessiner la représentation graphique de chaque isomère obtenu. On rappelle que deux molécules sont des isomères si elles sont composées des mêmes atomes (elles ont la même formule brute) mais dont les répartitions des atomes sont différentes (ils ont des propriétés chimiques, physiques ou autres, distinctes).

Exercice 4.3. *Centre d'un graphe.* Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On note d la distance sur G . Un centre d'un graphe G est un sommet u tel que $\max \{d(u, v) ; v \in V\}$ soit aussi petit que possible.

- 1) Soit T un arbre sur au moins trois sommets, et soit T' l'arbre obtenu en supprimant de T toutes ses feuilles. Montrer que T et T' ont les mêmes centres.
- 2) En déduire que tout arbre a soit un unique centre, soit deux centres adjacents.

Exercice 4.4. *Forêt couvrante maximale.* Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté (non nécessairement connexe). On appelle **forêt couvrante maximale** tout sous-graphe de G couvrant, sans cycle, et tel que l'ajout quelconque d'une arête de A crée un cycle.

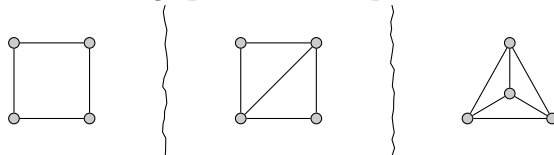
- 1) Montrer que, si G est connexe, alors toute forêt couvrante maximale est un arbre couvrant.
- 2) Montrer que le nombre d'arêtes d'une forêt couvrante maximale est $|S| - k$, où k est le nombre de composantes connexes de G .

Exercice 4.5. *Arbres couvrants.* Étant donné un multigraphe non orienté $G = (V, E)$, un sous-arbre couvrant H est sous graphe de G tel que H soit un arbre et tous les sommets de G soient des sommets de H . On note $\tau(G)$ le nombre d'arbres couvrants de G .

- 1) Étant donné $e \in E$, le multigraphe obtenu en supprimant l'arête e et en identifiant les extrémités de celle-ci est appelé **contraction** de G pour l'arête e . On le note $G.e$. Montrer que si e n'est pas une boucle, alors

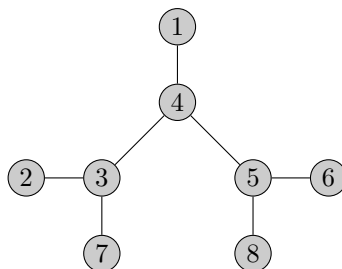
$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G.e).$$

- 2) Combien d'arbres couvrants différents les graphes ci-dessous possèdent-ils ?



- 3) On veut montrer que $\tau(K_n) = n^{n-2}$. On suppose que l'ensemble des sommets de K_n est l'ensemble ordonné $S = \llbracket 1, n \rrbracket$. À chaque arbre couvrant T de K_n , on fait correspondre une suite $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) \in S^{n-2}$ comme suit. Soit s_1 le premier sommet de degré 1 dans T . Le voisin unique de s_1 est t_1 . On retire s_1 et on appelle s_2 le plus petit sommet de degré 1 dans $T - s_1$. Le voisin de s_2 est t_2 . On procède jusqu'à ce que t_{n-2} soit défini, c'est-à-dire qu'il ne reste plus qu'un lien entre deux sommets.

3a) Faire fonctionner l'algorithme sur l'arbre suivant :



- 3b) En exhibant la fonction réciproque, montrer que l'on a une bijection entre les arbres couvrant de K_n et S^{n-2} . En déduire $\tau(K_n)$.
- 4) Soit G un graphe connexe sans boucle ni pont. Montrer que $\tau(G) \geq |E|$.
- 5) Dans quel cas y a-t-il égalité ?
- 6) Montrer que $\tau(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$.

Exercice 4.6. *Algorithme de Kruskal (1956).* Soit $G = (S, A, w)$ un graphe non orienté connexe pondéré, où $w: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ assigne un poids à chaque arête. On cherche un sous-graphe connexe couvrant dont la somme des poids est minimale. Un algorithme naïf consiste à tester toutes les possibilités, mais on a alors un nombre exponentiel de cas à tester. On considère plutôt l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Algorithme de Kruskal

Data : Un graphe non orienté connexe pondéré $G = (S, A, w)$ avec $|S| = n$

Result : Un ensemble T d'arêtes

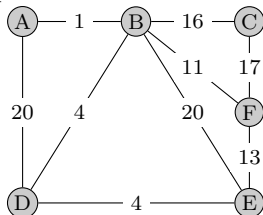
$T \leftarrow \emptyset$;

On trie les arêtes par poids croissants, on obtient l'ensemble B ;

while $|T| < n - 1$ **do**

 on considère le premier élément e de B (élément de moindre poids) et on le retire de B ;
 si $T \cup \{e\}$ est sans cycle, alors $T \leftarrow T \cup \{e\}$;

- 1) Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe suivant :



- 2) Montrer que l'algorithme de Kruskal s'arrête.
- 3) Montrer que l'ensemble T forme un arbre à la sortie.
- 4) En notant $w(G')$ la somme des poids des arêtes d'un sous-graphe G' de G , montrer que, pour tout arbre couvrant T' de G , on a $w(T') \geq w(T)$.

TD5 — Coloriages

Exercice 5.1. *Problème d'emploi du temps.* Pendant un festival, on veut organiser des tournois de scrabble (S), échecs (E), go (G), dames (D), tarot (T) et mastermind (M). Plusieurs personnes se sont inscrites à la fois pour les tournois E, S, G, d'autres personnes pour les tournois G, D, M, et enfin d'autres personnes pour les tournois M, T, S. Il est entendu qu'une participation simultanée à plusieurs tournois est impossible et que les organisateurs veulent satisfaire tout le monde. Quel est la durée minimale du festival ?

Exercice 5.2. *Radio pirate.* On désire implanter 7 stations radio dans 7 endroits dont les distances mutuelles (en km) sont données dans le tableau ci-dessous. En sachant que deux stations interfèrent si elles se trouvent à moins de 100 km l'une de l'autre, quel est alors le nombre minimum de longueurs d'onde qu'il faut prévoir pour éviter toute interférence ?

	B	C	D	E	F	G
A	55	110	108	60	50	88
B		87	142	133	98	139
C			77	111	85	193
D				75	114	82
E					107	41
F						63

Exercice 5.3. *Graphes d'intervalles.* À une famille d'intervalles fermés $I_1, I_2, \dots, I_n$ de $\mathbb{R}$, on associe un graphe simple $G = (V, E)$, appelé **graphe d'intervalles**, dont les sommets (V) sont les intervalles et les arêtes (E) sont les paires $\{I_i, I_j\}$ telles que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

1) Afin d'organiser les oraux d'un concours, on doit affecter à chaque épreuve des salles différentes. Voici la répartition des horaires des différents oraux sur une journée : Mathématiques, 8h00 – 11h00 ; Informatique, 9h00 – 14h00 ; Français, 9h30 – 12h00 ; Anglais, 11h30 – 16h00 ; Physique, 13h30 – 16h30 ; Sport, 16h15 – 18h15. Modéliser ce problème à l'aide d'un graphe d'intervalles et donner le nombre minimal de salles nécessaires.

2) On note $\preceq$ l'ordre sur les intervalles défini par $I \preceq J$ si $\inf(I) \leq \inf(J)$. La notation $\text{Adj}(I)$ correspond à l'ensemble des sommets adjacents à I . Considérons l'algorithme de coloriage suivant :

Algorithme 2 : Coloriage d'un graphe d'intervalles

Data : Une famille V d'intervalles $I_1, \dots, I_n$.

Result : Une fonction de coloriage

Pour tout $I \in V$, $c(I) \leftarrow +\infty$;

while il existe $I \in V$ tel que $c(I) = +\infty$ **do**

 choisir $I \in V$ minimal pour $\preceq$ tel que $c(I) = +\infty$;

$c(I) \leftarrow \inf(\mathbb{N}^* \setminus c(\text{Adj}(I)))$;

Montrer que cet algorithme donne un coloriage optimal et en donner sa complexité. (On pourra essayer cet algorithme sur les données de la première question.)

3) Montrer que pour un graphe d'intervalles G , on a $\omega(G) = \chi(G)$. On rappelle que $\omega(G)$ (resp. $\chi(G)$) est le nombre maximal de sommets dans une clique de G (resp. le nombre chromatique de G).

4) Montrer qu'un graphe simple $G = (V, E)$ est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe une énumération $(C_1, \dots, C_p)$ des cliques maximales (pour l'inclusion) de G telle que, pour tout sommet $v \in V$, les indices q tels que $v \in C_q$ soient consécutifs.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On dit que G est **triangulé** si tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 admet une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux sommets non consécutifs. On dit que G est un graphe de **comparaison** s'il existe une orientation transitive des arêtes de G (i.e. si (v_1, v_2) et (v_2, v_3) sont deux arcs, alors (v_1, v_3) est un arc)². Enfin, le **complémentaire** de G est le graphe simple $\overline{G} = (V, \overline{E})$ où $\overline{E} = \mathfrak{P}_2(V) \setminus E$.

2. De manière équivalente, G est un graphe de comparaison s'il existe une relation d'ordre strict $<$ sur V (si $v_1 < v_2$ alors on n'a pas $v_2 < v_1$; et $v_1 < v_2$ et $v_2 < v_3$ impliquent $v_1 < v_3$), telle que $\{v_1, v_2\} \in E$ si et seulement si $v_1 < v_2$ ou $v_2 < v_1$.

- 5) Montrer que tout graphe d'intervalles est triangulé.
- 6) Montrer que, si G est un graphe d'intervalles, alors $\overline{G}$ est un graphe de comparaison.
- 7) Montrer que, si G est un graphe triangulé et $\overline{G}$ est un graphe de comparaison, alors G est un graphe d'intervalles.
- 8) **Question subsidiaire** — Dans l'*Oulipo*, le mathématicien Claude Berge propose le problème suivant :

Par un beau matin de novembre, le duc de Densmore est trouvé mort suite à l'explosion d'une pièce de son château de l'île de White. Prestement diligentés, les enquêteurs constatent que le meurtre a été commis à l'aide d'une bombe placée avec précaution dans le labyrinthe du château. Or, avant son assassinat, le duc avait invité 8 femmes sur l'île. Lorsqu'elles sont interrogées, encore sous le choc de la mort du duc, elles ne peuvent se souvenir des dates précises auxquelles chacune est venue au château, mais elles se rappellent quelles autres femmes elles ont croisées au château pendant leur séjour, et chacune jure que si quiconque d'autre avait été là en même temps qu'elle, elle s'en serait aperçue, à moins qu'une personne ne se soit volontairement cachée dans le labyrinthe. Le marin qui faisait la navette vers l'île a lui aussi oublié les dates, mais il atteste n'avoir transporté chacune que pour un seul aller retour. Après leur interrogatoire, les enquêteurs établissent le rapport suivant :

- Ann dit avoir vu Betty, Cynthia, Emily, Felicia et Georgia.
- Betty dit avoir vu Ann, Cynthia et Helen.
- Cynthia dit avoir vu Ann, Betty, Diana, Emily et Helen.
- Diana dit avoir vu Cynthia et Emily.
- Emily dit avoir vu Ann, Cynthia, Diana et Felicia.
- Felicia dit avoir vu Ann et Emily.
- Georgia dit avoir vu Ann et Helen.
- Helen dit avoir vu Betty, Cynthia et Georgia.

Pouvez vous déterminer qui a menti ?

Exercice 5.4. *Polynôme chromatique.* Soit $G = (S, A)$ un graphe simple. On note $P_G(k)$ le nombre de coloriage de sommets de G avec $k \in \mathbb{N}$ couleurs.

- 1) Soit I_n le graphe formé de n sommets isolés. Calculer $P_{I_n}(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrer que $P_{K_n}(k) = \prod_{i=0}^{n-1} (k - i)$.
- 3) On suppose que G possède une arête e . On note $G - e$ le graphe G auquel on a enlevé l'arête e et $G.e$ le graphe où on a contracté l'arête e , c'est-à-dire que les extrémités de e sont remplacées par un unique sommet. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G.e}(k).$$

- 4) En déduire que $P_G(k)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré $|S|$. On appelle P_G le **polynôme chromatique** de G .
- 5) Déterminer le polynôme chromatique d'un arbre à n sommets.
- 6) Déterminer le polynôme chromatique de K_4 .

Exercice 5.5. *Minoration de la taille maximum d'un stable.* Soit $G = (S, A)$ un graphe simple. On souhaite montrer que

$$\alpha(G) \geq \sum_{s \in S} \frac{1}{d(s) + 1}.$$

- 1) On choisit aléatoirement de manière uniforme un ordre sur les sommets. Donner la probabilité d'obtenir un ordre donné.
- 2) Étant donné un ordre sur les sommets $(s_1, \dots, s_n)$, on note $V(s_1, \dots, s_n)$ l'ensemble des sommets défini par $s \in V(s_1, \dots, s_n)$ si et seulement si aucun sommet voisin de s n'apparaît avant s pour l'ordre $(s_1, \dots, s_n)$. Montrer que $V(s_1, \dots, s_n)$ est un stable.
- 3) Pour $s \in S$, montrer que $\mathbb{P}(s \in V(s_1, \dots, s_n)) = \frac{1}{d(s) + 1}$.
- 4) On note X la variable aléatoire $X: (s_1, \dots, s_n) \rightarrow |V(s_1, \dots, s_n)|$. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
- 5) En déduire l'inégalité souhaitée.

TD6 — Planarité

Exercice 6.1. *Conditions nécessaires pour être planaire.* Soit G un graphe simple connexe planaire à $s \geq 3$ sommets.

- 1) En utilisant la formule d'Euler, montrer que $a \leq 3s - 6$ et $f \leq 2s - 4$.
- 2) Montrer qu'il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.
- 3) Montrer qu'on ne peut pas remplacer 5 par 4, autrement dit : existe-t-il un graphe planaire dont tous les sommets sont de degré au moins 5 ?
- 4) S'il n'y a pas de cycles de longueur 3, alors $a \leq 2s - 4$.
- 5) Plus généralement, s'il n'y a pas de cycle de longueur strictement inférieure à r , alors :

$$a \leq \frac{r}{r-2}(s-2).$$

- 6) Montrer que cela donne des conditions nécessaires de planarité, mais ne permet pas de montrer la planarité.

Exercice 6.2. *Graphe planaire coloriable avec 5 couleurs.*

- 1) Prouver que si G est un graphe simple et planaire, ayant un nombre fini de sommets, alors G possède au moins un sommet de degré ne dépassant pas 5.
- 2) Montrer par récurrence sur le nombre de sommets que pour un graphe simple planaire G on a $\chi(G) \leq 6$.
- 3) En analysant plus finement le passage de la récurrence, montrer que l'on peut avoir $\chi(G) \leq 5$.

Exercice 6.3. *Ballon de football.* Un ballon de football est fabriqué en cousant ensemble des pièces de cuir. Traditionnellement, il s'agit de pentagones et d'hexagones. Montrer que c'est impossible en n'utilisant que des hexagones (si l'on exclut l'assemblage de deux hexagones par plus d'un côté).

Exercice 6.4. *Polyèdres combinatoirement réguliers.* Un polyèdre est la donnée d'un ensemble de polygones, les faces, et d'une façon de recoller dans l'espace les faces le long de leurs bords. Un polyèdre est **combinatoirement régulier** si le graphe formé par les sommets et les arêtes est un graphe connexe planaire, dont tous les sommets sont de même degré, et dont toutes les faces sont également de même degré. (Les degrés des sommets peuvent être différents des degrés des faces.) Par exemple, un parallélépipède rectangle, bien que non régulier, est combinatoirement régulier (son graphe est le même que celui d'un cube).

Montrer qu'un polyèdre convexe combinatoirement régulier dont les sommets sont de degré supérieur à 3 a obligatoirement des faces de degré inférieur à 5, et qu'il est combinatoirement équivalent à l'un des solides de Platon.

Exercice 6.5. Soit $G = (S, A)$ un graphe simple. Le **nombre de croisements**, noté $\text{Cr}(G)$, est le nombre minimum de croisements nécessaires pour dessiner G dans le plan.

- 1) Montrer que $\text{Cr}(K_5) = 1$ et $\text{Cr}(K_{3,3}) = 1$.
- 2) Montrer par récurrence sur le nombre d'arêtes que $\text{Cr}(G) \geq |A| - 3|S|$.
- 3) On note $s = |S|$ et $a = |A|$. Soit $p \in [0, 1]$. On choisit de manière indépendante des sommets avec une probabilité p pour constituer un ensemble $S' \subset S$. On note X la variable aléatoire du nombre de croisements du sous-graphe induit par S' . On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de sommets et Z la variable aléatoire correspondant au nombre d'arêtes.

3a) Montrer que $\mathbb{E}[Y] = ps$, $\mathbb{E}[Z] = p^2a$ et $\mathbb{E}[X] \leq p^4 \text{Cr}(G)$.

3b) Montrer que, pour tout p , on a :

$$\text{Cr}(G) \geq \frac{a}{p^2} - \frac{3s}{p^3}.$$

3c) En déduire l'inégalité suivante, si $4s \leq a$:

$$\text{Cr}(G) \geq \frac{a^3}{64s^2}.$$

Exercice 6.6. Dans un pays, 11 villes sont reliées deux à deux directement soit par une autoroute (à double sens) soit par une ligne de chemin de fer (à double sens). Prouver qu'il existe forcément un pont sur lequel soit une autoroute passe au-dessus d'une autre, soit une voie de chemin de fer passe au-dessus d'une autre.