

## TD1 — Ensembles

**Exercice 1.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A_n = \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminer

$$\bigcup_{n=0}^{10} A_n, \quad \bigcap_{n=0}^{10} A_n, \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Même question avec  $A_n = [n, n+1]$ , puis  $A_n = [2^{-n}, +\infty[$ .

**Exercice 1.2.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de parties d'un ensemble  $\Omega$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on pose

$$B_n = \bigcap_{k=0}^n A_k \quad \text{et} \quad C_n = \bigcup_{k=0}^n A_k.$$

- 1) Exprimer  $B_{n+1}$  en fonction de  $B_n$  et comparer ces deux ensembles au sens de l'inclusion.
- 2) Exprimer  $C_{n+1}$  en fonction de  $C_n$  et comparer ces deux ensembles au sens de l'inclusion.

**Exercice 1.3.** On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On modélise (i.e. on représente) les résultats possibles de cette expérience par l'ensemble  $\Omega = (\{1, 7, 8, 9, 10, V, D, R\} \times \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\})^2$ .

- 1) Donner l'ensemble  $A \subset \Omega$  modélisant le résultat « les deux cartes tirées sont rouges ».
- 2) Donner l'ensemble  $B \subset \Omega$  modélisant le résultat « les deux cartes tirées sont un valet et un dix ».
- 3) Donner l'ensemble  $C \subset \Omega$  modélisant le résultat « les deux cartes tirées sont des figures ».
- 4) Quels résultats modélisent les ensembles  $A^c$ ,  $A \cap B \cap C$  et  $A \cap B \cap C^c$  ?
- 5) Écrire à l'aide des ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$  l'ensemble  $E$  modélisant le résultat « les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges ».
- 6) Même question pour l'ensemble  $F$  modélisant le résultat « on obtient au plus une figure rouge ».

**Exercice 1.4.** Écrire l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  et déterminer son cardinal.

**Exercice 1.5.** *Formule du crible.* Soit  $A$  et  $B$  deux parties finies d'un ensemble  $\Omega$ . Montrer que  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ . Généraliser pour trois parties finies  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exercice 1.6.** *Nombre de chiffres.* Pour écrire tous les entiers de 100 à 999, on doit écrire 2 697 chiffres. Vrai ou faux ?

**Exercice 1.7.** *Drôle de dictionnaire.* Avec un alphabet de vingt-six lettres, combien peut-on former de mots de quatre lettres :

- 1) en autorisant une répétition des lettres ?
- 2) sans répétition de lettre ?
- 3) finissant par une voyelle (les voyelles de l'alphabet étant A, E, I, O, U et Y) et en autorisant une répétition des lettres ?

**Exercice 1.8.** *Loto.* Un tirage du loto consiste en cinq boules différentes parmi des boules numérotées de 1 à 49 et un numéro chance, entre 1 et 10. Combien y a-t-il de tirages différents au loto ?

**Exercice 1.9.** *Est-ce dans vos cordes ?* Soit  $n$  un entier strictement positif. On place  $n$  points distincts sur un cercle.

- 1) Combien déterminent-ils de cordes ?
- 2) Quel est le nombre de points d'intersection de ces cordes, en supposant qu'en chaque point d'intersection passent au plus deux cordes ?

**Exercice 1.10.** *Anagrammes.* Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MIRE ? Et du mot BAOBAB ?

**Exercice 1.11.** *Course en tête.* Au cours d'une série de huit lancers d'une pièce de monnaie, nous dirons que PILE « fait la course en tête » si, tout au long de la série, le nombre de PILE obtenus est toujours supérieur ou égal au nombre de FACE. Combien y a-t-il de telles séries ?

## TD2 — Espaces probabilisés

**Exercice 2.1.** *Différentes façons de choisir.* Dans la grille suivante, on doit choisir une case blanche au hasard. On propose trois procédures pour ce choix :

- (A) On choisit une case blanche uniformément au hasard parmi les cinq cases blanches.
- (B) On choisit uniformément au hasard une ligne puis, dans la ligne, une case blanche.
- (C) On choisit uniformément au hasard une colonne puis, dans la colonne, une case blanche.

|   |   |   |
|---|---|---|
| a |   |   |
| b |   | c |
|   | d | e |

- 1) Modéliser chacune des procédures.
- 2) On a simulé  $n$  choix d'une case blanche selon l'une des trois procédures ci-dessus, pour  $n = 100$ , puis  $n = 1000$  et enfin  $n = 10000$ . On a obtenu les fréquences ci-dessous :

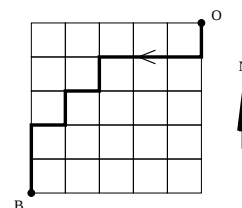
| Case                      | a     | b     | c     | d     | e     |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Fréquence ( $n = 100$ )   | 0,19  | 0,16  | 0,22  | 0,31  | 0,12  |
| Fréquence ( $n = 1000$ )  | 0,150 | 0,159 | 0,174 | 0,368 | 0,149 |
| Fréquence ( $n = 10000$ ) | 0,167 | 0,168 | 0,164 | 0,336 | 0,165 |

Au vu de ce tableau, peut-on deviner la procédure utilisée ?

**Remarque :** L'observation des résultats simulés ne permet pas de remonter au modèle à coup sûr. Mais l'un des objectifs de la statistique inférentielle est d'évaluer le risque de se tromper en « remontant d'une distribution de fréquences à une loi de probabilité ».

**Exercice 2.2.** *Promenade dans New York.*

Un membre de l'ONU doit régulièrement se rendre à la Bourse de New York. Il connaît le quartier (cf. schéma ci-contre) et, pour changer, décide de choisir un chemin au hasard. Comme le temps lui est tout de même compté, il prendra l'un des chemins les plus courts, autrement dit un chemin dont les tronçons empruntés le sont ou bien vers le sud (comme le premier tronçon du chemin ci-contre), ou bien vers l'ouest (comme le deuxième). Il envisage deux façons d'effectuer un tel choix « au hasard ».



**Localement** Notre homme part de  $O$  en choisissant uniformément au hasard l'une des deux rues qui s'offrent à lui. Arrivé au carrefour suivant, il choisit à nouveau uniformément au hasard l'une des deux rues qui partent vers le sud ou vers l'ouest. Et ainsi de suite. S'il arrive au bord sud (resp. au bord ouest) du quartier, il ira toujours vers l'ouest (resp. vers le sud) jusqu'à atteindre sa destination, le point  $B$ .

- 1) Donner la probabilité que notre homme emprunte le chemin donné sur le schéma exemple.
- 2) Tous les chemins sont-ils équiprobables ?

**Globalement** Notre homme ne veut pas flâner et se poser la question de savoir quelle rue emprunter à chaque carrefour. Il décide donc de prendre un plan du quartier, d'y tracer tous les chemins possibles (n'allant que vers le sud ou vers l'ouest) et d'en choisir un uniformément au hasard.

- 3) Combien a-t-il tracé de chemins ?
- 4) Quelle est la probabilité qu'il choisisse le chemin donné sur le schéma exemple ?
- 5) Les deux façons de choisir « au hasard » sont-elles équivalentes ?

**Exercice 2.3.** *Dé étrange.* Un dé est pipé, de telle sorte que la probabilité de sortie d'un numéro est proportionnelle à ce numéro. Modéliser un lancer de ce dé.

**Exercice 2.4.** *Coup de Vénus.*



Les Grecs et les Romains jouaient aux « dés » avec des osselets du pied appelés astragales. Ils lançaient l'astragale qui pouvait retomber sur l'un de ses quatre côtés (tous marqués différemment) : deux petits et deux plus larges. L'expérience permet d'estimer à 0,1 la probabilité d'obtenir chacune des petites faces et à 0,4 celle d'obtenir chacune des grandes faces.

En lançant quatre astragales, quelle est la probabilité de réussir le « coup de Vénus », c'est-à-dire d'obtenir les quatre faces différentes ? On modélisera le lancer de quatre astragales pour répondre à la question.

**Exercice 2.5.** Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules noires. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise.

- 1) Quelle est la probabilité que les couleurs soient alternées ?
- 2) Généraliser à une urne contenant  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires.

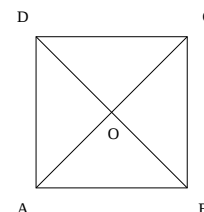
**Exercice 2.6.** *Étonnant ?* On dispose de 15 nombres strictement positifs et de 10 nombres strictement négatifs. On choisit deux nombres au hasard sans remise et on note leurs signes.

- 1) Modéliser cette expérience.
- 2) Quel est l'événement le plus probable : que le produit des deux nombres soit positif ou qu'il soit négatif ?
- 3) Le résultat est-il toujours vrai, pour d'autres valeurs que 15 et 10 ?
- 4) Même exercice avec remise.

**Exercice 2.7.** *Promenade aléatoire.*

Une fourmi part du point A et effectue trois déplacements suivant les segments de la figure, en choisissant, depuis chaque intersection, un segment au hasard.

- 1) Écrire tous les déplacements à l'aide d'un arbre.
- 2) Quelle est la probabilité que la fourmi se retrouve en A ? En B ? En C ? En D ? En O ?



**Remarque :** Les promenades aléatoires ont été imaginées au début du XX<sup>e</sup> siècle par les probabilistes, tels que le Russe Andreï Markov ou le Français Henri Poincaré, comme des modèles :

- en physique, pour étudier le mouvement brownien d'une particule (grain de pollen dans l'air, molécule dans l'air...);
- en génétique, pour étudier la transmission d'un caractère héréditaire.

**Exercice 2.8.** *Le voleur de Bagdad.* Le calife de Bagdad faisait jeter les voleurs dans un cul-de-basse-fosse, mais leur laissait au préalable une dernière chance de rester libre. Il leur présentait trois urnes contenant chacune six boules : la première 5 blanches et 1 noire, la deuxième 4 blanches et 2 noires et la troisième 3 blanches et 3 noires. Chacun avait le droit de choisir une seule boule dans l'une des trois urnes. Avec une boule blanche, il était libre.

- 1) Quelle était la probabilité qu'un voleur fût libéré ?
- 2) Un jour, un voleur plus malin demanda au calife s'il pouvait, avant le tirage, changer la répartition des boules dans les urnes. Le calife, pensant que cela ne changerait rien à ses chances, accéda à sa demande. Le calife avait-il raison ?

**Exercice 2.9.** Soit  $n \geq 1$ . On lance  $n$  fois une pièce équilibrée. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus un pile.

**Exercice 2.10.** Soit  $n \geq 1$ . On lance  $n$  fois de suite un dé équilibré à 6 faces numérotées 1, 1, 2, 2, 3, 3. On note  $p_n$  la probabilité que les trois numéros 1, 2 et 3 apparaissent chacun au moins une fois au cours de ces  $n$  lancers. Pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on pose  $A_i =$  « le numéro  $i$  n'apparaît pas durant ces  $n$  lancers ».

- 1) Calculer  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ .
- 2) En déduire que  $p_n = 1 - 3 \cdot (2/3)^n + 3 \cdot (1/3)^n$ .
- 3) Calculer la limite de  $(p_n)_{n \geq 1}$  et interpréter le résultat.

**Exercice 2.11.** *Problème des parapluies* Lors d'une réception à Styles Court, par temps pluvieux, les trente invités déposent leur parapluie à l'entrée. En repartant, chacun reprend un parapluie au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son parapluie ?

**Exercice 2.12.** On considère une infinité d'urnes numérotées. Pour tout  $n \geq 1$ , la probabilité de choisir l'urne numéro  $n$  est égale à  $2^{-n}$  et l'urne numéro  $n$  est composée de  $2^n$  boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

**Exercice 2.13.** Abel propose à Caïn le jeu suivant : « Lançons deux dés (cubiques) jusqu'à ce que la somme fasse 7 ou 8. Si 8 sort en premier, tu gagnes ; sinon, c'est moi qui gagne. » Quelle est la probabilité qu'Abel gagne ?

**Exercice 2.14.** Une association  $A$  tient son assemblée. Lors de cette assemblée il est prévu d'élire un directoire de deux personnes. Il y a neuf candidats. Parmi eux, six sont aussi membres d'une autre association et deux de ceux-ci sont membres de l'association  $A$  depuis plus d'un an. Parmi les trois autres candidats, un seul est membre de l'association  $A$  depuis plus d'un an. On suppose que les chances de chacun de ses candidats sont égales.

- 1) Quelle est la probabilité que l'un des élus soit membre d'une autre association et pas l'autre ?
- 2) Quelle est la probabilité que les deux élus soient des nouveaux venus ?
- 3) Quelle est la probabilité que les deux élus soient des nouveaux venus ou que l'un d'entre eux seulement fasse aussi partie d'une autre association ?
- 4) Sachant que les deux élus sont aussi membres d'une autre association, quelle est la probabilité qu'ils soient tous deux membres de l'association  $A$  depuis moins d'un an ?

**Exercice 2.15.** On jette deux dés.

- 1) Si on sait que les deux nombres obtenus sont distincts, quelle est la probabilité que la somme soit paire ?
- 2) Si on sait que la somme est paire, quelle est la probabilité que les deux nombres soient distincts ?

**Exercice 2.16.** Une grive se pose sur un fil téléphonique. Un chasseur, en visant la grive, peut l'atteindre avec une probabilité égale à 0,5. La probabilité de couper le fil est égale à 0,2. La probabilité de réussir les deux est égale à 0,1. Un groupe de trois chasseurs tire sur la grive (sans atteindre un autre chasseur...).

- 1) Calculer la probabilité de pouvoir encore téléphoner.
- 2) Calculer la probabilité de voir la grive s'envoler.
- 3) Calculer la probabilité d'avoir le fil intact et la grive en bonne santé.
- 4) Justifier l'indépendance des événements « le fil est coupé » et « la grive est touchée ».

**Exercice 2.17.** Le 14 juillet, à Saint-Tropez, il fait beau huit fois sur dix. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévisions météorologiques indépendantes :

- la météo nationale, qui se trompe deux fois sur cent ;
- une grenouille verte, qui se trompe une fois sur vingt.

La météo annonce de la pluie, alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Est-il plus probable qu'il fasse beau ou pas ?

**Exercice 2.18.** Cinq œnologues participent à une dégustation à l'aveugle. On leur sert à tous le même vin, qui est soit californien, soit français avec équiprobabilité. Chaque œnologue reconnaît un vin avec probabilité  $3/4$ . Les jugements sont indépendants. Sachant que 4 juges sur 5 ont estimé que le vin était français, quelle est la probabilité que ce soit le vin californien qui ait été servi ?

**Exercice 2.19.** La mafia subtilise 15 % des colis expédiés de New York par avion. Dominique veut envoyer deux cadeaux à sa sœur. Elle peut faire soit deux paquets séparés, soit un paquet groupé. Calculer, dans les deux cas, les probabilités des événements suivants : « un cadeau au moins est bien arrivé » et « les deux cadeaux sont bien arrivés ».

**Exercice 2.20.** Bill, Joe et Sam tirent sur une cible au même instant. Pour chacun d'eux, les probabilités d'atteindre la cible sont respectivement  $1/2$ ,  $2/3$  et  $1/4$ . On suppose leurs tirs indépendants. Quelle est la probabilité pour qu'ils atteignent tous les trois la cible ? Qu'aucun des trois n'atteigne la cible ? Que la cible soit atteinte par au moins l'un d'eux ?

**Exercice 2.21.** Une distance. Soit  $\Omega$  un univers fini muni d'une probabilité  $\mathbb{P}$ . On définit la *différence symétrique* des événements  $A$  et  $B$  de  $\Omega$  par

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B),$$

puis on définit  $d(A, B) = \mathbb{P}(A \triangle B)$ .

- 1) Représenter la différence symétrique de  $A$  et  $B$  sur un dessin.
- 2) Montrer que  $d(A, B) \geq |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)|$ .
- 3) Montrer que  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ .

**Exercice 2.22.** Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois événements indépendants. Montrer que :

- 1)  $A$  et  $B^c$  sont indépendants ;
- 2)  $A$  et  $B \cup C$  sont indépendants.

## TD3 — Variables aléatoires

**Exercice 3.1.** Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules noires. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise. Soit  $N$  le nombre de tirages effectués jusqu'à ce que l'urne ne contienne plus qu'une couleur. Calculer l'espérance et la variance de  $N$  ?

**Exercice 3.2.** *Prof sympa ?* Un professeur note ses élèves en lançant trois dés icosaédriques et en affectant comme note le nombre le plus élevé qui est apparu.

- 1) Quelle est la probabilité que la note donnée soit 20 ?
- 2) Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire « note ».
- 3) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire « note » ?

**Exercice 3.3.** Une urne contient une boule blanche et une boule noire. Toutes les secondes, on tire une boule au hasard dans l'urne et on la remet dans l'urne avec une boule supplémentaire de la même couleur. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donner la loi du nombre de boules blanches dans l'urne juste après le  $n^{\text{e}}$  tirage, ainsi que son espérance et sa variance.

**Exercice 3.4.** Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages successifs dans cette urne selon le principe suivant : on note la couleur de la boule tirée, on la remet dans l'urne avec une boule noire supplémentaire. On note  $N$  et  $B$  les variables aléatoires indiquant les rangs d'apparition respectifs des premières boules noires et blanches. Déterminer les lois de  $N$  et  $B$  et leurs espérances.

**Exercice 3.5.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(X = n - 1) = n\mathbb{P}(X = n)/4$ . Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

**Exercice 3.6.** Un test pour le dépistage d'une maladie étant en phase de mise au point, on dispose des précisions suivantes : lorsqu'une personne est atteinte de la maladie, le test s'avère positif avec une probabilité de 0,95. Lorsqu'une personne n'est pas malade, le test s'avère quand même positif avec une probabilité de 0,02. On sait que, dans une région donnée, le pourcentage de malades est de 4 %.

- 1) Sachant qu'une personne a un résultat positif au test, calculer la probabilité qu'elle ne soit pas malade.
- 100 personnes, issues de 100 villages différents de cette région (les choix de ces personnes sont supposés indépendants et le pourcentage de malades dans chaque village est de 4 %) montent dans un avion. Soit  $X$  le nombre de personnes malades parmi elles.
- 2) Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
  - 3) Donner la probabilité qu'il y ait au moins une personne malade parmi elles.
  - 4) Sachant qu'il y a au moins une personne malade parmi elles, quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ?

**Exercice 3.7.** *Anniversaires.* On choisit 500 personnes au hasard.

- 1) Quelle est la probabilité qu'exactement 3 d'entre elles aient leur anniversaire le premier mars ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'au moins une d'entre elles soit née un 29 février ?
- 3) Combien faut-il choisir de personnes pour que la probabilité qu'au moins une d'entre elles fête son anniversaire le même jour que vous soit supérieure à  $1/2$  ?
- 4) Combien faut-il choisir de personnes pour que la probabilité qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même jour soit supérieure à  $1/2$  ?

**Exercice 3.8.** La probabilité de naissance d'un garçon dans une famille est  $p \in [0, 1]$ . Dans chacun des cas suivants, calculer la taille moyenne de la fratrie :

- 1) on continue jusqu'à avoir un garçon ;
- 2) on continue jusqu'à ce que les deux sexes soient représentés ;
- 3) on continue jusqu'à ce que le sexe de l'aîné réapparaisse ;
- 4) on continue jusqu'à ce que les deux sexes soient représentés, mais en s'arrêtant à quatre enfants.

**Exercice 3.9.** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $p$ . Montrer que la loi est sans mémoire, c'est-à-dire que

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(X > n + k \mid X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$

**Exercice 3.10.** *Machine-outil.* Une machine-outil produit des vis. En marche normale, la probabilité qu'une vis soit défectueuse est 0,1%.

- 1) Quelle est la probabilité qu'on prenne 999 vis en bon état, puis une millièème qui soit défectueuse ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'un lot de 1 000 vis comprenne au plus une vis défectueuse ?
- 3) Comparer le résultat obtenu à celui approché donné par une loi de Poisson.
- 4) On pioche des vis au hasard. Combien va-t-on prendre de vis, en moyenne, avant de tomber sur une vis défectueuse ?

**Exercice 3.11.** *Un livre sans coquilles : une denrée rare.* La première édition du prix Goncourt (2011), *L'Art français de la guerre*, d'Alexis Jenni, parue chez la prestigieuse maison Gallimard, n'est pas épargnée par la présence d'une dizaine de coquilles sur le million de caractères qui composent le livre.

- 1) À combien peut-on estimer la probabilité qu'un caractère pris au hasard soit erroné ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une coquille dans les 64 premières pages (le livre contient 640 pages).

**Exercice 3.12.** Les cyprinidés du bassin du Liechtenstein se composent de 1000 poissons rouges qui, au cours d'une année, peuvent muter spontanément, indépendamment les uns des autres. La probabilité de mutation d'un poisson au cours de l'année est notée  $p$ , avec  $p < 10^{-2}$ . Pour simplifier, on suppose les poissons immortels.

- 1) On note  $X$  le nombre total de poissons de ce bassin qui mutent lors d'une année. Quelle est la loi de  $X$  ?
- 2) On estime l'espérance de  $X$  à 5. En admettant cette valeur, justifier l'utilisation d'une loi de Poisson. Quel est son paramètre ? En déduire la valeur de la probabilité  $p$ .
- 3) Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul mutant cette année ?
- 4) Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux mutants cette année ?

**Exercice 3.13.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de  $\mathbb{R}$ .

- 1) Démontrer que la fonction  $g(t) = \mathbb{E}[(X - t)^2]$  est minimale pour  $t = \mathbb{E}[X]$ . Que vaut son minimum ?
- 2) Montrer que  $\mathbb{E}[X^2] = 0$  si et seulement si  $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ .
- 3) Montrer que  $\text{Var}(X) = 0$  si et seulement si  $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$ .

**Exercice 3.14.** Soit  $T$  une variable aléatoire à valeurs entières vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(T > n) > 0$ . On appelle taux de panne associé à  $T$  la suite  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  déterminée par  $\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geq n)$ . Si  $T$  est une variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe en panne, la quantité  $\theta_n$  indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant  $n$  alors qu'il est fonctionnel jusque là.

- 1) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta_n \in [0, 1[$ .
- 2) Exprimer en fonction des termes de la suite  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la probabilité  $\mathbb{P}(T \geq n)$ . En déduire que  $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = +\infty$ .
- 3) Inversement, soit  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta_n \in [0, 1[$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = +\infty$ . Montrer que la suite  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire  $T$ .

## TD4 — Familles de variables aléatoires

**Exercice 4.1.** Soit  $p$  un nombre réel. Soient  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de loi :

| $(x, y)$                      | $(0, 0)$ | $(1, 0)$          | $(0, 1)$          | $(1, 1)$          |
|-------------------------------|----------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$ | $p$      | $\frac{1}{3} - p$ | $\frac{1}{2} - p$ | $\frac{1}{6} + p$ |

- 1) À quel intervalle doit appartenir le réel  $p$  pour que le tableau précédent ait un sens ?
- 2) Représenter à l'aide d'un tableau les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
- 3) Calculer les espérances et les écarts-types de  $X$  et  $Y$ , ainsi que leur covariance.
- 4) Montrer qu'il existe une unique valeur de  $p$  pour laquelle les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Donner la valeur de la covariance dans ce cas.
- 5) Toujours pour cette même valeur de  $p$ , déterminer la fonction de masse de  $Z = X + Y$ .

**Exercice 4.2.** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires indépendantes avec  $X \sim \mathcal{B}(p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(q)$ .

- 1) Déterminer la loi de  $Z = \max(X, Y)$ .

Application — Deux archers tirent à tour de rôle et de façon indépendante sur  $n$  cibles, le premier archer a une probabilité  $p$  de toucher sa cible, le second une probabilité  $q$ .

- 2) Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles touchées au moins une fois.
- 3) Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles non touchées.

**Exercice 4.3.** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On pose :

$$I = \min(X, Y) \quad \text{et} \quad S = \max(X, Y).$$

- 1) Que vaut  $\mathbb{P}(I \geq i)$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ? En déduire la fonction de masse de  $I$ .
- 2) Montrer que  $\mathbb{E}[I] = (n+1)(2n+1)/(6n)$  et en déduire l'espérance de  $S$  sans calculer sa loi.
- 3) Les variables  $I$  et  $S$  sont-elles indépendantes ? Donner la fonction de masse du couple  $(I, S)$ .
- 4) Soit  $Z = |X - Y|$ . Calculer l'espérance de  $Z$  et en donner un équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 4.4.** Chaque samedi, Georges fait son marché. Selon l'envie, il décide d'acheter 1, 2 ou 3 concombres avec les probabilités respectives  $1/6$ ,  $1/2$  et  $1/3$ . Il découvre ensuite le prix du concombre, qui varie selon les semaines, et, en été, il vaut 0,90 €, 1,00 € ou 1,10 € avec les probabilités respectives  $1/4$ ,  $1/2$  et  $1/4$ . En moyenne, combien Georges dépense-t-il en concombre chaque semaine ?

**Exercice 4.5.** Le capitaine Flint, croyant son équipage endormi, enterre son coffre de doublons sur la falaise de l'île déserte, puis repère son emplacement en y traînant une grosse pierre en forme de tortue. Malheureusement, le autres l'ont suivi et ont observé son manège. Dans la nuit, chacun des flibustiers revient, à l'insu des autres, et déplace la pierre de sept pieds, soit vers le nord, soit vers le sud, avec la même probabilité. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de pieds dont la pierre se trouve déplacée après le passage de  $n$  pirates (positif vers le nord, négatif vers le sud).

- 1) Calculer  $\mathbb{E}[X]$  et  $\text{Var}(X)$ .
- 2) En discutant selon la parité de l'entier  $n$ , calculer la probabilité pour que la pierre ne se retrouver pas écartée de plus de sept pieds de l'emplacement du coffre.

**Exercice 4.6.** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeur dans  $\mathbb{N}$  et de loi donnée par :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = p, Y = q) = \mathbb{1}_{p \leq q} \frac{c\lambda^q}{p!(q-p)!} e^{-2\lambda}.$$

- 1) Déterminer  $c$  et les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- 2) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 4.7.** Le nombre de gardons pêchés en une journée dans un étang suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 = 2,3$  tandis que le nombre de carpes suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda_2 = 3,7$ .

- 1) Étant donné que la capture des carpes n'influe pas sur celle des gardons et vice-versa, quelle est la loi du nombre de poissons pêchés en une journée ? Calculer la probabilité de pêcher au moins deux poissons.
- 2) Sachant que le quota de carpes est de 10 par jour, quelle est la probabilité de l'atteindre en une journée ?
- 3) Quelle est la probabilité d'atteindre ce quota au moins une journée au cours du mois de juin ?

**Exercice 4.8.** Une rue compte vingt lampadaires. On modélise la durée de vie en mois de chacune des lampes par une variable aléatoire de loi  $\mathcal{G}(p)$  avec  $p \in ]0, 1[$ . Montrer que la durée pendant laquelle tous les lampadaires fonctionnent suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

**Exercice 4.9.** Le nombre de blessés à l'œil par un bouchon de champagne arrivant aux urgences ophtalmologiques la nuit de la Saint-Sylvestre suit une loi de Poisson de moyenne 6. Sachant que les victimes potentielles sont réparties équitablement entre les deux sexes, on note  $X$  le nombre de femmes qui figurent parmi ces éborgnés du Jour de l'An et  $Y$  le nombre d'hommes.

- 1) Établir les lois de probabilité de  $X$  et de  $Y$ .
- 2) Calculer leurs espérances et leurs écarts-types.
- 3) Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

[On suppose que l'interne de garde ne fait pas partie des victimes...]

**Exercice 4.10.** Si  $Z$  est une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$ , on définit la **fonction génératrice** de  $Z$  par :

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad G_Z(q) = \mathbb{E}[q^Z].$$

- 1) Montrer que la fonction génératrice de  $Z$  caractérise la loi de  $Z$ , autrement dit que l'application qui à la loi de  $Z$  associe  $G_Z$  est injective.
- 2) Montrer que  $G_Z$  est deux fois dérivable et exprimer les deux premiers moments de  $Z$  à l'aide des dérivées de  $G_Z$ . En déduire une expression de  $\text{Var}(Z)$ .

Soit  $p \in [0, 1]$  et  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires indépendantes avec  $X \sim \mathcal{B}(m, p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

- 3) Calculer  $G_X$ , puis  $G_{X+Y}$ . En déduire la loi de  $X + Y$ .

On définit aussi la **fonction caractéristique** de  $Z$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}].$$

On admettra que la fonction caractéristique de  $Z$  caractérise la loi de  $Z$ .

- 4) Calculer  $\phi_X$ , puis  $\phi_{X+Y}$ . Retrouver la loi de  $X + Y$ .

**Exercice 4.11.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable  $E$  et  $f: E \rightarrow F$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les variables  $X$  et  $Y = f(X)$  soient indépendantes.