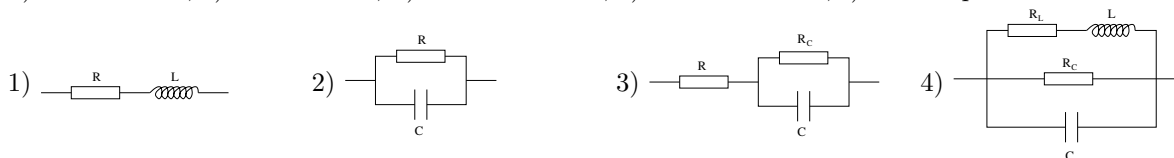


1 Nombres complexes : forme algébrique

Exercice 1.1. Soit $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 2i$. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants et les représenter dans le plan complexe :

- 1) z_1^2 ; 2) $z_1^2 + z_2$; 3) $\bar{z}_1 z_2$; 4) $z_1 \bar{z}_2$; 5) $1/z_1$; 6) z_1/z_2 ; 7) $z_1^3 - z_2^2$; 8) $(3 + z_1)/(1 - z_2)$.

Exercice 1.2. Pour chacun des circuits suivants, en régime sinusoïdal de pulsation ω , donner a) son impédance, b) sa résistance, c) sa réactance, d) son admittance, e) sa conductance, f) sa susceptance.



Pour chaque montage, dire pour quelles valeurs de ω l'impédance équivalente est réelle (resp. imaginaire pure).

Exercice 1.3. Trouver l'intrus!

- 1) $(2 - i)^3$; 2) $8 + i$; 3) $(18 + 26i)/(-2 + 2i)$; 4) $2 - 11i$; 5) $4/(1 + i) + 9/i$.

Exercice 1.4. Donner le conjugué des nombres complexes suivants (on n'en demande pas la forme algébrique) :

- 1) $3 - 11i$; 2) $8i$; 3) $i(9 + 2i)$; 4) $(3 + i)(-13 - 2i)$; 5) $(2 + 5i)^6$; 6) $(1 + i)^{2016}$; 7) $(2 - 3i)(8 + 5i)$; 8) $2/(1 + i) - 3/(1 - i)$.

Exercice 1.5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

- 1) $iz + 2 - i = 0$; 2) $(3 + 5i)z = 1 - z$; 3) $(z + 1)/(z - 1) = 2i$; 4) $i\bar{z} = 1 - i$.

Exercice 1.6. *Équations du second degré.* Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations en z suivantes : 1) $z^2 = z + 1$; 2) $z^2 = z - 1$; 3) $z^2 + 2z + 5 = 0$; 4) $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$; 5) $(z^2 + 1)(z^2 + 2) \cdots (z^2 + 10) = 0$; 6) $z^3 + 1 = 0$; 7) $z^4 - 1 = 0$.

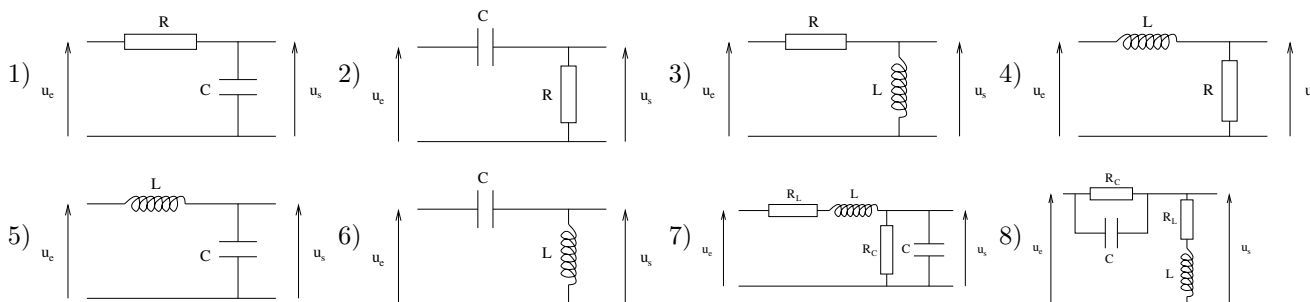
Exercice 1.7. Soit $\alpha = (3 - i)/(5 + 7i)$ et $\beta = (3 + i)/(5 - 7i)$. Montrer, sans calcul, que $\alpha + \beta$ est réel et que $\alpha - \beta$ est imaginaire pur.

Exercice 1.8. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pourquoi peut-on affirmer que les nombres suivants sont soit réels, soit imaginaires purs ? 1) $\alpha = z^2 + \bar{z}^2$; 2) $\beta = (z - \bar{z})/(z^3 + \bar{z}^3)$; 3) $\gamma = (z^2 - \bar{z}^2)/(z\bar{z} + 2)$.

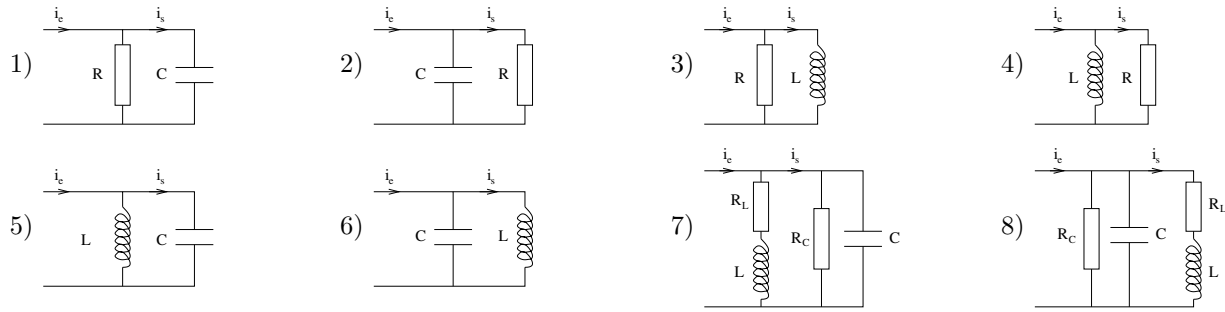
Exercice 1.9. *Équations de droites.* Soit $\alpha = a + ib$ avec a et b réels. Soit M , A et B les points du plan complexe d'affixes respectives α , a et b .

- 1) Représenter les points M , A et B dans le plan complexe.
- 2) Montrer que les droites (OM) et (AB) ont pour équations respectives $\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = 0$ et $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} = 2iab$.

Exercice 1.10. Pour chacun des circuits suivants, en régime sinusoïdal de pulsation ω , calculer le rapport $H = u_s/u_e$ de la tension de sortie complexe à la tension d'entrée complexe (appelé *fonction de transfert en tension*).



Exercice 1.11. Pour chacun des circuits suivants, en régime sinusoïdal de pulsation ω , calculer le rapport $H = \underline{i}_s / \underline{i}_e$ de l'intensité de sortie complexe à l'intensité d'entrée complexe (appelé *fonction de transfert en intensité*).

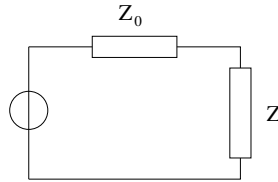


Exercice 1.12. Représenter dans le plan complexe :

- 1) l'ensemble des points d'affixes $t + i$ pour t décrivant $\mathbb{R}$;
- 2) l'ensemble des points d'affixes $1 + it$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$;
- 3) l'ensemble des points d'affixes $1/(1 + it)$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$;
- 4) l'ensemble des points d'affixes $1/(1 + i/t)$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$;
- 5) l'ensemble des points d'affixes $1/(1 - it)$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$;
- 6) l'ensemble des points d'affixes $1/(1 - i/t)$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$;
- 7) l'ensemble des points d'affixes $1/(1 - t)$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$;
- 8) l'ensemble des points d'affixes $1/(1 - 1/t)$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.13. *Diagramme de Nyquist.* Représenter dans le plan complexe les fonctions de transfert calculées dans les exercices 1.10 et 1.11, la pulsation ω décrivant $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.14. *Adaptation d'impédance.* On considère le montage suivant :



La puissance dissipée dans l'impédance $\underline{Z}$ est donnée par

$$P = \Re \left(\frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* \right)$$

- 1) L'impédance du générateur $\underline{Z}_0$ étant fixée, déterminer la valeur de $\underline{Z}$ pour que la puissance dissipée dans $\underline{Z}$ soit maximale.
- 2) On note P_0 la puissance dissipée dans l'impédance $\underline{Z}_0$. À quelle condition le rendement en puissance $\eta = P/(P_0 + P)$ est-il optimal ?

2 Nombres complexes : forme trigonométrique

Exercice 2.1. Calculer les modules des nombres complexes :

- 1) -5 ; 2) $2i/3$; 3) $1+i$; 4) $\sqrt{3}-i\sqrt{2}$; 5) $\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)$; 6) $(4+3i)(12-5i)$; 7) $(2-7i)^3$; 8) $7/(2-i)^2$; 9) $(a+ib)/(a-ib)$.

Exercice 2.2. Quels sont les nombres complexes z tels que z et z^2 aient le même module ?

Exercice 2.3. Déterminer et représenter l'ensemble des nombres complexes z tels que :

- 1) $|z-3i|=5$; 2) $|\bar{z}+i|=2$.

Exercice 2.4. Représenter les nombres complexes suivants dans le plan complexe et déterminer leur argument :

- 1) $-10i$; 2) -8 ; 3) $i-1$; 4) $5+5i$; 5) $\sqrt{3}+i$; 6) $1-i\sqrt{3}$.

Exercice 2.5. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de l'argument des nombres complexes suivants : 1) $3+2i$; 2) $-7+10i$; 3) $-2i-1$; 4) $13-i\sqrt{2}$.

Exercice 2.6. Déterminer et représenter l'ensemble des nombres complexes z tels que : 1) $\arg(z) \equiv \pi/4 [2\pi]$; 2) $\arg(-2z) \equiv \pi/2 [2\pi]$; 3) $\arg(\bar{z}) \equiv \pi/3 [2\pi]$; 4) $\arg(z) \equiv \pi/6 [\pi]$.

Exercice 2.7. Mettre les nombres suivants sous forme trigonométrique : 1) $-i$; 2) -7 ; 3) $2-2i$; 4) $3i-3\sqrt{3}$; 5) $(-1+i)^5$; 6) $(\sqrt{3}-i)^4$; 7) $(2i-2\sqrt{3})/(4i+4)$; 8) $(1+i)^2/(1-i)^3$; 9) $\cos(\pi/17)-i\sin(\pi/17)$; 10) $\sin(\pi/17)+i\cos(\pi/17)$; 11) $\tan(\pi/15)+i$; 12) $1-i\tan(\pi/15)$; 13) $(1+i)^{2016}$; 14) $(i/(1+i))^{2016}$; 15) $(2016-i)^3+(2016+i)^3$.

Exercice 2.8. Valeurs exactes de $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

- 1) Déterminer les formes algébrique et trigonométrique du nombre complexe

$$Z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}.$$

- 2) En déduire les valeurs exactes de $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

Exercice 2.9. Mettre les nombres suivants sous forme exponentielle : 1) 8 ; 2) -3 ; 3) $-i$; 4) $2+2i$; 5) $(1-i)^3$; 6) $(\sqrt{3}+i)^7$.

Exercice 2.10. Mettre chacun des nombres suivants sous forme exponentielle et en déduire ses formes trigonométrique et algébrique : 1) $(1+i)^6$; 2) $(1-i)^5$; 3) $(2\sqrt{3}-2i)^4$; 4) $(1+i\sqrt{3})^7/(1-i\sqrt{3})^{12}$; 5) $2i(1-i)/(3+3i\sqrt{3})$.

Exercice 2.11. Trouver l'intrus !

- 1) $e^{3ix}+e^{-3ix}$; 2) $(1/e^{i\alpha}+e^{i\alpha})^2$; 3) $e^{i\alpha}+1$; 4) $i/(e^{-ix}-e^{ix})$.

Exercice 2.12. En utilisant les formules d'Euler, linéariser :

- 1) $\cos^2(x)$; 2) $\sin^2(x)$; 3) $\sin^3(x)$; 4) $\sin^6(x)$; 5) $\cos^4(x)\sin^2(x)$; 6) $\cos(3x)\sin^5(x)$.

Exercice 2.13. Arc moitié.

- 1) Factoriser les nombres complexes $1-e^{i\alpha}$ et $1+e^{i\alpha}$ par $e^{i\alpha/2}$ et simplifier les résultats.
2) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $1-e^{i\alpha}$ et $1+e^{i\alpha}$.
3) En déduire, pour $\alpha \not\equiv 0 [2\pi]$, le module et l'argument des nombres complexes :

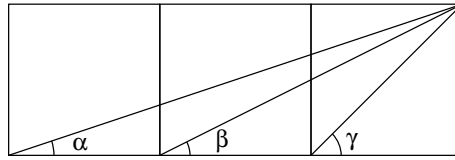
$$\frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad (1+e^{i\alpha})(1-e^{i\alpha}).$$

- 4) On fixe un angle $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ et un entier $n \geq 1$. Déduire de la première question une factorisation des sommes :

$$S = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad S' = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta).$$

On pourra commencer par calculer $S+iS'$.

Exercice 2.14. La figure ci-dessous représente trois carrés accolés :



Comparer $\alpha + \beta$ et γ .

Exercice 2.15. On considère les points du plan complexe A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1+i, b = -1-i, c = 2i$ et $d = 2-2i$.

- 1) Représenter les points A, B, C et D dans le plan complexe.
- 2) Calculer les nombres complexes :

$$\frac{c-a}{d-a} \quad \text{et} \quad \frac{c-b}{d-b}.$$

- 3) En déduire la nature des triangles ACD et BCD .
- 4) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

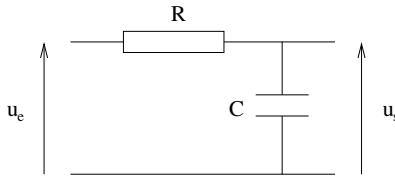
Exercice 2.16. Soit a un nombre complexe non nul et

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Montrer que les trois points d'affixes respectives a, ja et j^2a sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

Exercice 2.17. *Diagramme de Bode.*

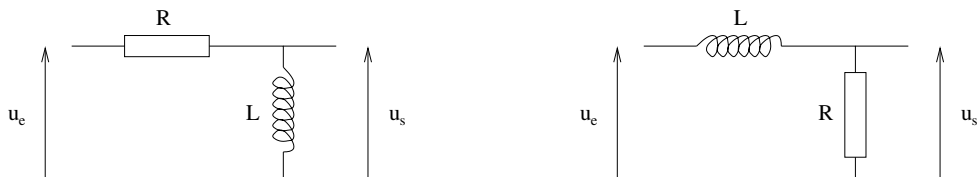
- 1) Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{u_s}/\underline{u_e}$ du montage suivant :



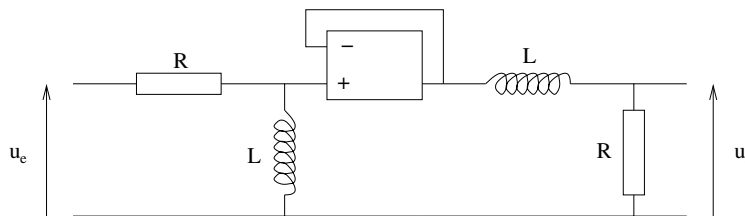
- 2) Montrer que les points du diagramme de Nyquist sont sur un cercle.
- 3) Calculer le gain en décibels $G_{dB} = 20 \log_{10}(H)$ et le déphasage $\phi = \arg(\underline{H})$.
- 4) Déterminer les comportements asymptotiques de G_{dB} et de ϕ lorsque ω tend vers 0 et $+\infty$.
- 5) Représenter G_{dB} et ϕ en fonction de $\log_{10}(\omega)$ (diagramme de Bode).
- 6) Retrouver l'allure du diagramme de Nyquist.
- 7) Reprendre les mêmes questions avec les autres fonctions de transfert de la feuille 1.

Exercice 2.18. *Montage en cascade.*

- 1) Calculer les fonctions de transfert en tension des montages suivants :



- 2) Calculer les gains en décibels et les déphasages associés.
- 3) En déduire la fonction de transfert en tension $\underline{H}$, le gain en décibel G_{dB} et le déphasage ϕ du montage suivant :



- 4) Déterminer les comportements asymptotiques de G_{dB} et de ϕ lorsque ω tend vers 0 et $+\infty$.
- 5) Représenter G_{dB} et ϕ en fonction de $\log_{10}(\omega)$ (diagramme de Bode).
- 6) En déduire l'allure du diagramme de Nyquist.

3 Équations différentielles linéaires

Exercice 3.1. *Calcul de primitives.* Préciser sur quels intervalles la fonction f est intégrable et en déterminer une primitive : 1) $f(t) = e^{5t}$. 2) $f(t) = te^{-2t^2}$. 3) $f(t) = -\sqrt{e^t}$. 4) $f(t) = \sin(t)e^{\cos(t)}$. 5) $f(t) = \sin(t/4 + \pi/5)$. 6) $f(t) = t^2(t^3 - 5)$. 7) $f(t) = te^{2t}$. 8) $f(t) = \cos^3(t)$. 9) $f(t) = \cos^4(t)\sin^2(t)$. 10) $f(t) = \cos(t)e^t$. 11) $f(t) = t\sin(t)e^{3t}$. 12) $f(t) = e^{1/t}/t^2$. 13) $f(t) = (\cos(t) - \sin(t))/(\cos(t) + \sin(t))$.

Exercice 3.2. *Premier ordre.* Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $y'(t) - 2y(t) = e^t$.
- 2) $y'(t) - 3y(t) = 5t - 1$.
- 3) $y'(t) + y(t) = e^{-t}\cos(t)$.
- 4) $2y'(t) + 3y(t) = 6t^2 - 7t + 2$.
- 5) $y'(t) + y(t) = \sin(t)$.
- 6) $y'(t) + 2y(t) = e^{-2t}$.
- 7) $2y'(t) - 3y(t) = 6(t^2 + t - 1)$.
- 8) $y'(t) - 2y(t) = -2/(1 + e^{-2t})$.
- 9) $y'(t) + y(t) = (t^2 + 1)e^t$.
- 10) $y'(t) + y(t) = te^t$.
- 11) $2y'(t) + y(t) = te^{-t}\cos(t)$.
- 12) $y'(t) = y(t)/t$ (pour $t > 0$).
- 13) $y'(t) + \cos(t)y(t) = 2\cos(t)$.
- 14) $t^2y'(t) + y(t) = 1$ (pour $t > 0$).
- 15) $(1 + t)y'(t) - y(t) = (1 + t)^3$ (pour $t > -1$).
- 16) $(t^2 + 1)y'(t) + ty(t) = 0$.

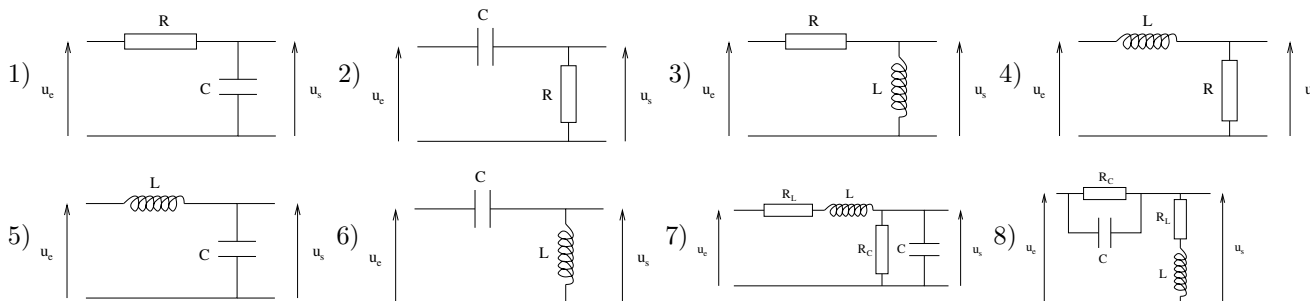
Exercice 3.3. *Second ordre.* Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $y''(t) + 4y(t) = 12t$.
- 2) $y''(t) + 9y(t) = 10\cos(t)$.
- 3) $y''(t) + y(t) = t^3 + 2$.
- 4) $y''(t) + 4y(t) = t^3 - 1$.
- 5) $y''(t) + y(t) = \cos(t)$.
- 6) $y''(t) + y(t) = e^t\cos(t)$.
- 7) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{2t}$.
- 8) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \cos(t)$.
- 9) $y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = e^{-t}\sin(t)$.
- 10) $y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0$.
- 11) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t$.
- 12) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = te^t$.
- 13) $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = e^{3t}$.

Exercice 3.4. Résoudre les équations différentielles avec condition initiale suivantes :

- 1) $y'(t) + 2y(t) = 0$ et $y(0) = 1$.
- 2) $7y'(t) + 4y(t) = 0$ et $y(7) = e^5$.
- 3) $0,4y'(t) - 1,5y(t) = 0$ et $y(1) = 1$.
- 4) $y'(t) - \pi y(t) = 0$ et $\log(y(2)) = \pi$.
- 5) $y''(t) = -4y(t)$, $y(\pi/2) = -1$ et $y'(\pi/2) = 1$.
- 6) $5y''(t) + 3y(t) = 0$, $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$.
- 7) $8y''(t) = -y(t)/2$, $y(\pi/2) = 10$ et $y'(\pi/2) = 0$.
- 8) $y''(t) + y(t)/2 = 0$, $y(\pi/4) = -1$ et $y'(\pi/4) = 2$.
- 9) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
- 10) $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = e^{3t}$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 3.5. On considère les circuits suivants :



- Écrire une équation différentielle vérifiée par la tension de sortie u_s .
- Résoudre l'équation homogène associée.
- Donner la réponse u_s lorsque $u_e(t) = E$ et vérifiant $u_s(0) = u_0$.
- Donner la réponse u_s lorsque $u_e(t) = U \sin(\omega t)$ et vérifiant $u_s(0) = 0$.
- Donner la réponse u_s lorsque $u_e(t) = U(-1)^{\lfloor 2\nu t \rfloor}$ et vérifiant $u_s(0) = 0$.

Exercice 3.6. Pour un oscillateur libre non amorti, les oscillations sont sinusoidales. Pour justifier cette loi physique, montrer que toute fonction solution de l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2 y = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = Y \sin(\omega_0 t + \phi)$$

Exercice 3.7. Soit f une solution de $6y' + y = 0$ et g une solution de $16y'' + y = 0$. Donner une allure aussi précise que possible de la courbe représentative de fg .

Exercice 3.8. Chute libre. Lorsqu'un corps de masse m est lâché en chute libre sans vitesse initiale, sa vitesse v est solution de l'équation différentielle

$$mv' + \alpha v = mg$$

où $\alpha > 0$ est le coefficient de frottement de l'air et g l'accélération de la pesanteur. Résoudre cette équation et interpréter la quantité mg/α .

Exercice 3.9. Ressort. Un corps de masse m est attaché à un ressort de raideur k , est écarté à une distance x_0 de la position d'équilibre et est lâché sans vitesse initiale. Sa position x par rapport à la position d'équilibre vérifie l'équation différentielle

$$mx'' + \alpha x' + kx = 0$$

où $\alpha > 0$ est le coefficient de frottement de l'air et k la constante de raideur du ressort. Résoudre cette équation (en tenant compte des conditions initiales) et représenter l'allure de la solution.