

TD1 — Points, droites et plans

Produit scalaire, produit vectoriel, déterminant

Exercice 1.1. *Identité du parallélogramme.* Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer l'égalité :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

2) Donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 1.2. *Quelques inégalités classiques.*

1) Montrer que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité : $s^2 + t^2 \geq -2st$.

2) Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer l'inégalité de Hadamard dans $\mathbb{R}^2$:

$$|\det(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

3) Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

4) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$:

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

5) En déduire l'inégalité de Minkowski dans $\mathbb{R}^2$:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

6) Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

Exercice 1.3. *Égalité de Lagrange.* Montrer que $\langle u | v \rangle^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.

Exercice 1.4. *Double produit vectoriel et déterminant.* Soit u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que

$$u \wedge (v \wedge w) = \langle u | w \rangle v - \langle u | v \rangle w.$$

2) Montrer que

$$\det(u, v, w) = \det(v, w, u) = \det(w, u, v).$$

3) En déduire une expression simple de $\det(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u)$.

Exercice 1.5. *Orthocentre.* Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 1.6. *Distance à une droite.*

1) On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soit A un point, v un vecteur non nul et $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par v . Si M est un point du plan, on appelle distance de M à la droite $\mathcal{D}$ la norme du vecteur $\overrightarrow{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Montrer que la distance de M à la droite $\mathcal{D}$ est

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, v)|}{\|v\|}.$$

2) Même question dans $\mathbb{R}^3$, avec cette fois

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge v\|}{\|v\|}.$$

Exercice 1.7. *Tétraèdre trirectangle.* Dans $\mathbb{R}^3$, soit $O = (0, 0, 0)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ et $C = (0, 0, c)$. On supposera $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

- 1) Montrer que le projeté orthogonal I de O sur la droite (BC) est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .
- 2) Lorsque c varie, trouver le lieu de I .
- 3) Montrer que le projeté orthogonal H de O sur le plan (ABC) est l'orthocentre du triangle ABC .
- 4) Lorsque c varie, trouver le lieu de H .

Systèmes

Exercice 1.8. Résoudre les systèmes à deux inconnues suivants et interpréter géométriquement les résultats :

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ 3x_1 + x_2 = b \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}; \quad 5) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{cases}.$$

Exercice 1.9. Résoudre les systèmes à trois inconnues suivants et interpréter géométriquement les résultats :

$$1) \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 1 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ -x + 5y - 7z = 2 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} y + 3z = 3 \\ x - y + z = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases}; \quad 6) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = b_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = b_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}; \quad 7) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}; \quad 8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ x_1 + x_2 = b_2 \\ x_2 = b_3 \end{cases}.$$

Exercice 1.10. Déterminer les polynômes P de degré 2 tels que, pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $P(k) = 2^k$.

Exercice 1.11. Résoudre les systèmes à trois inconnues suivants, en discutant suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$1) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = m. \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + y + mz = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases}.$$

Exercice 1.12. Résoudre les systèmes à quatre inconnues suivants et interpréter géométriquement les résultats :

$$1) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z - t = 0 \\ x + y + t = 1 \\ z + t = 4 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ 3x - y - z + t = 1 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}.$$

Exercice 1.13. Résoudre les systèmes à n équations et n inconnues :

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_2 + \cdots + x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ z_n + z_1 = 2a_n \end{cases}.$$

Droites et plans

Exercice 1.14. Donner une équation cartésienne de la droite de $\mathbb{R}^2$ définie par la représentation paramétrique :

- 1) $x = 3 + 2t, y = 1 - t, t \in \mathbb{R}$.
- 2) $x = 4 - 3t, y = 8 - t, t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.15. Donner une représentation paramétrique de la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne :

- 1) $2x - 3y = 4$.
- 2) $5x + y = 0$.

Exercice 1.16. Trouvez une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan :

- 1) passant par $A = (-1, -4, 1)$ et de vecteur normal $u = (5, -2, 5)$;

- 2) passant par $B = (0, 0, 1)$ et de vecteur normal $v = (1, 5, 1)$;
- 3) passant par $P = (3, 1, 1)$ et perpendiculaire à la droite (CD) où $C = (1, 0, 5)$ et $D = (3, -3, 8)$;
- 4) passant par $Q = (2, 1, 4)$ et perpendiculaire à la droite (EF) où $E = (2, 2, 2)$ et $F = (3, 1, 1)$;
- 5) passant par $G = (-1, 2, 1)$, $H = (1, -6, -1)$ et $I = (2, 2, 2)$ (on aura vérifié préalablement que les trois points ne sont pas alignés).

Exercice 1.17. *Intersection de plans.*

- 1) Soit P_1 et Q_1 les plans d'équations cartésiennes respectives $2x + 3y - z + 2 = 0$ et $x + y - 2z + 5 = 0$. Montrer que ces deux plans se croisent en une droite dont on déterminera une représentation paramétrique.
- 2) Même question avec les plans P_2 et Q_2 d'équations cartésiennes respectives $x + y + z = 0$ et $-x + 2y + 3z - 1 = 0$.

Exercice 1.18. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $A = (2, 0, 1)$ et dirigée par le vecteur $u = (1, 1, 3)$.

- 1) Donner une représentation paramétrique de D .
- 2) Donner une équation cartésienne de D .
- 3) Donner une équation cartésienne du plan P contenant D et $C = (1, 1, 1)$.
- 4) Même exercice avec la droite passant par $B = (1, 0, 0)$ et dirigée par $v = (1, 2, 3)$.

Exercice 1.19. Soit P le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + s \\ z = 2t - s \end{cases} \quad \text{avec } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Vérifier que P est un plan que l'on décrira géométriquement.
- 2) Vérifier que l'origine $O = (0, 0, 0)$ et $A = (3, 5, 1)$ appartiennent à P .
- 3) Donner une équation cartésienne de P et déterminer un vecteur normal à P .
- 4) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire à P .

Exercice 1.20. Dans $\mathbb{R}^2$, trois points A , B et C non alignés se projettent orthogonalement en A' , B' et C' sur une droite $\mathcal{D}$. Montrer que les perpendiculaires à (BC) , (CA) et (AB) passant respectivement par A' , B' et C' sont concourantes.

TD2 — Applications linéaires dans le plan et l'espace

Projections orthogonales

Exercice 2.1. Soit $v = (-3, 4) \in \mathbb{R}^2$ et p la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}v$.

- 1) Pour tout $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer explicitement $p(w)$
- 2) Quel est l'image par p de la droite $D' = \mathbb{R}v'$ où $v' = (1, 2)$.
- 3) Quelle est l'image par p du cercle unité $S = \{u \in \mathbb{R}^2 ; \|u\| = 1\}$.

Exercice 2.2. Soit $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application qui à tout vecteur $w = (x, y)$ associe $p(w) = (x', y')$ donné par $x' = (x - y)/2$ et $y' = (y - x)/2$.

- 1) Montrer que p est une projection orthogonale sur une droite que l'on précisera.
- 2) Soit maintenant $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (x - y, -x + y)$. Montrer que $f = g \circ h$ où g et h sont deux applications élémentaires du plan que l'on précisera.
- 3) Quelle est l'image par p du segment $I = \{v \in \mathbb{R}^2 ; \exists t \in [0, 1], v = te\}$ où $e = (1, 2)$.

Exercice 2.3. Soit P le plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$ et Π la projection orthogonale sur P .

- 1) Pour tout $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer explicitement $\Pi(w)$
- 2) Soit $a = (1, 1, 1)$. Quelle est l'image par Π de la droite $D = \mathbb{R}a$.

Exercice 2.4. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application qui à tout vecteur $w = (x, y, z)$ associe $f(w) = (x', y', z')$ donné par $x' = (2x - y + z)/3$, $y' = (-x + 2y + z)/3$ et $z' = (x + y + 2z)/3$.

- 1) Montrer que f est une projection orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques.
- 2) Soit Q le plan d'équation $x + y + 2z = 0$. Quelle est l'image de Q par f .

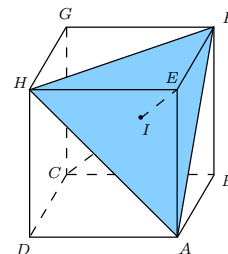
Exercice 2.5. Soient u et v deux vecteurs non nul de $\mathbb{R}^3$. À quelle condition sur u et v le projeté orthogonal de u sur la droite $\mathbb{R}v$ est-il égal au projeté orthogonal de v sur la droite $\mathbb{R}u$?

Bases et coordonnées

Exercice 2.6. Dans $\mathbb{R}^3$, soit P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Donner une base orthonormée du plan P .

Exercice 2.7. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1 comme sur la figure.

- 1) Montrer que la grande diagonale (CE) rencontre le triangle AHF en son centre I , et que l'on a $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.
- 2) Montrer de plus que la droite (CE) est orthogonale au plan (AHF) .
- 3) Montrer que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IG})$ est une base orthonormée et préciser son orientation.
- 4) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{EC}$ et de $\overrightarrow{AE}$ dans la base $\mathcal{B}$.



Exercice 2.8. *Coordonnées polaires.* Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Si $u = (x, y)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, on note

$$\rho = \|u\| \text{ et } \theta \text{ l'angle orienté } (e_1, u).$$

Si $u = (0, 0)$, on prend $\rho = 0$ et θ quelconque. Le couple (ρ, θ) est appelé coordonnées polaires de u .

- 1) Représenter u et (ρ, θ) sur un dessin.
- 2) Calculer (x, y) en fonction de (ρ, θ) .

Exercice 2.9. Soit A un point du plan, de coordonnées polaires (l, α) . Montrer que le cercle de diamètre $[OA]$ a pour équation polaire

$$\rho = l \cos(\theta - \alpha).$$

Exercice 2.10. *Coordonnées cylindriques.* Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ et π la projection orthogonale sur le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2 . Si $u \notin \mathbb{R}e_3$, on note

$$\rho = \|\pi(u)\| \text{ et } \theta \text{ l'angle orienté } (e_1, \pi(u)).$$

Si $u \in \mathbb{R}e_3$, on prend $\rho = 0$ et θ quelconque. Le triplet (ρ, θ, z) est appelé coordonnées cylindriques de u .

- 1) Représenter u et (ρ, θ, z) sur un dessin en perspective.
- 2) Calculer (x, y, z) en fonction de (ρ, θ, z) .

Exercice 2.11. *Coordonnées sphériques.* Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ et π la projection orthogonale sur le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2 . Si $u \notin \mathbb{R}e_3$, on note

$$r = \|u\|, \theta \text{ l'angle orienté } (e_1, \pi(u)) \text{ et } \varphi \text{ l'angle non orienté } (e_3, u).$$

Si $u \in \mathbb{R}e_3$, θ est quelconque. Si, de plus, $u = (0, 0, 0)$, φ est également quelconque. Le triplet (r, θ, φ) est appelé coordonnées sphériques de u .

- 1) Représenter u et (r, θ, φ) sur un dessin en perspective.
- 2) Calculer (x, y, z) en fonction de (r, θ, φ) .

Applications linéaires du plan

Exercice 2.12. Soit $u = (1, 0)$ et $v = (1, 1)$. Soit p la projection sur $\mathbb{R}u$ parallèlement à $\mathbb{R}v$ et q la projection sur $\mathbb{R}v$ parallèlement à $\mathbb{R}u$.

- 1) Donner les matrices de p et de q .
- 2) Que vaut $p \circ p$? Le vérifier par le calcul.
- 3) Pour $w \in \mathbb{R}^2$, calculer $p(w) + q(w)$. Étonnant?
- 4) Quel est l'ensemble des vecteurs ayant pour image u par p ?

Exercice 2.13. Soit r la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle $2\pi/3$.

- 1) Donner la matrice de r .
- 2) Que vaut $r \circ r \circ r$? Le vérifier par le calcul.
- 3) Pour $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\|r(w)\|$. Étonnant?
- 4) Déterminer l'image de la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$ par r .

Exercice 2.14. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application qui à tout vecteur $w = (x, y)$ associe le vecteur $f(w) = (x', y')$ donné par $x' = (-3x + 4y)/5$ et $y' = (4x + 3y)/5$.

- 1) Déterminer l'ensemble des vecteurs $w \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(w) = w$.
- 2) Calculer $f \circ f$.
- 3) Décrire f géométriquement.
- 4) Soit $u = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Déterminer v de sorte que $\mathcal{B} = (u, v)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.
- 5) En notant $(\tilde{x}, \tilde{y})$ les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$, calculer, en fonction de $(\tilde{x}, \tilde{y})$, les coordonnées $(\tilde{x}', \tilde{y}')$ de $f(w)$ dans la base $\mathcal{B}$. Était-ce prévisible?

Exercice 2.15. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application qui à tout vecteur $w = (x, y)$ associe le vecteur $f(w) = (x', y')$ donné par $x' = (x - y)/\sqrt{2}$ et $y' = (x + y)/\sqrt{2}$.

- 1) Déterminer l'ensemble des vecteurs $w \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(w) = w$.
- 2) Décrire f géométriquement.

Exercice 2.16. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit $u = (3, 1)$ et D_1 la droite $\mathbb{R}u$. Soit s la réflexion d'axe D_1 .

- 1) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $s(x, y) = (x', y')$ avec $x' = (4x + 3y)/5$ et $y' = (3x - 4y)/5$.
Soit $v = (-2, 1)$ et D_2 la droite $\mathbb{R}v$. Soit p la projection sur D_1 parallèlement à D_2 .
- 2) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $p(x, y) = (x', y')$ avec $x' = (3x + 6y)/5$ et $y' = (x + 2y)/5$.

Soit $f = p \circ s$.

3) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $f(x, y) = (x', y')$ avec $x' = (6x - 3y)/5$ et $y' = (2x - y)/5$.

4) Montrer que l'ensemble des vecteurs $w \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(w) = w$ est une droite vectorielle D_3 dont on donnera un vecteur directeur.

5) Montrer que l'ensemble des vecteurs $w \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$ est une droite vectorielle D_4 dont on donnera un vecteur directeur.

6) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f \circ f(x, y)$.

7) Décrire f géométriquement.

8) Représenter graphiquement les droites D_1, D_2, D_3, D_4 , ainsi que l'ensemble $s(D_2)$.

9) Montrer, par le calcul, que $s(D_2) = D_4$.

Exercice 2.17. Soit p une projection sur une droite vectorielle parallèlement à une autre droite vectorielle. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si, pour tout $w \in \mathbb{R}^2$, $\|p(w)\| \leq \|w\|$.

Exercice 2.18. *Droite d'Euler.* Soit A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

1) En notant I le milieu du segment $[BC]$, montrer que $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

2) Montrer que, dans le triangle ABC , le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité O et l'orthocentre sont alignés.

Exercice 2.19. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et r la rotation de centre $O = (0, 0)$ et d'angle α .

1) Montrer que l'image $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ par r est une droite, dont on précisera une équation.

2) Calculer les distances de O à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

3) Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 2.20. Soit u et v deux vecteurs non nuls du plan. Soit s_u et s_v les symétries orthogonales respectives par rapport à $\mathbb{R}u$ et $\mathbb{R}v$. Déterminer $s_v \circ s_u$.

TD3 — Suites récurrentes

3.1 Raisonnement par récurrence

Exercice 3.1. Calculer explicitement les suites définies ci-dessous. Étudier leur convergence.

$$1) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases} ; 2) \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases} ; 3) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n^2 + \frac{5}{2}u_n + 1 \end{cases} ; 4) \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \end{cases} .$$

Exercice 3.2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, on définit $x * y = x - \frac{1}{y}$. Que vaut

$$2 * (2 * (2 * \dots * (2 * 2) \dots))$$

quand le symbole $*$ apparaît n fois ?

Exercice 3.3. On considère, pour tout $n \geq 1$, le polynôme

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \dots + \frac{X(X+1) \cdots (X+n-1)}{n!}.$$

- 1) Factoriser P_1, P_2 et P_3 .
- 2) Pour tout $n \geq 1$, factoriser P_n .

Exercice 3.4. *Récurrence...* Démontrer les résultats suivants par récurrence.

- 1) Pour tout $n \geq 0$, $2^n \geq n + 1$.
- 2) Pour tout $n \geq 4$, $2^n \leq n!$.
- 3) Pour tout $n \geq 1$, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
- 4) Pour tout $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 5) Pour tout $n \geq 1$,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

- 6) La dérivée $(2n)^e$ de $x \mapsto \sin(2x)$ est $x \mapsto (-4)^n \sin(2x)$.
- 7) Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour tout $n \geq 1$, f est n fois dérivable et $f^{(n)}: x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
- 8) Le nombre $n^2 + n + 2$ est toujours pair.
- 9) La suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{-u_n}$ a tous ses termes compris entre 0 et 1.
- 10) Pour tout $n \geq 0$, n droites dans le plan déterminent au maximum $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ régions.

Exercice 3.5.

- 1) Montrer que, pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}.$$

- 2) Montrer que

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

quand le 2 apparaît n fois dans le membre de gauche.

- 3) En déduire la forme exponentielle de

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Exercice 3.6. On considère la suite u définie par : pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{n^n}{n!}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

et en déduire la monotonie de la suite u .

2) Montrer l'inégalité de Bernoulli : pour tout $x \geq -1$ et $n \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

3) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

4) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

5) Montrer que, pour tout $n \geq 6$,

$$2^n \leq \frac{n^n}{n!} \leq e^n.$$

6) Étudier la convergence des suites de terme général $\frac{n^n}{n!}$ et $\frac{n!}{a^n}$, où $a > 1$.

Exercice 3.7. Colorations de graphes. Un graphe (simple) est un ensemble de sommets reliés par des arêtes. On dit que deux sommets sont *voisins* s'ils sont reliés par une arête. On appelle *coloration* d'un graphe un choix de couleur pour chaque sommet de telle sorte que deux sommets voisins soient toujours de couleurs différentes. Enfin, on appelle degré d'un sommet le nombre de ses voisins.

Montrer que, si le degré maximal d'un graphe G est d , alors il existe une coloration de G avec $d+1$ couleurs. [Indication : par récurrence sur le nombre de sommets n de G .]

3.2 Suites élémentaires

Exercice 3.8. Qui est le plus grand :

$$2017 \cdot (1 + 2 + \cdots + 2018) \quad \text{ou} \quad 2018 \cdot (1 + 2 + \cdots + 2017) \quad ?$$

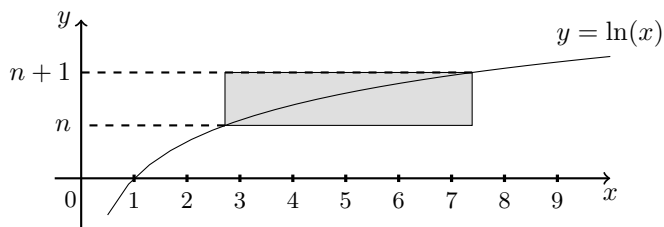
Exercice 3.9. Autour des suites géométriques.

1) $u_n = \frac{e^{(n+3)^2}}{e^{n^2}}$ est-il le terme général d'une suite géométrique ?

2) $v_n = 2 + (2 + 2^2 + \cdots + 2^n)$ est-il le terme général d'une suite géométrique ?

3) La suite des aires ci-contre est géométrique. Vrai ou faux ?

4) Que vaut $3,777\ 77\ldots$?



Exercice 3.10. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n \sin(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \cos(k\theta).$$

Exercice 3.11. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On considère la suite complexe définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n a.$$

1) Pour $a = 1 + i\sqrt{3}$, représenter z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 .

2) Pour quels $n \in \mathbb{N}$ les points $0, z_0$ et z_n sont-ils alignés ?

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|.$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 3.12. *Réurrence homographique (1).* On considère la suite u définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

- 1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $1 \leq u_n < 2$.
- 2) Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique.
- 3) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

Exercice 3.13. *Réurrence homographique (2).* On considère une suite complexe u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{6 + u_n}{2 + u_n}.$$

- 1) Montrer qu'il existe deux valeurs α et β de u_0 pour lesquelles la suite u est constante.
- 2) Montrer que, si $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$, alors, pour tout $n \geq 0$, $u_n \notin \{\alpha, \beta\}$.
- 3) Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique.
- 4) Étudier la convergence de la suite u .

Exercice 3.14. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite de terme général $v_n = \ln(u_n)$ est une suite arithmético-géométrique.
- 2) En déduire une expression explicite de u .
- 3) Étudier la convergence de la suite u .
- 4) Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n > 3,96$?

Exercice 3.15. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite de terme général $v_n = 4u_n - 6n + 15$ est une suite géométrique.
- 2) En déduire que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{19}{4} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{6n - 15}{4}.$$

- 3) Pour tout $n \geq 0$, calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 3.16. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère les suite u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n. \end{cases}$$

- 1) En considérant les suites $x = u + v$ et $y = u - v$, calculer explicitement, pour tout $n \geq 0$, u_n et v_n en fonction de n , a et b .
- 2) En déduire les limites des suites u et v .

Exercice 3.17. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = \alpha \\ u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n. \end{cases}$$

- 1) Montrer qu'il existe deux suites géométriques de raisons différentes et non nulles v et w qui satisfont la relation de récurrence

$$x_{n+2} = \frac{5}{2}x_{n+1} - x_n.$$

- 2) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $s = av + bw$ satisfait également la relation de récurrence $s_{n+2} = \frac{5}{2}s_{n+1} - s_n$.
- 3) Montrer qu'il existe a et b tels que $s = av + bw$ satisfasse $s_0 = u_0$ et $s_1 = u_1$.
- 4) En déduire une formule explicite de u .
- 5) En déduire la limite de u .

TD4 — Suites convergentes

4.1 Limites

Exercice 4.1. Parmi les suites suivantes, quelles sont celles qui sont convergentes ? Quelle est dans ce cas leur limite ?

- 1) $u_n = (-1)^n$; 2) $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$; 3) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}$; 4) $u_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$; 5) $u_n = \frac{an^2+bn+c}{n+1}$; 6) $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{3n}\right)$;
7) $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$; 8) $u_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$; 9) $u_n = \tan\left(\frac{n\pi}{4n+1}\right)$; 10) $u_n = \tan\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$; 11) $u_n = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$.

Exercice 4.2. À l'aide d'un encadrement, montrer que les trois suites suivantes convergent :

- 1) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^3+k^2}$; 2) $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; 3) $w_n = \frac{1!+2!+\dots+n!}{(n+1)!}$.

Exercice 4.3. Soit deux suites réelles u et v à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $u_n v_n \rightarrow 1$. Montrer que u et v convergent vers 1.

Exercice 4.4. Soit u une suite réelle telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall k \geq 1 \quad 0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 4.5. Soit u une suite positive décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On suppose que S est convergente. Montrer que

$$nu_n \rightarrow 0.$$

Exercice 4.6. Soit u et v deux suites réelles convergentes. Montrer que $u+v$ et $u \cdot v$ sont convergentes.

Exercice 4.7. Soit u une suite réelle. On suppose que $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$. Montrer que $u_n^n \rightarrow 0$.

Exercice 4.8. Soit x une suite strictement positive et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \ell.$$

- 1) Si $\ell < 1$, montrer que $x_n \rightarrow 0$.
- 2) Si $\ell > 1$, montrer que $x_n \rightarrow +\infty$.
- 3) Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Exercice 4.9. *Théorème de Cesàro.* Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite complexe. On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

- 1) Montrer que, si u est convergente, alors v est convergente.
- 2) Montrer que la réciproque est fautive.
- 3) Montrer que, si u est monotone et v convergente, alors u est convergente.
- 4) Application : si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite complexe telle que $x_{n+1} - x_n \rightarrow \ell$, alors $\frac{x_n}{n} \rightarrow \ell$.

4.2 Suites monotones

Exercice 4.10. Soit $a \in]0, 1[$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = (1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^n).$$

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$1+x \leq e^x.$$

2) Montrer que u est convergente.

Exercice 4.11. Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme $P_n = X^n + X - 1$.

1) Montrer que P_n admet une unique racine positive que l'on notera u_n .

2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n < 1$.

3) Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

4) Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

Exercice 4.12. *Moyenne arithmético-géométrique.* Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et les deux suites u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < v_n$.

2) Montrer que u est strictement croissante et v strictement décroissante.

3) En déduire que u et v sont convergentes et ont même limite. Cette limite est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de Gauss des nombres a et b .

Exercice 4.13. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et les deux suites u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < v_n$.

2) Montrer que u est strictement croissante et v strictement décroissante.

3) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad u_p < v_q$.

4) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$.

5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n v_n = ab$.

6) En déduire la limite de la suite u .

Exercice 4.14. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n.$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

Exercice 4.15. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Montrer que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et en déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 4.16. Soit $a > 0$. Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$.

2) Montrer que si u admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = 2$. [*Indication : on pourra effectuer un passage à la limite dans la définition par récurrence de la suite u .*]

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1} - 2) = \frac{u_n - 2}{(u_{n+1} + 2)}$.

4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.

5) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - 2|$.

6) En déduire la limite de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.17. *Méthode de Héron.* On définit la suite x par

$$\begin{cases} x_0 = \frac{5}{2} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right). \end{cases}$$

Montrer que $u_n \rightarrow \sqrt{5}$.

Exercice 4.18. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite u par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+1)}{2}. \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite u en fonction de a .

Exercice 4.19. Que vaut

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} \quad ?$$

TD5 — Approximation

Exercice 5.1. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général :

- 1) $a_n = (n - 10^{10} \ln(n))(1 + 10^{-10} \ln(\ln(n)))$; 2) $b_n = \frac{an^2 + bn + c}{n+1}$; 3) $c_n = a^n + n^a$; 4) $d_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n+1}$;
 5) $e_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 5^n}$; 6) $f_n = \frac{2^n + n!}{\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + e^n}}$; 7) $g_n = (n + 3 \ln(n))e^{-(n+1)}$; 8) $h_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}}$;
 9) $i_n = \frac{n^2 - \sqrt{n^5 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}$; 10) $j_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; 11) $k_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; 12) $l_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$;
 13) $m_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$; 14) $p_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$; 15) $q_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$;
 16) $r_n = \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$; 17) $s_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$; 18) $t_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$; 19) $u_n = \sum_{k=0}^n k!$.

Exercice 5.2. On considère une suite réelle u et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \rightarrow \ell$. A-t-on $u_n^n \sim \ell^n$?

Exercice 5.3. Déterminer un équivalent de la suite u définie par : pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right).$$

Exercice 5.4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Étudier la suite complexe z définie par

$$\begin{cases} z_0 = \alpha \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|). \end{cases}$$

Exercice 5.5. *Intégrales de Wallis.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx.$$

- 1) Montrer que la suite W est strictement positive et décroissante.
- 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- 3) Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$.
- 4) Donner l'expression de W_n en fonction de n (on distinguera n pair et n impair).
- 5) Montrer que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 5.6. Soit S la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- 2) Étudier la limite de la suite S .
- 3) Montrer que la suite de terme général $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ est convergente.
- 4) Donner un équivalent simple de S_n .

Exercice 5.7. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = 2^n - 3u_n. \end{cases}$$

Pour quelle valeurs de a la suite u est-elle croissante ?

Exercice 5.8. Soit u une suite réelle décroissante telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

- 1) Montrer que $u_n \rightarrow 0^+$.
- 2) Donner un équivalent simple de u_n .

Exercice 5.9. On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \cdot \frac{1+2u_n}{1+3u_n}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que $u_n \rightarrow 0$.
- 2) Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \rightarrow 1$.
- 3) En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de u .

Exercice 5.10. Soit $a > 0$. On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que $u_n \rightarrow +\infty$.
- 2) Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$.
- 3) Montrer que $u_{n+1} - u_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
- 4) En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de u_n .

Exercice 5.11.

- 1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'équation $x - \ln(x) = n$ admet une unique solution u_n dans $[1, +\infty[$.
- 2) Montrer que $u_n \rightarrow +\infty$.
- 3) Montrer que $u_n = n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 5.12. Montrer que

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} \sim \sqrt{n}$$

et donner un équivalent simple de $u_n - \sqrt{n}$.

TD6 — Espaces vectoriels

6.1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 6.1. Soit E un K -espace vectoriel. Montrer les propriétés suivantes.

- 1) Pour tout $x \in E$, $0 \cdot x = 0_E$.
- 2) Pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
- 3) Pour tout $\lambda \in K$ et $x \in E$, $\lambda \cdot x = 0_E$ entraîne $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
- 4) Pour tout $x \in E$, l'opposé de x est $(-1) \cdot x$.
- 5) La commutativité de l'addition est conséquence des sept autres axiomes d'espace vectoriel.

Exercice 6.2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? 1) $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + y = 0\}$. 2) $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + y = 1\}$. 3) $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 0\}$. 4) $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = e^x - 1\}$.

Exercice 6.3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? 1) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y = 0\}$. 2) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; xy = 0\}$. 3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = x + y\}$. 4) $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y = x^2\}$. 5) $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x, y \text{ et } z \text{ sont irrationnels}\}$. 6) $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y = z \text{ et } z = 4x\}$. 7) $F_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = x \text{ et } y = 0\}$. 8) $F_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = x \text{ et } y = 1\}$. 9) $F_9 = \{(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \beta) ; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$. 10) $F_{10} = \{(2\alpha + 3\beta, \beta - \alpha, 7\beta) ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 6.4. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

- 1) $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(0) = P'(0) = 0\}$.
- 2) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(0) = P(1) = 0\}$.
- 3) $F_3 = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] ; \text{le degré de } P \text{ est inférieur ou égal à } n\}$.
- 4) $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] ; \text{le degré de } P \text{ est égal à } n\}$.

Exercice 6.5. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

- 1) $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; u_0 = u_3 = 0\}$.
- 2) $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; u_5 = 1\}$.
- 3) $F_3 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; u \text{ est arithmétique}\}$.
- 4) $F_4 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; u \text{ est géométrique}\}$.
- 5) $F_5 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; u \text{ est bornée}\}$.

Exercice 6.6. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$?

- 1) $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) ; f \text{ est solution de } f'' = f\}$.
- 2) $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) ; f \text{ solution de } f'' = f + 1\}$.
- 3) $F_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) ; f \text{ solution de } f' = f^2\}$.

Exercice 6.7. Soit E un K -espace vectoriel.

- 1) Montrer que, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) Montrer que, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 3) Montrer que, si $(v_1, v_2, \dots, v_r) \in E^r$, alors $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_r$.

Exercice 6.8. Soit E un K -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- 1) On suppose qu'il existe un élément a de F qui n'est pas dans G et un élément b de G qui n'est pas dans F . Trouver un élément de E qui n'appartient pas à $F \cup G$.
- 2) Montrer que, pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E , il faut et il suffit que ou bien $F \subset G$, ou bien $G \subset F$.

6.2 Familles de vecteurs

Exercice 6.9. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (-4, 4, 3)$, $v = (-3, 2, 1)$, $w = (-1, 2, 2)$, $x = (-1, 6, 7)$ et $y = (0, 4, 5)$. Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w, x, y)$.

Exercice 6.10. Donner une équation cartésienne des sous-espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants.

- 1) $(2, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
- 2) $(1, 3, 3)$ et $(2, -1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 3) $(2, 1, 0, 4)$ et $(4, 1, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6.11. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Lorsque ce n'est pas le cas, décrire géométriquement le sous-espace vectoriel engendré et en donner une équation cartésienne.

- 1) $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, -1, 0)$ et $w = (0, 0, 2)$.
- 2) $u = (1, 1, 1)$, $v = (3, 0, -1)$ et $w = (-1, 1, -1)$.
- 3) $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (2, 2, -2)$.

Exercice 6.12. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

- 1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3 , puis avec v_2 et v_3 .
- 2) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 6.13. Soient, dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2, 0, -3)$ et $v = (-6, 1, 9)$.

- 1) Montrer que la famille (u, v) est libre.
- 2) Trouver un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
- 3) Existe-t-il $m \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $x = (-1, -1, m)$ soit une combinaison linéaire des vecteurs u et v ?
- 4) Reprendre l'exercice avec $u = (2, -4, 7)$ et $v = (-1, 2, 3)$.

Exercice 6.14. Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous, dire s'il s'agit d'une famille libre, et s'il s'agit d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- 1) (u, v) avec $u = (1, 0, 2)$ et $v = (-2, 3, 1)$.
- 2) (u, v, w) avec $u = (1, -2, 3)$, $v = (4, 1, 2)$ et $w = (-3, 2, 2)$.
- 3) (u, v, w, x) avec $u = (4, 2, 3)$, $v = (0, 2, 1)$, $w = (2, 2, -1)$ et $x = (3, 1, 2)$.

Exercice 6.15. Dans $\mathbb{R}[X]$, le vecteur $P = 3X^3 - 2X^2 - 4X$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $P_1 = 1$, $P_2 = (X + 1)^2$ et $P_3 = X^3$? Plus généralement, décrire $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.

Exercice 6.16. Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ ci-dessous, dire s'il s'agit d'une famille libre, et s'il s'agit d'une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

- 1) $(3X, X^2 - 1, X^3)$; 2) $(X + 1, X - 1)$; 3) $(X^2 - 1, 2X^2 + 1, X^2 + X)$.

Exercice 6.17. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la famille $((n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n!)_{n \in \mathbb{N}})$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 6.18. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 0, 0)$, $v = (1, 2, 0, 0)$, $w = (1, 2, 3, 0)$ et $x = (1, 2, 3, 4)$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w, x)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- 2) Donner les coordonnées du vecteur $(1, -1, 1, -1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
- 3) Reprendre l'exercice avec $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1, 0)$, $w = (1, 0, 0, 1)$ et $x = (0, 0, 1, 1)$.

Exercice 6.19. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $u = (9, 22, 7, 4)$, $v = (1, 2, -1, -4)$, $w = (-2, -3, 6, 18)$ et $x = (3, 7, 1, -2)$. On considère $F = \text{Vect}(u, v, w, x)$.

- 1) Donner une base de F .
- 2) Donner les coordonnées dans cette base de chacun des vecteurs u, v, w et x .

TD7 — Dimension

7.1 Théorème de la dimension

Exercice 7.1. Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

- 1) Une famille libre de $\mathbb{R}^3$ est toujours une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ est composée d'au moins 3 vecteurs.
- 3) Une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est toujours une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- 4) Une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est toujours une famille libre.
- 5) La famille formée des 3 vecteurs $(1, 1, 0)$, $(2, -1, 2)$ et $(1, 3, -2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.2. Voici quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) La famille (u, v, w) est-elle libre ? Génératrice ?
- 2) La famille (u, v) est-elle libre ? Génératrice ?
- 3) La famille (u, v, w, x) est-elle libre ? Génératrice ?
- 4) La famille (u, v, x) est-elle libre ? Génératrice ?

Exercice 7.3. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(a + 2b, 2a + 2b + 2c, 3a + 2b + 4c, 4a + 6b + 4c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- 2) Déterminer une base de F , et en déduire sa dimension.

Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + z - 2t = 0 \quad \text{et} \quad y - z + 3t = 0\}.$$

- 3) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- 4) Déterminer une base de G , et en déduire sa dimension.
- 5) Déterminer $F \cap G$, en donner une base et sa dimension.
- 6) Déterminer $F + G$, en donner une base et sa dimension.

Exercice 7.4.

- 1) « Toute famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ contient au plus 3 vecteurs. » Vrai ou faux ? On justifiera la réponse.
- 2) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $(1, 1 + X, 1 + X + X^2)$ est-elle libre ? Génératrice ?

Exercice 7.5. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4.

- 1) Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$.
- 2) On choisit P_0 de degré 0, P_1 de degré 1, ..., P_4 de degré 4. Montrer que la famille $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
- 3) On considère $Q_0(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$, $Q_1(X) = X(X - 2)(X - 3)(X - 4)$, $Q_2(X) = X(X - 1)(X - 3)(X - 4)$, $Q_3(X) = X(X - 1)(X - 2)(X - 4)$ et $Q_4(X) = X(X - 1)(X - 2)(X - 3)$. Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
- 4) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.

7.2 Sommes directes

Exercice 7.6. Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - z = 0\}$.

- 1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Soit $f_1 = (0, 1, 0)$ et $f_2 = (1, 0, 1)$. Montrer que (f_1, f_2) est une famille génératrice de H .
- 3) Donner une base de H et en déduire sa dimension.
- 4) Soit $a = (1, 0, -1)$ et D la droite engendrée par a . Montrer que $H \oplus D = \mathbb{R}^3$.

Exercice 7.7. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 3x - 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 3y - z = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 3y + z = 0\}.$$

- 1) Trouver des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E_1 et E_2 respectivement.
- 2) En déduire que $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$.

Exercice 7.8. On considère les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(\alpha + 3\beta - 3\gamma, -\alpha + \beta - 5\gamma, 2\alpha + 3\beta) \in \mathbb{R}^3 ; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}, \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 6y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}, \\ H &= \{\lambda(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 ; \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- 1) Montrer que F , G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.
- 3) Déterminer une base de G et en déduire sa dimension.
- 4) Déterminer une base de H et en déduire sa dimension.
- 5) Identifier les ensembles $F \cap G$, $F \cap H$, et $G \cap H$ (on pourra donner un système d'équations de F et de H).
- 6) Que peut-on dire des sommes $F + G$, $F + H$ et $G + H$? Quelles sont les dimensions de $F + G$, de $F + H$ et de $G + H$?

Exercice 7.9. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4.

- 1) Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$.
- 2) Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes pairs, c'est-à-dire

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] ; P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

- 3) Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ défini par

$$G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] ; P(X) = XP'(X)\},$$

où P' désigne la dérivée du polynôme P . Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de G et en déduire sa dimension.

- 4) Déterminer $F \cap G$. Que peut-on dire du sous-espace vectoriel $F + G$?

Exercice 7.10. On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère les ensembles

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] ; P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(1 - X, X - X^2, X^2 - 1).$$

- 1) Donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et sa dimension.
- 2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner une base de F .
- 3) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner une base de G .
- 4) Montrer que F et G sont en somme directe.
- 5) En notant $H = F \oplus G$, calculer la dimension de H . En déduire que $H \neq \mathbb{R}_3[X]$.
- 6) Montrer que, si $P \in H$, alors $P(1) = 0$.
- 7) En déduire un polynôme $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ qui n'appartienne pas à H .
- 8) Montrer que H et $\text{Vect}(Q)$ sont en somme directe.

Exercice 7.11. Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère G (resp. H) le sous-ensemble des fonctions paires (resp. impaires). Montrer que G et H sont deux sous-espaces vectoriels de E et que $G \oplus H = E$.

TD8 — Régularité des fonctions

8.1 Limites

Exercice 8.1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admette une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

8.2 Fonctions continues

Exercice 8.2. *Fonctions additives.* Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

- 1) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(rx) = rf(x)$.
- 2) On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est une fonction linéaire.

Exercice 8.3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- 1) On suppose ici que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Montrer que f s'annule.
- 2) On suppose ici que f est décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 8.4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq |f(x_0)|.$$

8.3 Fonctions dérivables

Exercice 8.5. *Calcul de limites.*

- 1) La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$ est-elle continue ?
- 2) La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x|x|$ est-elle dérivable ?
- 3) La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\sqrt{|x|})$ est-elle dérivable ?
- 4) Montrer que la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto x \ln(x)$ est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement par continuité en 0.
- 5) La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{\ln(1+x) - x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
- 6) La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\cos(2x) - 1}{x^3 + 5x^2}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
- 7) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$: $x^{-(n+1)} \left(e^x - \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 8.6. Soit $f:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que f est une bijection de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.
- 3) Soit $x \in]0, \pi[$ et $y = f(x)$. Montrer que $g = f^{-1}$, la bijection réciproque de f , est dérivable en y et que

$$g'(y) = \frac{\sin^2(x)}{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}.$$

- 4) En déduire que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$.
- 5) On considère maintenant $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $h(y) = g(y) + g(1/y)$. Calculer $h(1)$ et $h(-1)$.
- 6) Montrer que h est dérivable et calculer la dérivée de h .
- 7) Montrer que, pour tout $y > 0$, $h(y) = \frac{\pi}{2}$ et, pour tout $y < 0$, $h(y) = \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 8.7. Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^4 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$.

- 1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera $\tilde{f}$ son prolongement par continuité en 0.
- 2) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable.
- 3) Montrer que $\tilde{f}'$ est continue.
- 4) Montrer que $\tilde{f}$ a un minimum en 0, mais n'est monotone sur aucun intervalle de la forme $[0, \alpha]$, avec $\alpha > 0$.

Exercice 8.8. Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = e^{-1/x^2}$.

- 1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera $\tilde{f}$ son prolongement par continuité en 0.
- 2) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable.
- 3) Montrer que $\tilde{f}'$ est continue.
- 4) Montrer que $\tilde{f}$ est infiniment dérivable.

Exercice 8.9. Étudier la fonction donnée par $f: x \mapsto (4x^2 - 3x + 2)/(2x + 1)$. On précisera notamment les droites asymptotes et les tangentes horizontales à la courbe représentative de f .

Exercice 8.10. Qui est le plus grand : e^π ou π^e ?

Exercice 8.11. *Racines du polynôme dérivé.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. On suppose que toutes les racines (complexes) de P sont réelles, et on s'intéresse aux racines de P' .

- 1) On suppose ici que $P = (X - a)(X - b)$ avec $a < b$. Déterminer la ou les racines complexes de P' .
- 2) On suppose ici que $P = (X - a)^2(X - b)$ avec $a < b$. Déterminer la ou les racines complexes de P' .
- 3) On suppose ici que $P = (X - a)X(X - b)$ avec $a < 0 < b$. Montrer que P' admet deux racines x_- et x_+ vérifiant $\frac{2a}{3} < x_- < \frac{a}{3}$ et $\frac{b}{3} < x_+ < \frac{2b}{3}$.
- 4) On suppose ici que toutes les racines de P sont simples. Montrer que toutes les racines de P' sont réelles et simples. Comment sont placées les racines de P' par rapport à celles de P ?
- 5) Montrer le résultat dans le cas général.

Exercice 8.12. On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \cos(u_n). \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction cosinus admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $\alpha \in I = [1/2, 1]$.
- 2) Montrer que $\cos(I) \subset I$.
- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \in I$.
- 4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,9 |u_n - \alpha|$. [Indication : $\sin(1) \leq 0,9$.]
- 5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq 0,9^n (1 - \alpha)$.
- 6) Montrer que $u_n \rightarrow \alpha$.

Exercice 8.13. *Série harmonique.* On considère la suite S définie par : pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

- 1) Soit $n \geq 1$. En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $\ln$ entre n et $n + 1$, montrer que : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
- 2) Montrer que, pour tout $n \geq 1 : \ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.
- 3) Donner un équivalent de la suite S , ainsi que sa limite.

Exercice 8.14. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$P_n = X(X - 1)(X - 2) \cdots (X - n).$$

- 1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, P'_n admet une unique racine u_n dans $]0, 1[$.
- 2) Étudier la monotonie de la suite u .
- 3) Montrer que

$$\frac{P'_n}{P_n} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X - 1} + \cdots + \frac{1}{X - n}$$

- 4) En déduire un équivalent simple de la suite u .

TD9 — Développements limités

9.1 Calculs

Exercice 9.1. Calculer la dérivée n^e des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \cos^3(x)$; 2) $x \mapsto \cos(x)e^x$; 3) $x \mapsto x^{n-1}e^{1/x}$.

Exercice 9.2. En calculant de deux manières la dérivée n^e de la fonction $x \mapsto x^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 9.3. Déterminer un équivalent simple et la limite des fonctions suivantes aux voisinages considérés :

1) $x + x^3$, $x \rightarrow 0$; 2) $x + x^3$, $x \rightarrow +\infty$; 3) $x + x^3$, $x \rightarrow 1$; 4) $\operatorname{ch}(\sqrt{x})$, $x \rightarrow +\infty$; 5) $\ln(x) \ln(1-x)$, $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 9.4. Déterminer les développements limités à l'ordre n en 0 de :

1) $\cos(x) \ln(1+x)$ ($n=4$); 2) $(\ln(1+x))^2$ ($n=4$); 3) $\ln(\cos(x))$ ($n=6$); 4) $(x+x^3)/(1+x+x^2)$ ($n=5$);
5) $\tan(x)$ ($n=7$); 6) $\sin^6(x)$ ($n=9$); 7) $\arcsin(\ln(1+x^2))$ ($n=6$); 8) $\frac{\operatorname{sh}(x)-x}{x^3}$ ($n=4$); 9) $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ ($n=3$);
10) $(1+x)^{1/x}$ ($n=3$); 11) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$ ($n=2$); 12) $\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}))$ ($n=3$); 13) $\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}$ ($n=2$).

Exercice 9.5. Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin(x))^x - 1}{x^x - 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x/2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^{x \ln(x)}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) \tan(\pi x/2)$;
5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - x \sin(x)}{x^3}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}$;

Exercice 9.6. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

soit un infiniment petit d'ordre maximal en 0.

Exercice 9.7. On considère la fonction

$$f: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \tan(x).$$

1) Montrer que f est bijective.

2) Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le préciser.

Exercice 9.8. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et le calculer.

9.2 Formules de Taylor

Exercice 9.9. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite quand $h \rightarrow 0$ de

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Exercice 9.10. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

1) Montrer que si f'' s'annule en $x_0 \in I$ en changeant de signe, alors le graphe de f traverse sa tangente au point d'abscisse x_0 .

On suppose désormais que $f'' \geq 0$.

2) Montrer que la courbe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes.

3) Application : montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 9.11. *Croissances comparées.*

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 pour la fonction exponentielle.

2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n}e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 9.12. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 9.13. *Approximation numérique.* On définit, pour tout $n \geq 0$ et $x \geq 0$, $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $x \geq 0$,

$$S_n(x) \leq e^x \leq S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x.$$

2) En déduire que pour tout $x \geq 0$ la suite $(S_n(x))_n$ converge vers e^x .

3) Montrer que $e \leq 4$. [Indication : on pourra prendre $x = 1$ et $n = 1$.]

4) Déterminer n tel que $S_n(1)$ soit une approximation à 10^{-3} près de e . Calculer $S_n(1)$ pour cette valeur de n .

5) Utiliser la même idée pour obtenir une approximation à 10^{-3} près de $\sin(1)$.

6) De même, trouver une valeur approchée à 10^{-5} près de $\cos(3/2)$.

7) De même, trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(3/2)$.

Exercice 9.14. En appliquant la formule de Taylor-Laplace à la fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln(2)}{2}.$$

9.3 Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

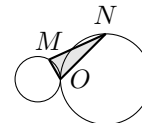
Exercice 9.15. Calculer le gradient $(\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}))$, le laplacien $(\Delta f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2})$ et les dérivées secondes croisées $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ pour les fonctions suivantes :

1) $f(x, y) = 4x^2y - xy^2$; 2) $g(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$; 3) $h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;

4) $k(x, y, z) = \sqrt{x^2 - y^2 + 4xz}$; 5) $l(x, y, z) = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{z}$.

Exercice 9.16. O est le point de tangence des deux cercles.

Quelle est l'aire maximale du triangle OMN quand M et N décrivent leur cercle respectif?



TD10 — Applications linéaires

10.1 Calcul matriciel

Exercice 10.1. Pour les matrices ci-dessous, quand peut-on calculer la somme $A+B$? Le produit AB ? Le produit BA ? On les calculera le cas échéant.

- 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.
- 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer $3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$.
- 2) Résoudre l'équation $A + 3X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

Exercice 10.3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ t & 1 & -t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, calculer $M_s M_t$.
- 2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer M_t^n .
- 3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que M_t est inversible et calculer son inverse.

Exercice 10.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. On dit que les matrices A et B **commutent** si $AB = BA$.

- 1) Déterminer pour quelles valeurs des paramètres x et y les matrices suivantes commutent :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}.$$

- 2) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(K)$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, puis avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
puis avec $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.5. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que A et B commutent.

- 1) Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, les matrices A^k et B commutent. [Indication : raisonner par récurrence sur k .]
- 2) Montrer que A^k et B^l commutent pour tous k et $l \in \mathbb{N}$.
- 3) Montrer que $A^\top$ et $B^\top$ commutent.
- 4) Si B est en plus inversible, montrer que A et B^{-1} commutent.

5) Montrer qu'on a la formule du binôme de Newton :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

Exercice 10.6. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer N^n .
- 2) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) De même, pour

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer $(A - I_4)^2$.
- 2) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$.
- 4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 5) Retrouver le résultat en remarquant que $A = I_4 + (A - I_4)$.

Exercice 10.8. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer qu'il existe $(a, b) \in K^2$ tel que $A^2 = aA + bI_3$.
- 2) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X - 5$.
- 4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 5) Retrouver le résultat en montrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n I_3$ avec a et b deux suites qu'on explicitera. [Indication : on montrera que a est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.]

Exercice 10.9. On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** (respectivement **antisymétrique**) si $A^\top = A$ (respectivement $A^\top = -A$). On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

- 1) Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et un exemple de matrice dans $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 3) Donner une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension. Même question pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- 4) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10.10. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses.

$$1) A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; 2) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; 3) A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; 4) A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.11. Montrer que les matrices suivantes ne sont pas inversibles.

$$1) B_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; 2) B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.12. *Suite récurrente linéaire.* On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

- 1) On considère le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $U_{n+1} = AU_n$.
- 2) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer P^{-1} .
- 3) Calculer $D = P^{-1}AP$.
- 4) À l'aide des questions précédentes, trouver une formule explicite pour u_n en fonction de n .

10.2 Applications linéaires

Exercice 10.13. *Vocabulaire.* Pour chaque fonction ci-dessous, dire si c'est : a) une application linéaire ; b) une forme linéaire ; c) un endomorphisme ; d) un isomorphisme ; e) un automorphisme. Si plusieurs réponses sont possibles, toutes sont attendues.

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
- 2) La rotation du plan de centre O et d'angle $\pi/3$.
- 3) $f: C^0([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \int_a^b u(t)dt$.
- 4) L'homothétie du plan de centre O et de rapport 0.
- 5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \pi x$.
- 6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \pi x + \pi/2$.

Exercice 10.14. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

- 1) $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$; 2) $f: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \in \mathbb{R}^3$; 3) $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y, 0, x - 7y, x + y) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 10.15. Soit $f: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$.

- 1) Vérifier que f est une application linéaire.
- 2) En utilisant une base de $\mathbb{R}_3[X]$, déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- 3) Montrer que f est surjectif.
- 4) Montrer que f n'est pas injectif.

Exercice 10.16. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}_3[X] &\rightarrow \mathbb{C}_3[X] \\ P &\mapsto P - P' \end{aligned}$$

est bijective.

Exercice 10.17. Soit $f: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par, pour toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f(u) = v$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$.

- 1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- 2) Montrer que f n'est pas injectif.
- 3) Montrer que f est surjectif.

Exercice 10.18. On considère l'application

$$T: \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$$

$$f \mapsto \left(g: x \mapsto \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) dt \right).$$

- 1) Calculer $T(\sin)$.
- 2) Montrer que T est un endomorphisme.
- 3) Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $T(f)$ est dérivable et $(T(f))'(x) = f(x+1) - f(x-1)$.
- 4) T est-il surjectif?
- 5) T est-il injectif?

Exercice 10.19. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'application $\varphi: \mathcal{M}_2(K) \rightarrow \mathcal{M}_2(K)$ définie par : pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(K)$, $\varphi(M) = AM - MA$.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme.
- 2) L'application φ est-elle injective?
- 3) L'application φ est-elle surjective?

Exercice 10.20. Soit E , F et G trois K -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
- 2) Montrer que $g \circ f = 0_{E,G}$ si et seulement si $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Exercice 10.21. *Projecteurs.* Soit E un K -espace vectoriel. On dit que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si $p \circ p = p$. On se donne un projecteur p .

- 1) Montrer que $\text{id}_E - p$ est un projecteur.
- 2) Montrer que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Ker}(\text{id}_E - p)$ sont en somme directe.
- 3) Montrer que, pour tout $x \in E$, $p(x) \in \text{Ker}(\text{id}_E - p)$.
- 4) Montrer que, pour tout $x \in E$, $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$.
- 5) En déduire que $\text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(\text{id}_E - p) = E$.
- 6) Montrer que $\text{Ker}(\text{id}_E - p) = \text{Im}(p)$.

Soit q un projecteur.

- 7) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{E,E}$.
- 8) Montrer que, si $p + q$ est un projecteur, $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- 9) Montrer que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$ si et seulement si f et g sont deux projecteurs de même noyau.

TD11 — Applications linéaires en dimension finie

11.1 Théorème du rang

Exercice 11.1. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par, pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, y + 2z)$.

- 1) Vérifier que f est une application linéaire.
- 2) Montrer que f est surjective.
- 3) Vérifier que $(2, -2, 1) \in \text{Ker}(f)$. En déduire, avec le minimum de calculs, $\text{Ker}(f)$.

Exercice 11.2. Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$.

- 1) Vérifier que f est une application linéaire.
- 2) Déterminer le noyau de f .
- 3) En déduire que f est un isomorphisme.

Exercice 11.3. Soit E un K -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_K(E)$ tel que $\text{rg}(f) = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 11.4. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}_K(E)$. Montrer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \iff (f^2 = 0_{E,E} \text{ et } n = 2 \text{rg}(f)).$$

11.2 Image d'une base

Exercice 11.5. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((2, 1, 1))$.

- 1) Existe-t-il $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) = F$?
- 2) Existe-t-il $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{Ker}(f) = F$ et $\text{Im}(f) = G$?

Exercice 11.6. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_K(E)$. On suppose que

$$\forall x \in E \quad \exists p_x \in \mathbb{N} \quad f^{p_x}(x) = 0_E.$$

Montrer que f est **nilpotent**, i.e.

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad f^p(x) = 0_E.$$

Exercice 11.7. On considère la famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) = (x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{3x}, x \mapsto e^{4x}).$$

- 1) Soit $u_0 = (1, 1, 1, 1)$, $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (1^2, 2^2, 3^2, 4^2)$ et $u_3 = (1^3, 2^3, 3^3, 4^3)$. Montrer que (u_0, u_1, u_2, u_3) est une famille libre.
- 2) En déduire que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{pmatrix}$$

est inversible.

- 3) Pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$, on note f la fonction

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4.$$

Montrer que le système formé des 4 équations $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 0$ est équivalent à un système de 4 équations linéaires d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

- 4) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
- 5) Retrouver le résultat en utilisant le fait que (X, X^2, X^3, X^4) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

11.3 Représentation matricielle

Exercice 11.8. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2) , on considère la réflexion s d'axe $\mathbb{R}e_1$.

- 1) Écrire la matrice A de s dans la base canonique.
- 2) Calculer A^2 . Était-ce prévisible ?

Exercice 11.9. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la projection orthogonale p sur la droite d'équation $2x + y = 0$.

- 1) Écrire la matrice B de p dans la base canonique.
- 2) Calculer B^2 . Était-ce prévisible ?
- 3) Quelle base de l'espace $\mathbb{R}^2$ serait mieux adaptée à ce problème ? Écrire la matrice B' de p dans cette base, calculer B'^2 , écrire la matrice de passage P , et calculer $B' - P^{-1}BP$. Était-ce prévisible ?

Exercice 11.10. Soit l'endomorphisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par, pour tout triplet (x, y, z) , $f(x, y, z) = (y - z, -2x - y + z, -2x - y + z)$.

- 1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- 3) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{E}' = (e_3, e_2, e_1)$ de $\mathbb{R}^3$.
- 4) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{E}'' = (e_2, e_1 - e_2 - e_3, -2e_2 - 2e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- 5) En déduire une base de l'image de f , le rang de f et une base du noyau de f .
- 6) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 11.11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à A .

- 1) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, expliciter $f(x, y, z)$.
- 2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11.12. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-4x - 6y, 3x + 5y, 3x + 6y + 5z)$.

- 1) Donner la matrice de f dans la base canonique.
- 2) Montrer que $\mathcal{B} = ((-2, 1, 0), (-1, 1, -1), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 3) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- 4) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de f^n .

Exercice 11.13. Soit $C \in \mathcal{M}_2(K)$ et $f: \mathcal{M}_2(K) \rightarrow \mathcal{M}_2(K)$ définie par : pour tout $M \in \mathcal{M}_2(K)$, $f(M) = CM + MC$.

- 1) Montrer que f est un endomorphisme.
- 2) Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.
- 3) On appelle **trace** d'une matrice carrée M , et on note $\text{tr}(M)$, la somme des coefficients diagonaux de M . Exprimer la trace de A en fonction de celle de C .

Exercice 11.14. Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = (P(0), P'(0), P(1))$.

- 1) Montrer que f est un isomorphisme.
- 2) À l'aide d'une représentation matricielle, donner une expression de f^{-1} .

Exercice 11.15. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. Soit $f: E \rightarrow E$ l'application qui à un polynôme associe sa dérivée. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

- 1) Montrez que f est une application linéaire. Précisez son image et son noyau, et calculer leurs dimensions. Le théorème du rang est-il vérifié ?
- 2) Calculer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
- 3) Calculer la matrice de f^2 dans $\mathcal{B}$ de deux manières différentes : d'abord grâce à la matrice de f ; puis en comprenant ce qu'est l'application linéaire f^2 , et en écrivant directement sa matrice.

Exercice 11.16. Montrer que $f: K[X] \rightarrow K[X]$ donnée par $f(P) = P + P' + P''$ est un automorphisme.

TD12 — Déterminants

Exercice 12.1. *Échauffement.*

$$1) \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Exercice 12.2. *Arrowhead matrix.* Calculer le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 12.3. *Matrice tridiagonale.* Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $a = 2 \cos(\theta)$. Calculer, en fonction de n et de θ , le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & & (0) \\ 1 & a & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & a & 1 \\ (0) & & & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 12.4. Soit $(a, b, \lambda) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq b$. On considère le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & (a) & \\ & (b) & \ddots & \\ & & & \lambda \end{vmatrix}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $D_n = a(\lambda - b)^{n-1} + (\lambda - a)D_{n-1}$. [Indication : on retranchera à chaque ligne la précédente, puis on développera par rapport à la dernière colonne.]

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$D_n = \frac{a(\lambda - b)^n - b(\lambda - a)^n}{a - b}.$$

3) Montrer que la fonction $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$f(x) = \begin{vmatrix} \lambda + x & & & \\ & \lambda + x & (a + x) & \\ & (b + x) & \ddots & \\ & & & \lambda + x \end{vmatrix}$$

est une fonction affine.

4) Retrouver l'expression de D_n .

Exercice 12.5. À quelle condition sur les réels a, b, c et d le système linéaire

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 1 \\ ax + by + cz - dt = 0 \\ ax + by - cz - dt = -2 \\ ax - by - cz - dt = 3 \end{cases}$$

a-t-il une unique solution (x, y, z, t) ?

Exercice 12.6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles M_α est inversible.

Exercice 12.7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) On suppose que $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.
- 2) On suppose que A est antisymétrique et n impair. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 12.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A sont dans $\{-1, +1\}$. Montrer que $\det(A)$ est divisible par 2^{n-1} .

Exercice 12.9. *Matrices triangulaires par blocs.* Soit $A \in \mathcal{M}_2(K)$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_3(K)$. Soit M la matrice par blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{3,2} & C \end{array} \right).$$

- 1) Montrer que $M = M_1 M_2$ où

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0_{2,3} \\ \hline 0_{3,2} & C \end{array} \right) \quad \text{et} \quad M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{3,2} & I_3 \end{array} \right).$$

- 2) En déduire que $\det(M) = \det(A) \det(C)$.
- 3) Application : calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 12.10. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$\begin{aligned} u: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

- 1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- 2) Montrer que u est bijectif si et seulement si A est inversible.
- 3) Montrer que $\det(u) = (\det(A))^2$.

Exercice 12.11. On considère la fonction $\Delta: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\Delta(a, b, c, d) = ad - bc$ et on définit

$$\begin{aligned} f &= (f_1, f_2, f_3, f_4): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c, d) &\mapsto \Delta(a, b, c, d) \cdot (a, b, c, d). \end{aligned}$$

Calculer le **jacobien** de f en montrant que :

$$J_f := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} & \frac{\partial f_1}{\partial c} & \frac{\partial f_1}{\partial d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} & \frac{\partial f_2}{\partial c} & \frac{\partial f_2}{\partial d} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a} & \frac{\partial f_3}{\partial b} & \frac{\partial f_3}{\partial c} & \frac{\partial f_3}{\partial d} \\ \frac{\partial f_4}{\partial a} & \frac{\partial f_4}{\partial b} & \frac{\partial f_4}{\partial c} & \frac{\partial f_4}{\partial d} \end{vmatrix} = 3\Delta^4.$$

Exercice 12.12. Un graphe numéroté G est la donnée d'un ensemble de sommets numérotés de 1 à n reliés par des arêtes. On appelle **matrice d'adjacence** du graphe G la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dont le coefficient $a_{i,j}$ vaut 1 s'il y a une arête entre les sommets i et j , et 0 sinon.

- 1) Donner la matrice d'adjacence du graphe d'un pentagone.
- 2) Calculer son déterminant.
- 3) Montrer que ce déterminant ne dépend pas du choix de la numérotation des sommets.
- 4) Reprendre les mêmes questions pour un triangle, un carré, un hexagone, un tétraèdre, un cube et un octaèdre.
- 5) Qu'en est-il pour un polygone à n côté ?