

TD1 — Suites et séries de fonctions

Légende : $\diamond$ basique, $\star$ difficile, $\star\star$ plus difficile.

Exercice 1.1. $\diamond$ Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soit f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g respectivement, alors $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $\lambda f + g$. Même question avec des convergences uniformes.

Exercice 1.2. $\diamond$ Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ suivantes : 1) $f_n(x) = x^n$; 2) $f_n(x) = x^n(1 - x)$; 3) $f_n(x) = nx^n(1 - x)$.

Exercice 1.3. $\diamond$ Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes : 1) $f_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{n}\right)$; 2) $f_n(x) = x - \frac{\sin(x)}{nx}$; 3) $f_n(x) = e^{-n|x|} \cos(nx)$; 4) $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n}$.

Exercice 1.4. $\diamond$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, pour $n \geq 1$.

- 1) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
- 2) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- 3) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Exercice 1.5. Sur l'hypothèse de convergence uniforme de la dérivée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } \frac{1}{n} \leq |t| \leq 1 \\ \frac{n}{2}t^2 + \frac{1}{2n} & \text{si } |t| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

- 1) Représenter graphiquement f_n .
- 2) Montrer que $f_n \in C^1([-1, 1]; \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et représenter graphiquement f'_n .
- 3) Montrer que $f_n \rightarrow f$ et $f'_n \rightarrow g$ simplement, pour des fonctions f et g qu'on déterminera.
- 4) La fonction f est-elle C^1 ?
- 5) A-t-on convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? Et de $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice 1.6. Sur l'hypothèse de convergence uniforme sous l'intégrale. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n^2t & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2t & \text{si } \frac{1}{2n} \leq t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

- 1) Représenter graphiquement f_n .
- 2) Montrer que $f_n \rightarrow f$ simplement, pour une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on déterminera.
- 3) A-t-on $\int_0^1 f_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$?
- 4) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément ?

Exercice 1.7. Sur l'intervalle $[-1, 1]$, on définit les fonctions $f_0(t) = 2t$ puis, par récurrence, $f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)}$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $0 \leq f_n(t) \leq 2$.
- 2) Montrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- 3) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante égale à 2.
- 4) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$2 - f_{n+1}(t) \leq \frac{1}{2}(2 - f_n(t)).$$

- 5) En déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.
- 6) En déduire que les suites suivantes convergent :

$$I_n = \int_{-1}^1 f_n(t) dt, \quad J_n = \int_{-1}^1 \frac{dt}{f_n(t)}, \quad K_n = \int_{-1}^1 \frac{f_{n-1}(t)}{f_n(t)} dt.$$

Exercice 1.8. ★ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_n(x) = n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right).$$

- 1) Montrer que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction g à déterminer.
- 2) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.9. ★ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\exists M > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $u_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$.

- 1) Donner des exemples de telles fonctions f .
- 2) Étudier la convergence (simple ou uniforme) de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Montrer que la limite u de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est linéaire.

Exercice 1.10. ★★ *Théorème de Dini.* Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f . On suppose que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(|f_n(x) - f(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Application — Montrer la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions polynomiales définies par $P_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - P_n(x)^2)/2$.

Exercice 1.11. ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer les identités, utiles dans la preuve du théorème de Weierstrass :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2.$$

Exercice 1.12. Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x) dx = \int_a^b x^n g(x) dx$. Montrer que $f = g$.

Exercice 1.13. ★ Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales. Montrer que, si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors sa limite est une fonction polynomiale.

Exercice 1.14. *Fonctions équicontinues.* On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

- 1) Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue et converge simplement, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.
- 2) Soit $L > 0$. Montrer que, si toutes les fonctions f_n sont L -lipschitziennes, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue.
- 3) Montrer que $(x \mapsto \arctan(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équicontinue.

Exercice 1.15. ★★ *Fonctions réglées.* On appelle fonction réglée sur $[a, b]$ toute limite uniforme de fonctions en escalier sur $[a, b]$. Montrer qu'une fonction sur $[a, b]$ est réglée si et seulement si elle admet en tout point de $]a, b[$ une limite à droite et une limite à gauche, ainsi qu'une limite à droite (resp. à gauche) en a (resp. en b).

Exercice 1.16. ◇ Pour tout $n \geq 1$, soit $u_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $u_n(x) = x e^{-nx}$.

- 1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
- 2) Pour tout $n \geq 1$, donner le tableau de variations de u_n .
- 3) Pour tout $n \geq 1$, déterminer $\sup \{|u_n(x)|; x \in [1, +\infty[\}$. En déduire que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.
- 4) Pour tout $a > 0$, montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
- 5) Est-ce que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$? Et sur $\mathbb{R}_+^*$?
- 6) Soit $N \geq 1$. Calculer $\sum_{n=N}^{\infty} u_n(x)$.
- 7) Est-ce que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 1.17. ◇ Étudier la convergence (simple, uniforme ou normale) des séries de fonctions suivantes :

- 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$; 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ sur $\mathbb{R}$; 3) $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^2 + x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$; 4) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.18. $\diamond$ On considère la série de fonctions, définies sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

- 1) Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge si et seulement si $x \in [-1, 1[$. On note $S(x)$ sa somme.
- 2) Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et que

$$\forall x \in] -1, 1[\quad S'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

- 3) En déduire que

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

- 4) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
- 5) En déduire que la fonction S est continue sur $[-1, 1[$, et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Exercice 1.19. Dans chacun des cas suivants, montrer que la série de fonctions converge simplement sur I et déterminer la classe de régularité (C^0 , C^1 , ..., C^∞) de sa somme sur I : 1) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n^2+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$; 2) $\sum_{n \geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$; 3) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}_+$.

Exercice 1.20. $\diamond$ Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $u_n(t) = a_n \cos(nt)$.

- 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement. On note U sa somme.
- 2) Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{2\pi} \cos(n_0 t) U(t) dt$.

Exercice 1.21. On considère la série de fonctions, définies sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nx)}{n+1}.$$

- 1) Montrer que cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que cette série ne converge pas normalement sur $[10^{-7}, \pi]$.
- 3) Montrer que cette série converge uniformément sur $[10^{-7}, \pi]$.
- 4) Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, \pi]$?

Exercice 1.22. ★★ *Séries de Dirichlet.*

- 1) Donner l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n \geq 0} e^{-nz}$ converge.
- 2) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que, si $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nz}$ converge pour $z = z_0$, alors cette série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(z) > \Re(z_0)$.
- 3) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels positifs. Montrer que, si $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge pour $z = z_0$, alors, pour tout $\alpha \in]0, \pi/2[$, cette série converge uniformément sur le secteur angulaire $S_{z_0, \alpha} = \{z_0 + re^{i\theta} ; r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$.

TD2 — Séries entières

Légende : $\diamond$ basique, $\star$ difficile, $\star\star$ plus difficile.

Exercice 2.1. $\diamond$ Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de : 1) $\sum_{n \geq 0} a_n^2 x^n$; 2) $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$.

Exercice 2.2. $\diamond$ Dans chacun des cas suivants, déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ et étudier la convergence pour $|x| = R$: 1) $a_n = n2^{-n}$; 2) $a_n = \frac{n!}{n^5+1}$; 3) $a_n = \sin(n\pi/2)$; 4) $a_n = (\sqrt{n})^{1/n}$; 5) $a_n = e^{n^{1/3}}$; 6) a_n est le n^{e} chiffre du développement décimal de π ; 7) $a_n = n^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; 8) $a_n = \rho^{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{n \in C}$, où $\rho > 0$ et C est l'ensemble des carrés.

Exercice 2.3. On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin(n^{-1/2})x^n$.

- 1) Donner son rayon de convergence R . On notera f sa somme sur l'intervalle $] -R, R[$.
- 2) Étudier la convergence de la série entière pour $x = R$ et pour $x = -R$.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
- 4) Montrer que $\sum_{n \geq 2} (\sin(n^{-1/2}) - \sin((n-1)^{-1/2}))x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
- 5) Montrer que $(1-x)f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 2.4. $\star$ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit $c \in \mathbb{C}$. On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est infini et que $b_n/a_n \rightarrow c$.

- 1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence infini.
- 2) Montrer que

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c.$$

Exercice 2.5. $\diamond$ *Calculs de sommes.* Déterminer le rayon de convergence R des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ suivantes, puis calculer leurs sommes sur $] -R, R[$: 1) $a_n = n$; 2) $a_n = n(n-1)$; 3) $a_n = n^2$; 4) $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2.6. Soit f la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1} x^n$.

- 1) Montrer que f est définie sur $[-1, 1]$.
- 2) Montrer que f est croissante et de classe C^1 sur $[-1, 1]$.
- 3) Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre dont f est solution sur $] -1, 1[$.

Exercice 2.7.

- 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^k}{n!} x^n$.
- 2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_k de degré k tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} x^n = P_k(x) e^x.$$

- 3) Déterminer une relation entre P_k et P_{k+1} .

Exercice 2.8. *Théorème d'Abel.* Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} a_n$ soit convergente.

- 1) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. On note S sa somme.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$.

Exercice 2.9. $\star\star$ *Théorème de Tauber.* Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge sur $[0, 1[$ et on note S sa somme. On suppose enfin que $S(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \rightarrow 1^-$.

- 1) Donner un exemple vérifiant les hypothèses précédentes avec $\sum_{n \geq 0} a_n$ divergente.
- 2) Montrer que, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge vers ℓ .

On suppose désormais que $a_n = o(1/n)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, on introduit

$$B_N(x) = \sum_{n=0}^N (1-x^n)a_n \quad \text{et} \quad R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

3) Vérifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=0}^N a_n - \ell = S(x) - \ell + B_N(x) - R_N(x).$$

4) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall N \geq N_0 \quad |R_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

5) Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge vers ℓ .

Exercice 2.10. *Formule de Cauchy.* Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f la somme de cette série sur son disque de convergence $\{z \in \mathbb{C} ; |z| < R\}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta$.

2) Soit $r \in [0, R[$. Montrer que la série de fonctions (de θ) $\sum_{p \geq 0} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$.

3) Montrer que

$$\forall r \in [0, R[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

4) On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 2.11. *Zéros isolés.* Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme. Supposons qu'il existe une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $z_p \neq 0$, $f(z_p) = 0$, et $z_p \rightarrow 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice 2.12. $\diamond$ *Développements en série entière usuels.* Montrer que : 1) pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$; 2) pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$; 3) pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; 4) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; 5) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exercice 2.13. $\diamond$ *Développements en série entière.* Dans chacun des cas suivants, développer en série entière en 0 la fonction f et préciser le rayon de convergence de sa série de Taylor ainsi que le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel f coïncide avec la somme de cette série : 1) $f(x) = \ln(1-2x)$; 2) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$; 3) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$; 4) $f(x) = (x+4)^\alpha$; 5) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$. 6) $f(x) = \arctan(x)$.

Exercice 2.14. On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$ pour $x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\}$ et prolongée par continuité en 0.

1) Développer f en série entière en 0.

2) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

3) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

Exercice 2.15. Développer en série entière en 0 la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, en utilisant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 2.16. $\star$ *Inverse.* Soit f une fonction développable en série entière en 0 avec $f(0) \neq 0$. Montrer que $1/f$ est développable en série entière en 0.

Exercice 2.17. *Résolution d'équations différentielles.* On veut trouver une solution de l'équation différentielle suivante :

$$3xy'(x) + (2-5x)y(x) = x. \quad (1)$$

Soit y une fonction développable en série entière en 0 s'écrivant $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0.

- 1) Montrer que, si y est une solution de l'équation (1), alors la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 1 que l'on précisera.
- 2) Réciproquement, montrer que la fonction y trouvée ci-dessus est bien solution de (1) sur $\mathbb{R}$.
- 3) Même exercice avec l'équation différentielle $xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0$ (on cherchera cette fois une relation linéaire d'ordre 2 entre les coefficients).

Exercice 2.18. ★★ *Fonctions absolument monotones.* Soit $f: [0, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

- 1) Montrer que f coïncide avec la somme de sa série de Taylor en 0.
- 2) Application — Montrer que $\tan$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$ coïncide avec la somme de sa série de Taylor en 0.

Exercice 2.19. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}.$$

- 1) En supposant que la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.
- 2) En déduire que

$$\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\} \quad f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

- 3) Donner une expression explicite de u_n en fonction de n .

Exercice 2.20. ★ *Nombres de Bell.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. On convient que $b_0 = 1$.

- 1) Calculer b_1 , b_2 et b_3 .
- 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}.$$

- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq n!$.
- 4) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ est non nul.
- 5) Montrer que la somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ vérifie : pour tout $x \in]-R, R[$, $S'(x) = e^x S(x)$.
- 6) Calculer S (on admettra l'unicité de la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant $S(0) = b_0$).

Exercice 2.21. ◇ Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que A est diagonalisable, avec pour valeurs propres i et $-i$.
- 2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.22. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

- 1) Montrer que f est bien définie.
- 2) Donner une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par f .
- 3) Résoudre cette équation différentielle et en déduire f .

On propose une autre méthode pour calculer f .

- 4) En notant $j = e^{i2\pi/3}$, calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 5) Développer en série entière en 0 la fonction $x \mapsto e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.
- 6) En déduire f .

TD3 — Séries de Fourier

Légende : $\diamond$ basique, $\star$ difficile, $\star\star$ plus difficile.

Autour du cours

Exercice 3.1. $\diamond$ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux.

- 1) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi n \leq a < 2\pi(n+1)$.
- 2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Exercice 3.2. $\diamond$ Soit $N \in \mathbb{N}$, $(c_n)_{-N \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$ et P le polynôme trigonométrique défini par

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}.$$

Calculer les coefficients de Fourier de P .

Exercice 3.3. $\diamond$ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. On note $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)dt.$$

- 1) Montrer que si f est paire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$.
- 2) Montrer que si f est impaire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.

Exercice 3.4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$. On rappelle que $\overline{\int g(t)dt} = \int \overline{g(t)}dt$.
- 2) Soit $g: t \mapsto f(-t)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$.
- 3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $h_a: t \mapsto f(t-a)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(h_a) = e^{-ina} c_n(f)$.
- 4) $\star$ Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π -périodiques et continues. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application linéaire définie par $\tau_a(f): t \mapsto f(t-a)$. Déterminer les valeurs propres de τ_a . Préciser l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles les sous-espaces propres sont des droites.

Exercice 3.5. *Théorème de Fejér.* Pour tout $N \geq 1$, on note F_N le noyau de Fejér à l'ordre N . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue. Pour tout $N \geq 1$, on définit la fonction $f * F_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f * F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) F_N(s) ds.$$

Montrer que $(f * F_N)_{N \geq 1}$ converge uniformément vers f . [Indication : On pourra reprendre la preuve du théorème 3.7.]

Exercice 3.6. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Montrer que f est de classe C^∞ si et seulement si, pour tout $k \geq 1$, $c_n(f) = o(n^{-k})$ quand $|n| \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.7. ★ Une transformation unitaire. Soit f et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}$ est convergente et que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

[Indication — On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]

Exercice 3.8. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^5$ qui minimise la quantité

$$\int_0^{2\pi} (e^{-t} \sin(t) + \alpha + \beta \cos(t) + \gamma \sin(t) + \delta \cos(2t) + \varepsilon \sin(2t))^2 dt.$$

Exercice 3.9. Soit $T > 0$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique.

- 1) Montrer que la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(u) = f(\frac{T}{2\pi}u)$ est 2π -périodique.
- 2) On suppose que f est de classe C^1 . Montrer qu'il existe une famille de nombres complexes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t}.$$

On donnera une expression explicite des α_n en fonction de f .

Applications

Exercice 3.10. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = t^2$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

- 1) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- 2) Justifier que f est continue et de classe C^1 par morceaux.
- 3) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- 4) En déduire les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

- 5) Montrer que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}t + \frac{1}{4}t^2.$$

Exercice 3.11. Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$t(\pi - t) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos(2t)}{1} + \frac{\cos(4t)}{4} + \frac{\cos(6t)}{9} + \dots \right) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{27} + \frac{\sin(5t)}{125} + \dots \right).$$

Exercice 3.12. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = |t|$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

- 1) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- 2) Justifier que f est continue et de classe C^1 par morceaux.
- 3) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- 4) En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 3.13. Inégalité de Wirtinger. Soit $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

- 1) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 3.14. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$u'' - u = f \quad (\text{E})$$

d'inconnue la fonction 2π -périodique $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

1) Un cas particulier : si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer toutes les solutions 2π -périodiques de l'équation (E).

2) On suppose dans cette question que u est une fonction 2π -périodique de classe C^2 , solution de l'équation différentielle (E). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = -(1 + n^2)c_n(u).$$

En déduire une formule exprimant u en fonction des coefficients de Fourier de f .

3) Pour étudier la réciproque, on suppose de plus que la série de Fourier de f converge normalement. Montrer que la fonction $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{1 + n^2} e^{int}$$

est bien une fonction 2π -périodique de classe C^2 solution de l'équation (E).

4) Déterminer une fonction $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique et continue telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)G(t-s)ds.$$

Exercice 3.15. ★ *Équirépartition.* Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique continue et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)ds.$$

Exercice 3.16. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = e^{i\alpha t}$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f .

2) En déduire les égalités suivantes :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha + n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \right)^2 \quad \text{et} \quad \pi \cotan(\alpha\pi) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\alpha - n} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

3) Montrer que

$$\pi = 4 - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^2 - 1}.$$

Exercice 3.17. ★ *Phénomène de Gibbs.* Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = t$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

1) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Justifier que f est de classe C^1 par morceaux.

3) Calculer les coefficients de Fourier de f .

4) En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5) Montrer que, pour tout $t \in]0, 2\pi[$,

$$S_N(t) := \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nt)}{n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi - t}{2}.$$

6) La fonction *sinus cardinal*, notée sinc , est le prolongement par continuité en 0 de $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x)/x$. Montrer que la fonction $\theta: x \mapsto \int_0^x \text{sinc}(u)du$ atteint en π son maximum sur $\mathbb{R}_+$. [Remarque — $\theta(\pi) \approx 1,85$.]

7) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_0$, la fonction S_N prend toutes les valeurs entre $-\theta(\pi) + \varepsilon$ et $\theta(\pi) - \varepsilon$. [Indication — On pourra remarquer que $S_N(x/N)$ est une somme de Riemann.]

Exercice 3.18. ★★ Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite positive décroissante de limite nulle. On s'intéresse à la série trigonométrique $(S_N)_{N \geq 1}$ définie par

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(nt).$$

- 1) Dans cette question uniquement on suppose que $(b_n)_{n \geq 1} = (n^{-1/2})_{n \geq 1}$. Montrer que $(S_N)_{N \geq 1}$ n'est pas la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux.
- 2) Montrer que $(S_N)_{N \geq 1}$ converge simplement.
- 3) Montrer que $(S_N)_{N \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$.

Dans la suite, on va montrer que $(S_N)_{N \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $nb_n \rightarrow 0$.

- 4) Montrer que, pour $N \geq 1$ et $t = \frac{\pi}{2N}$,

$$\sum_{n=\lceil N/2 \rceil}^N b_n \sin(nt) \geq \frac{Nb_N}{2\sqrt{2}}.$$

- 5) En déduire que, si $(S_N)_{N \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $nb_n \rightarrow 0$.

Pour tout $t > 0$, on définit $N(t) := \lceil 1/t \rceil$.

- 6) Montrer que, pour tout $N \geq 1$ et $t > 0$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N(t)} b_n \sin(nt) \right| \leq \max \{ nb_n ; n \in \llbracket N+1, N(t) \rrbracket \}.$$

- 7) En utilisant une transformation d'Abel, montrer que, pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$\left| \sum_{n=N(t)+1}^{+\infty} b_n \sin(nt) \right| \leq \pi N(t) b_{N(t)}.$$

- 8) En déduire que, si $nb_n \rightarrow 0$, alors $(S_N)_{N \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.