

Traitement et analyse d'images numériques

Partie 2: Dérivées, Opérateurs, Discrétisation

Pierre Maurel

Visages, IRISA/INRIA

`pierre.maurel@irisa.fr`

`http://www.normalesup.org/~pmaurel/IMA/`

Qu'est-ce qu'une image ?

Qu'est-ce qu'une image ?

Plusieurs réponses possibles

- **Réponse "informatique"** → un tableau de valeurs, une matrice de pixels (*picture element*)

Qu'est-ce qu'une image ?

Plusieurs réponses possibles

- **Réponse "informatique"** → un tableau de valeurs, une matrice de pixels (*picture element*)
 - Image en niveau de gris, valeurs entre 0 (noir) et 255 (blanc)

Qu'est-ce qu'une image ?

Plusieurs réponses possibles

- Réponse "mathématique" → une fonction, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Qu'est-ce qu'une image ?

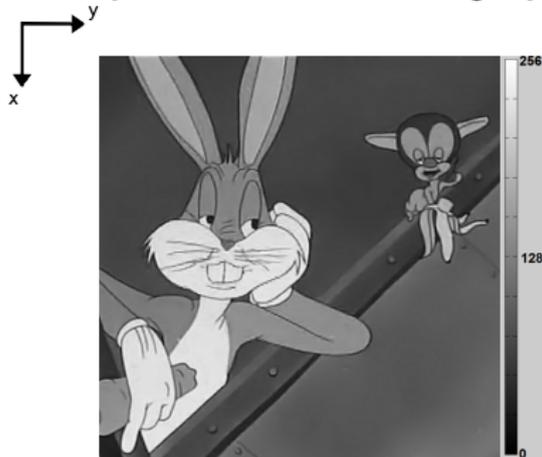
Plusieurs réponses possibles

- Réponse "mathématique" → une fonction, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - f associe un niveau de gris $f(x, y)$ à une position (x, y)

Qu'est-ce qu'une image ?

Plusieurs réponses possibles

- Réponse "mathématique" → une fonction, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - f associe un niveau de gris $f(x, y)$ à une position (x, y)

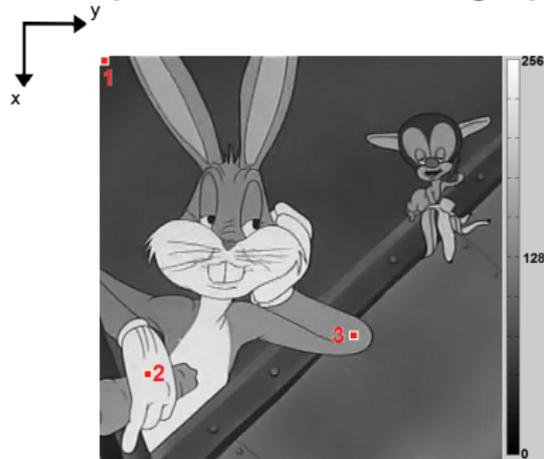


Qu'est-ce qu'une image ?

Plusieurs réponses possibles

- Réponse "mathématique" → une fonction, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- f associe un niveau de gris $f(x, y)$ à une position (x, y)



- Ici, on a, par exemple (pour une image de taille 512×512)

$$f(320, 350) = 130$$

$$f(1, 1) = 50$$

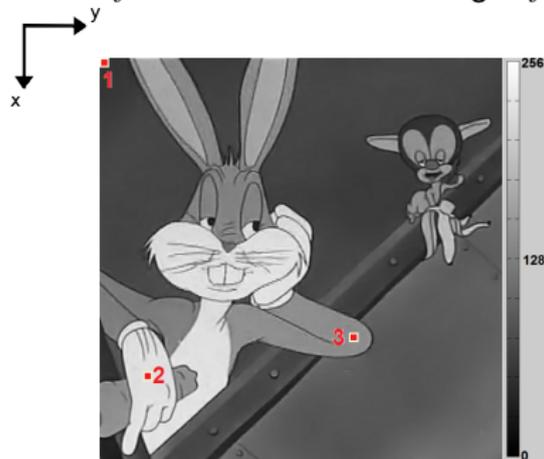
$$f(400, 60) = 230$$

Qu'est-ce qu'une image ?

Plusieurs réponses possibles

- Réponse "mathématique" → une fonction, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- f associe un niveau de gris $f(x, y)$ à une position (x, y)



- Ici, on a, par exemple (pour une image de taille 512×512)

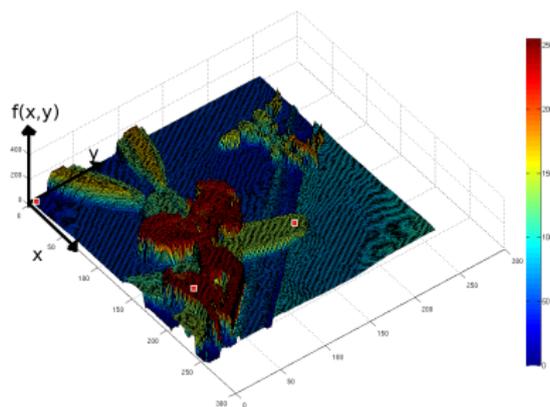
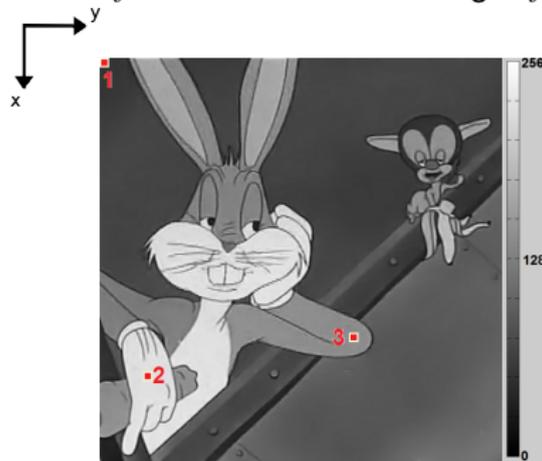
3 → $f(320, 350) = 130$ **1** → $f(1, 1) = 50$ **2** → $f(400, 60) = 230$

Qu'est-ce qu'une image ?

Plusieurs réponses possibles

- Réponse "mathématique" → une fonction, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- f associe un niveau de gris $f(x,y)$ à une position (x,y)



- Ici, on a, par exemple (pour une image de taille 512×512)

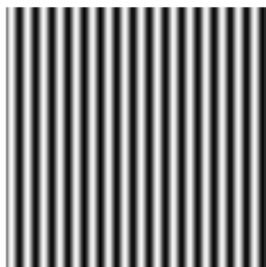
3 → $f(320, 350) = 130$ **1** → $f(1, 1) = 50$ **2** → $f(400, 60) = 230$

Autre visualisation de la fonction f (en fausses couleurs)

Une image en tant que fonction : exemples

$$f(x, y) = y$$

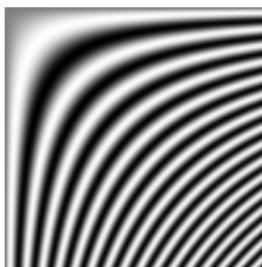
A



1

$$f(x, y) = x + y$$

B



2

$$f(x, y) = \sin(y)$$

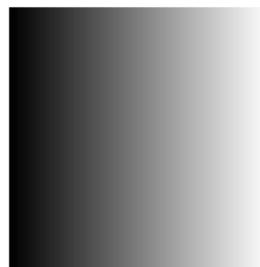
C



3

$$f(x, y) = \sin(x * y)$$

D

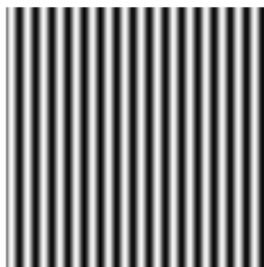


4

Une image en tant que fonction : exemples

$$f(x, y) = y$$

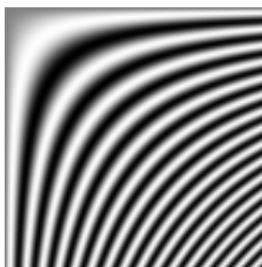
A



1

$$f(x, y) = x + y$$

B



2

$$f(x, y) = \sin(y)$$

C



3

$$f(x, y) = \sin(x * y)$$

D



4

A → 4

B → 3

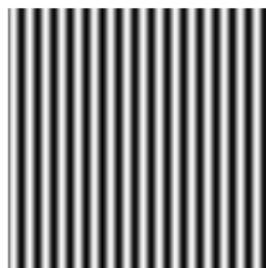
C → 1

D → 2

Une image en tant que fonction : exemples

$$f(x, y) = y$$

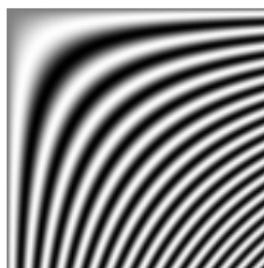
A



1

$$f(x, y) = x + y$$

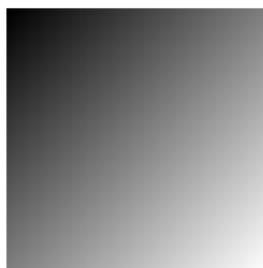
B



2

$$f(x, y) = \sin(y)$$

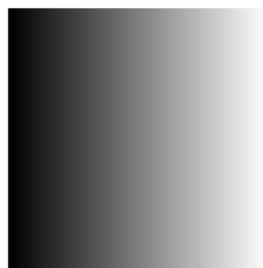
C



3

$$f(x, y) = \sin(x * y)$$

D



4

$$A \rightarrow 4$$

$$B \rightarrow 3$$

$$C \rightarrow 1$$

$$D \rightarrow 2$$

- **En pratique** : pour une image réelle, on n'a pas de formule explicite pour la fonction f correspondante.



→ $f = ?$

Manipulations basiques sur les images

$$f(x, y) \longrightarrow$$



$$g_1(x, y) = 255 - f(x, y)$$



A

$$g_2(x, y) = f(y, x)$$



B

$$g_3(x, y) = f(x, y) / 3$$



C

$$g_4(x, y) = f(x, y) * 2$$



D

Manipulations basiques sur les images

$$f(x, y) \longrightarrow$$



$$g_1(x, y) = 255 - f(x, y)$$



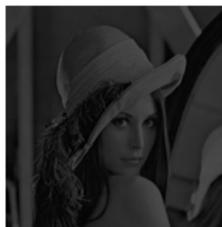
A

$$g_2(x, y) = f(y, x)$$



B

$$g_3(x, y) = f(x, y)/3$$



C

$$g_4(x, y) = f(x, y) * 2$$



D

$$g_1 \rightarrow D$$

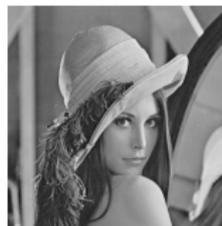
$$g_2 \rightarrow A$$

$$g_3 \rightarrow C$$

$$g_4 \rightarrow B$$

Manipulations basiques sur les images

$$f(x, y) \longrightarrow$$



$$g_1(x, y) = 255 - f(x, y)$$



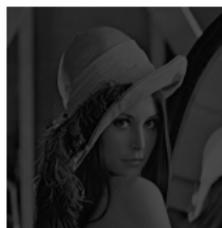
A

$$g_2(x, y) = f(y, x)$$



B

$$g_3(x, y) = f(x, y)/3$$



C

$$g_4(x, y) = f(x, y) * 2$$



D

$$g_1 \rightarrow D$$

$$g_2 \rightarrow A$$

$$g_3 \rightarrow C$$

$$g_4 \rightarrow B$$

- manipulations de fonctions ... dérivées = ?

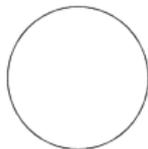
Autres possibilités

- Images vectorielles
 - composées d'entités mathématiques (cercles, lignes , etc)

Autres possibilités

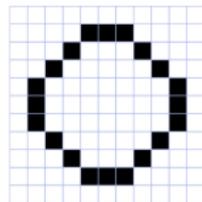
- Images vectorielles

- composées d'entités mathématiques (cercles, lignes , etc)
- chaque entité est décrite par une formule mathématique :



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

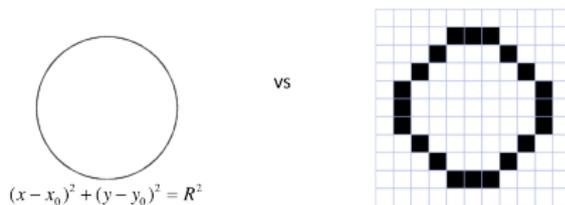
vs



Autres possibilités

- Images vectorielles

- composées d'entités mathématiques (cercles, lignes , etc)
- chaque entité est décrite par une formule mathématique :



Matricielle

Vectorielle



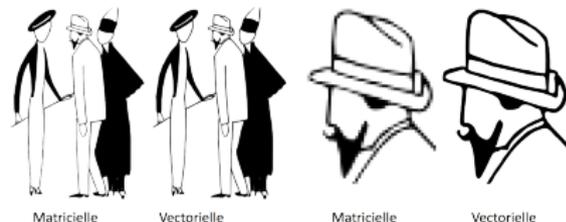
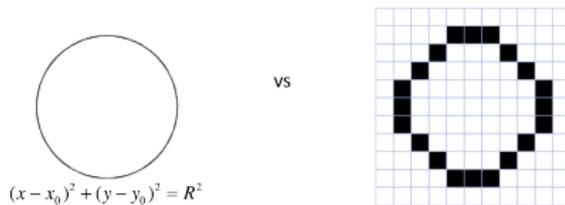
Matricielle

Vectorielle

Autres possibilités

- Images vectorielles

- composées d'entités mathématiques (cercles, lignes , etc)
- chaque entité est décrite par une formule mathématique :

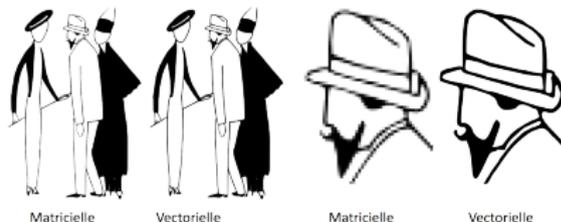
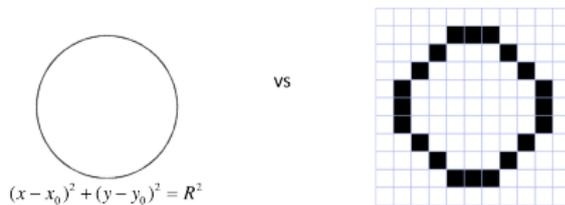


- Avantages : zoom infini, définir une image avec peu d'informations

Autres possibilités

- Images vectorielles

- composées d'entités mathématiques (cercles, lignes , etc)
- chaque entité est décrite par une formule mathématique :

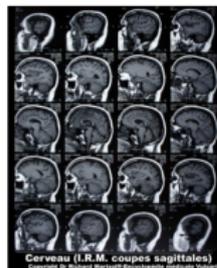
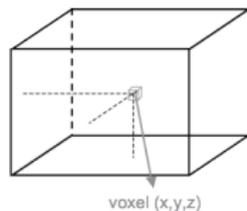


- Avantages : zoom infini, définir une image avec peu d'informations
- Inconvénients : représentation de formes simples, pas d'images réalistes.

Autres possibilités

- Images 3D

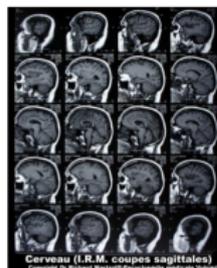
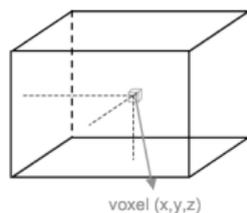
- On parle de *voxels* plutôt que de *pixels*.



Autres possibilités

- Images 3D

- On parle de *voxels* plutôt que de *pixels*.



- Images 2D+t

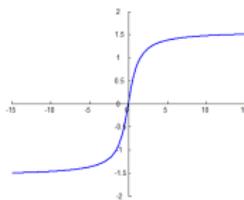
- variante du 3D, il s'agit des vidéos



Dérivées partielles, Gradient, EDP

Dérivées partielles : une image

- En 1D : dérivée forte \Rightarrow forte variation de la fonction :

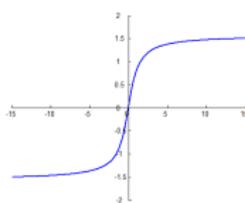


$f(x)$

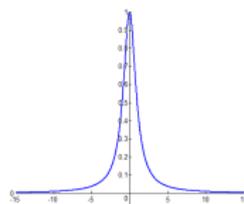
$f'(x)$

Dérivées partielles : une image

- En 1D : dérivée forte \Rightarrow forte variation de la fonction :



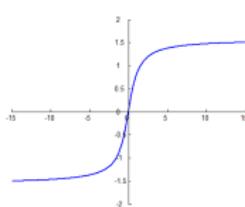
$f(x)$



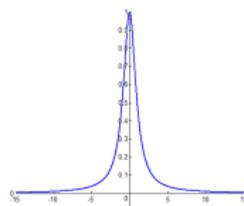
$f'(x)$

Dérivées partielles : une image

- En 1D : dérivée forte \Rightarrow forte variation de la fonction :



$f(x)$

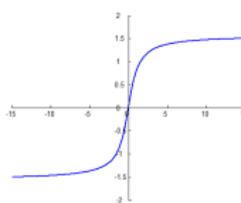


$f'(x)$

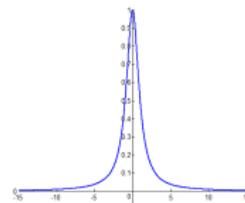
- En 2D (ou plus) : la dérivée partielle dans une direction indique la variation de l'image dans cette direction

Dérivées partielles : une image

- En 1D : dérivée forte \Rightarrow forte variation de la fonction :

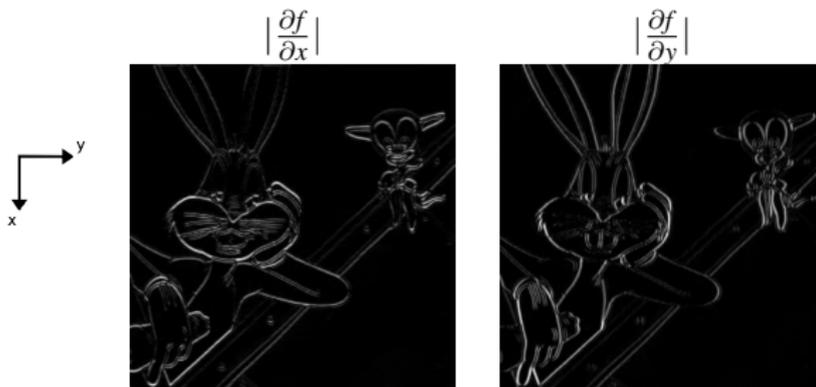


$f(x)$

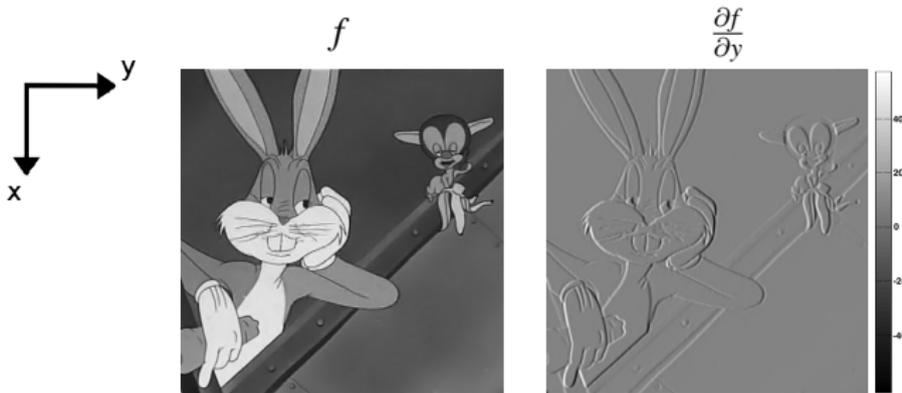


$f'(x)$

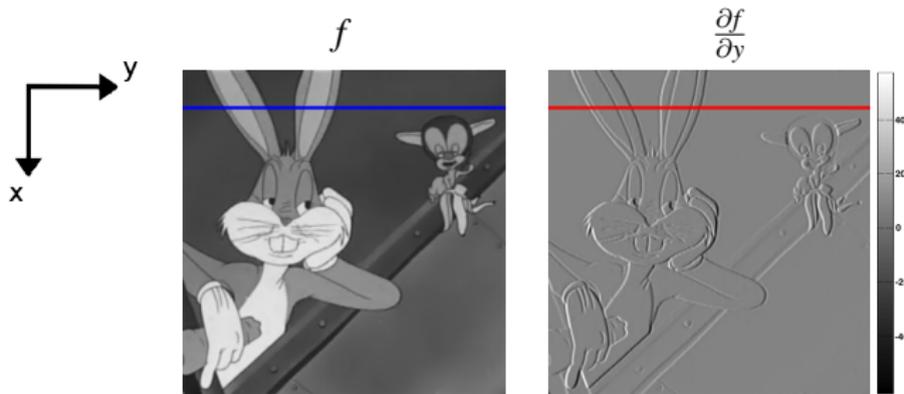
- En 2D (ou plus) : la dérivée partielle dans une direction indique la variation de l'image dans cette direction



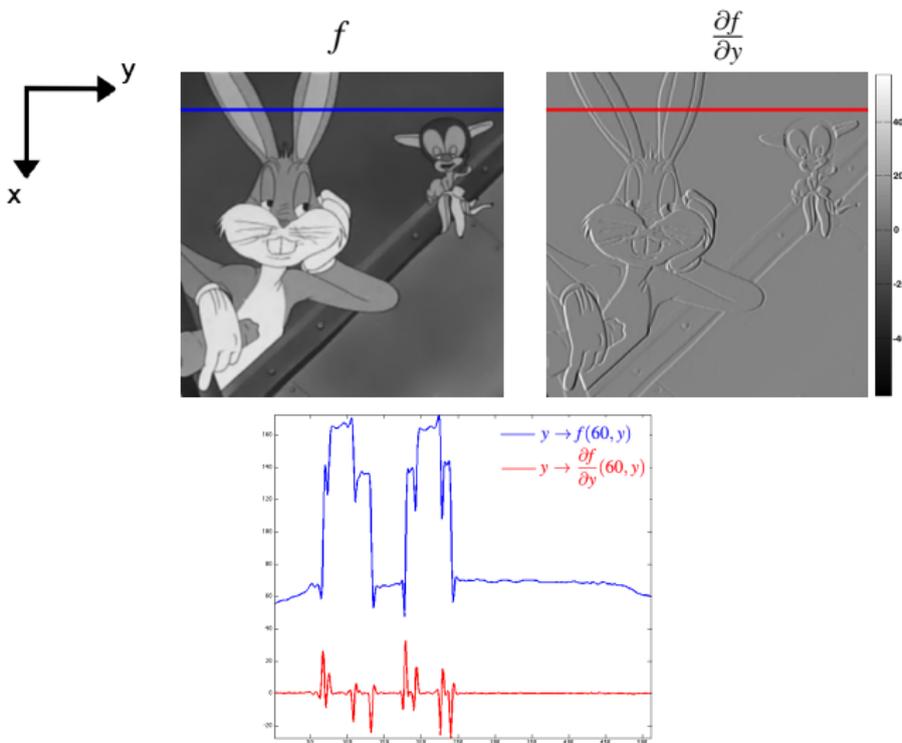
Dérivées partielles : une image



Dérivées partielles : une image



Dérivées partielles : une image



Opérateurs usuels : Gradient

- Le gradient en un point d'une image est un opérateur très important et est utilisé dans de nombreux cas

Opérateurs usuels : Gradient

- Le gradient en un point d'une image est un opérateur très important et est utilisé dans de nombreux cas
- f est un champ de **scalaires**, le gradient de f est un champ de **vecteurs** :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Opérateurs usuels : Gradient

- Le gradient en un point d'une image est un opérateur très important et est utilisé dans de nombreux cas
- f est un champ de **scalaires**, le gradient de f est un champ de **vecteurs** :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- $f(10, 10)$ est un scalaire ($\in \mathbb{R}$) mais $(\nabla f)(10, 10)$ est un vecteur ($\in \mathbb{R}^2$)

Opérateurs usuels : Gradient

- Le gradient en un point d'une image est un opérateur très important et est utilisé dans de nombreux cas
- f est un champ de **scalaires**, le gradient de f est un champ de **vecteurs** :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- $f(10, 10)$ est un scalaire ($\in \mathbb{R}$) mais $(\nabla f)(10, 10)$ est un vecteur ($\in \mathbb{R}^2$)
- Exemple : $f(x, y) = \underbrace{xy^2 + e^x}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \nabla f(x, y) =$

Opérateurs usuels : Gradient

- Le gradient en un point d'une image est un opérateur très important et est utilisé dans de nombreux cas
- f est un champ de **scalaires**, le gradient de f est un champ de **vecteurs** :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- $f(10, 10)$ est un scalaire ($\in \mathbb{R}$) mais $(\nabla f)(10, 10)$ est un vecteur ($\in \mathbb{R}^2$)
- Exemple : $f(x, y) = \underbrace{xy^2 + e^x}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \nabla f(x, y) = \underbrace{(y^2 + e^x, 2xy)}_{\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

Opérateurs usuels : Gradient

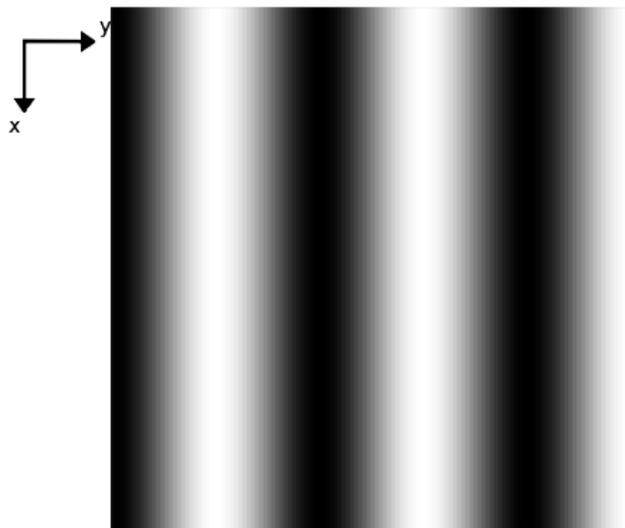
Exemple

- $f(x, y) = \sin(y)$
- $\nabla f(x, y) =$

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple

- $f(x, y) = \sin(y)$
- $\nabla f(x, y) = (0, \cos(y))$



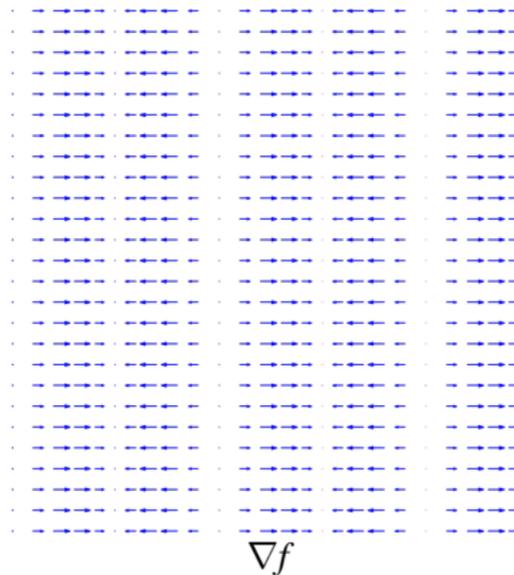
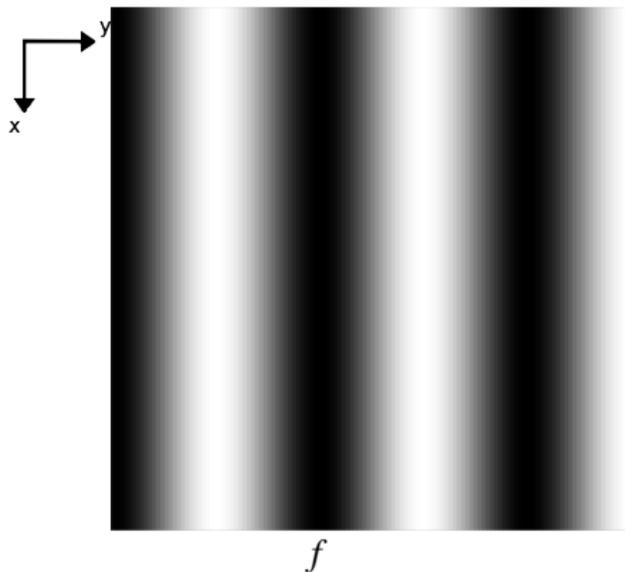
f

∇f

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple

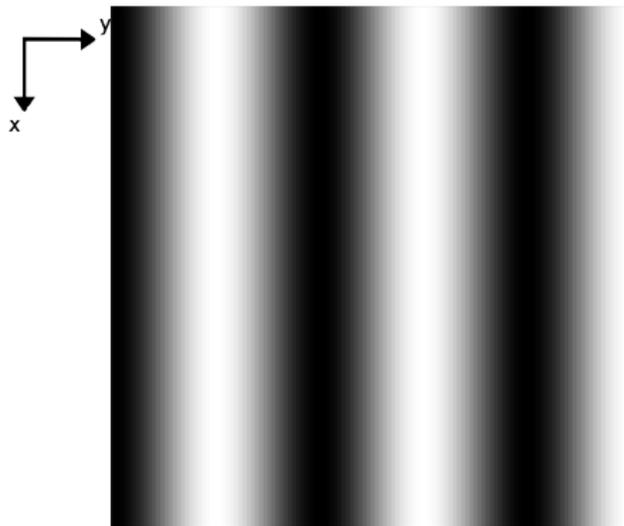
- $f(x, y) = \sin(y)$
- $\nabla f(x, y) = (0, \cos(y))$



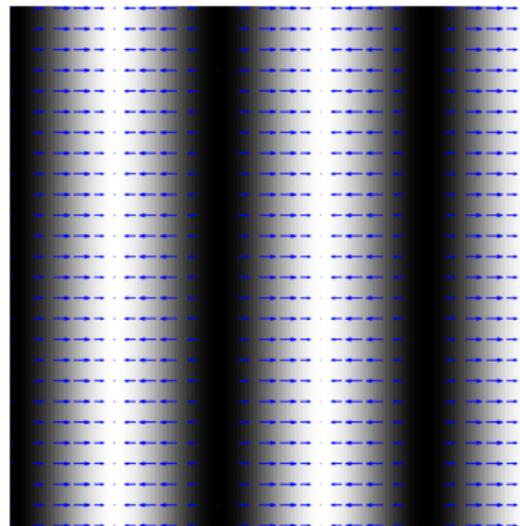
Opérateurs usuels : Gradient

Exemple

- $f(x, y) = \sin(y)$
- $\nabla f(x, y) = (0, \cos(y))$



f



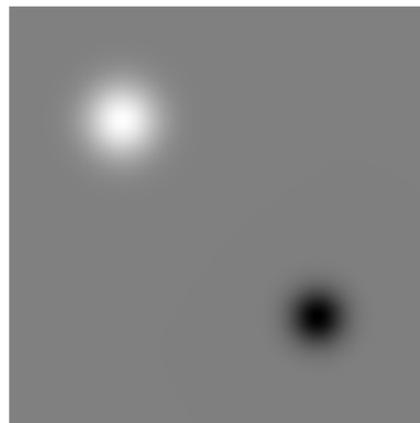
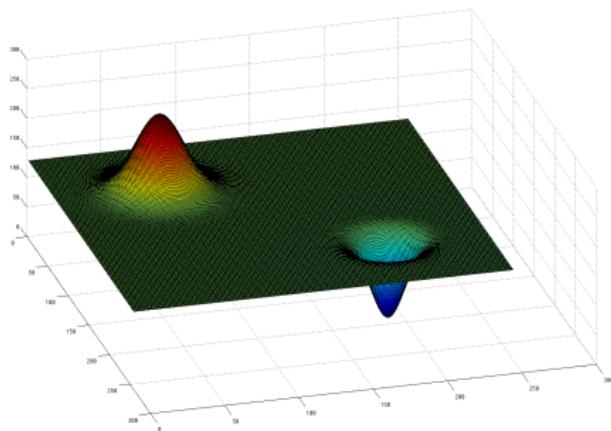
∇f

Opérateurs usuels : Gradient

- le **vecteur** $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ (ou $\nabla f(x, y)$) indique la direction et l'intensité de la plus grande variation du champ scalaire f autour du point (x, y)

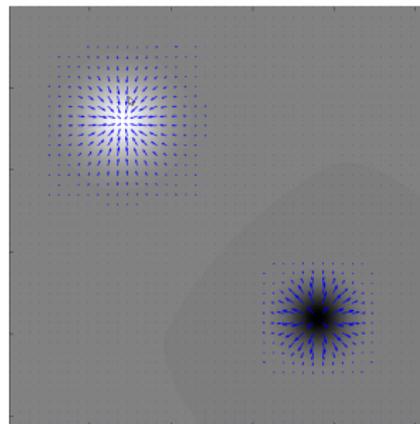
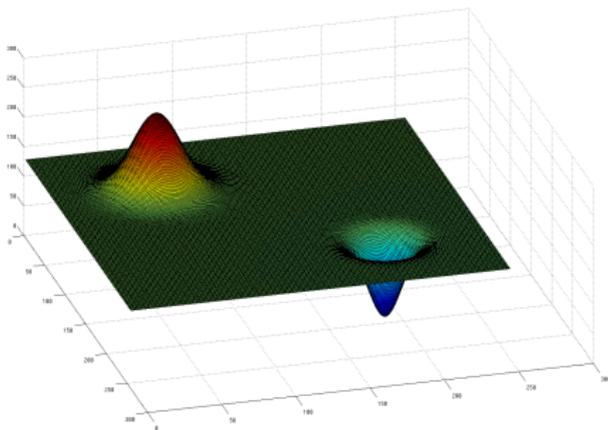
Opérateurs usuels : Gradient

- le **vecteur** $\vec{\text{grad}} f(x, y)$ (ou $\nabla f(x, y)$) indique la direction et l'intensité de la plus grande variation du champ scalaire f autour du point (x, y)
- interprétation : direction de "plus grande pente" et valeur de cette pente.



Opérateurs usuels : Gradient

- le **vecteur** $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ (ou $\nabla f(x, y)$) indique la direction et l'intensité de la plus grande variation du champ scalaire f autour du point (x, y)
- interprétation : direction de "plus grande pente" et valeur de cette pente.



Opérateurs usuels : Gradient

- les zones de fort gradient sont donc des zones de fortes variations

Opérateurs usuels : Gradient

- les zones de fort gradient sont donc des zones de fortes variations



f

Norme du gradient

$$\|\vec{\text{grad}} f\| = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial x}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}^2}$$

Opérateurs usuels : Gradient

- les zones de fort gradient sont donc des zones de fortes variations



f

Norme du gradient

$$\|\vec{\text{grad}} f\| = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients



f

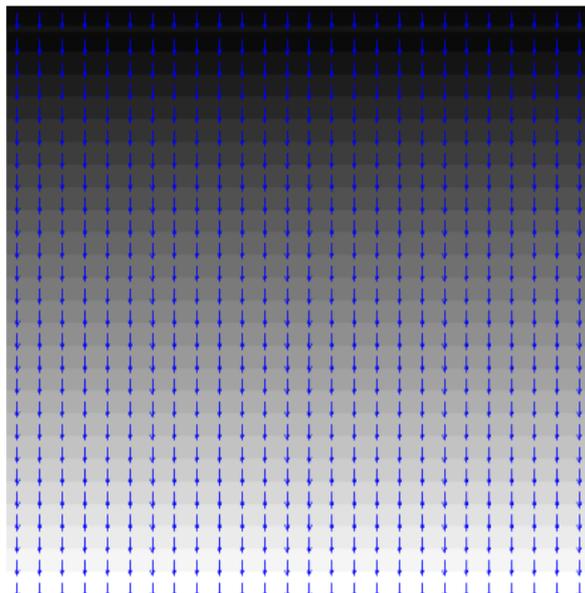
$\vec{\text{grad}} f$

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients



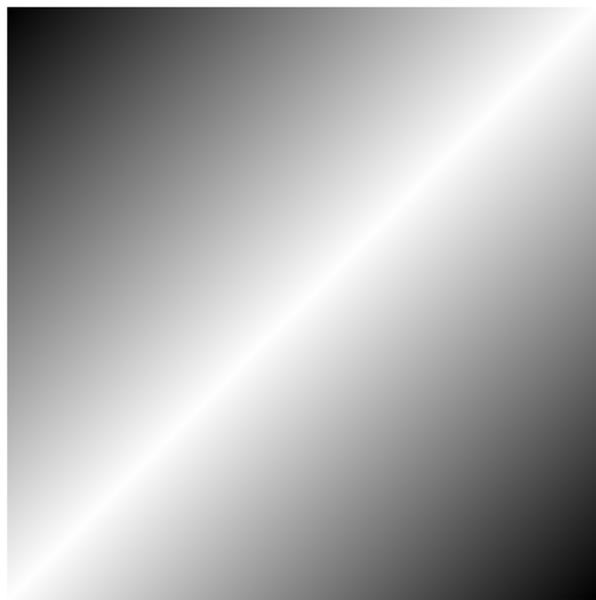
f



$\vec{\text{grad}} f$

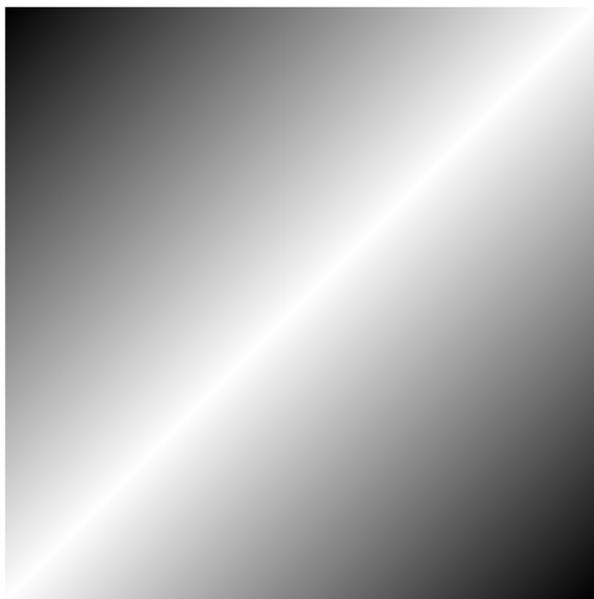
Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients

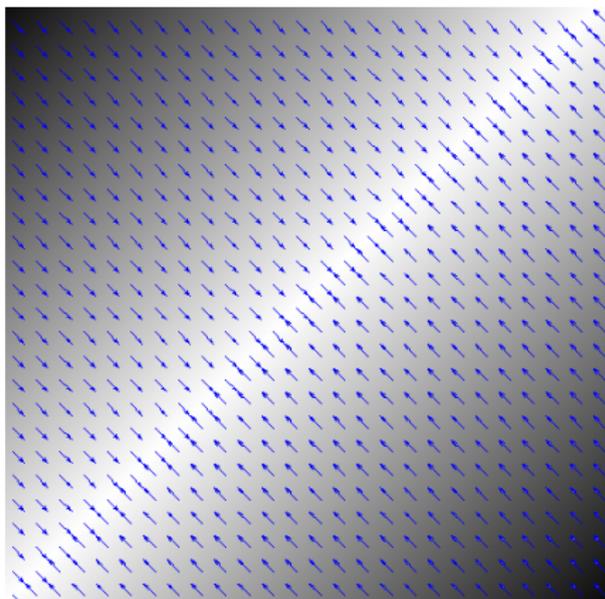
 f $\vec{\text{grad}} f$

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients



f



$\vec{\text{grad}} f$

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients

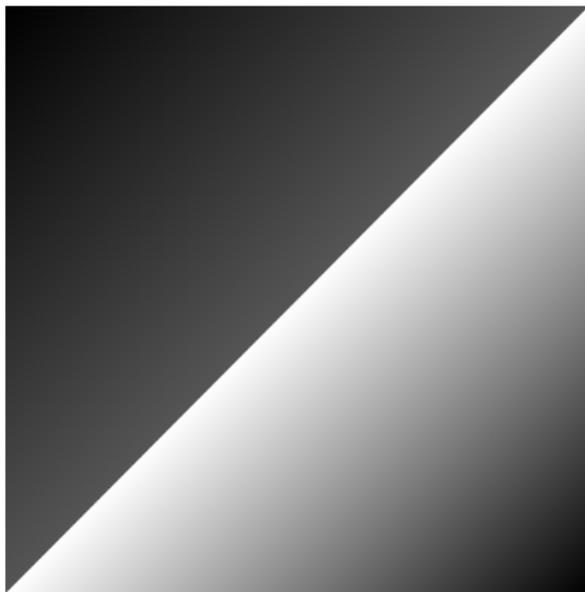


f

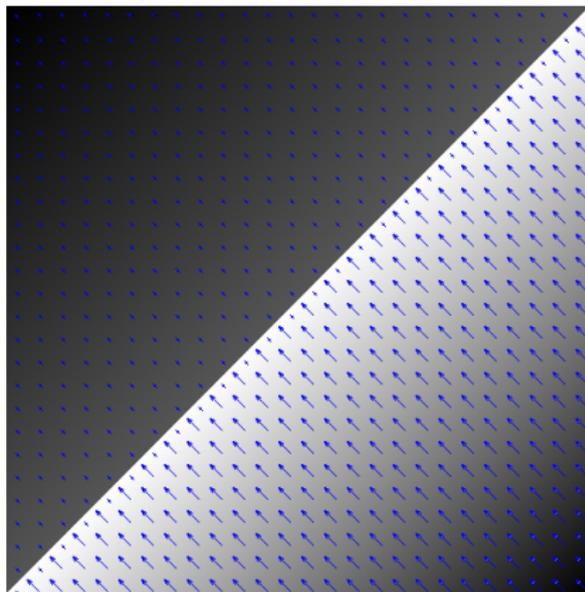
$\vec{\text{grad}} f$

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients



f



$\vec{\text{grad}} f$

Opérateurs usuels : Laplacien

- f est un champ de **scalaires**, le laplacien de f est également un champ de **scalaires** :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Opérateurs usuels : Laplacien

- f est un champ de **scalaires**, le laplacien de f est également un champ de **scalaires** :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

- Exemple : $f(x, y) = \underbrace{xy^2 + e^x}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \Delta f(x, y) =$

Opérateurs usuels : Laplacien

- f est un champ de **scalaires**, le laplacien de f est également un champ de **scalaires** :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

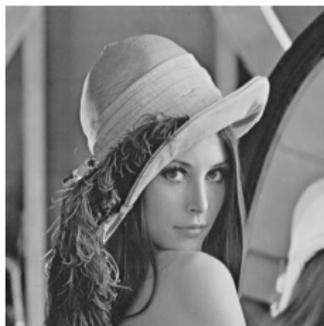
- Exemple : $f(x, y) = \underbrace{xy^2 + e^x}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \Delta f(x, y) = \underbrace{e^x + 2x}_{\in \mathbb{R}}$

Opérateurs usuels : Laplacien

- f est un champ de **scalaires**, le laplacien de f est également un champ de **scalaires** :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

- Exemple : $f(x, y) = \underbrace{xy^2 + e^x}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \Delta f(x, y) = \underbrace{e^x + 2x}_{\in \mathbb{R}}$



f



Δf

- Nombreuses applications physiques (eq de Poisson $\Delta \phi = f$)

Opérateurs usuels : Divergence

- Divergence d'un champ $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ (**vecteurs** \longrightarrow **scalaires**) :

Opérateurs usuels : Divergence

- Divergence d'un champ $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ (**vecteurs** \longrightarrow **scalaires**) :

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}$$

Opérateurs usuels : Divergence

- Divergence d'un champ $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ (**vecteurs** \longrightarrow **scalaires**) :

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

Opérateurs usuels : Divergence

- Divergence d'un champ $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ (**vecteurs** \rightarrow **scalaires**) :

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

- Exemple : $\mathbf{w}(x, y) = \underbrace{(y^2 + e^x, 2xy)}_{\in \mathbb{R}^2} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{w}(x, y) =$

Opérateurs usuels : Divergence

- Divergence d'un champ $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ (**vecteurs** \rightarrow **scalaires**) :

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

- Exemple : $\mathbf{w}(x, y) = \underbrace{(y^2 + e^x, 2xy)}_{\in \mathbb{R}^2} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{w}(x, y) = \underbrace{e^x + 2x}_{\in \mathbb{R}}$

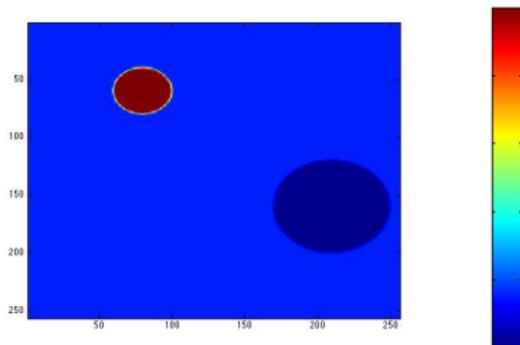
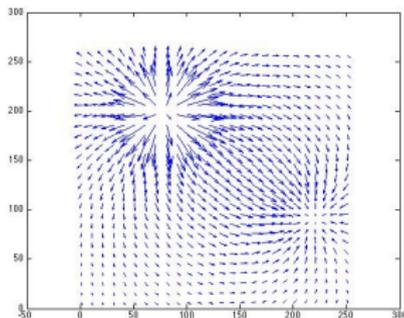
Opérateurs usuels : Divergence

- Divergence d'un champ $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ (**vecteurs** \rightarrow **scalaires**) :

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

- Exemple : $\mathbf{w}(x, y) = \underbrace{(y^2 + e^x, 2xy)}_{\in \mathbb{R}^2} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{w}(x, y) = \underbrace{e^x + 2x}_{\in \mathbb{R}}$

- interprétation physique : variation infinitésimale du volume autour d'un point



Opérateurs usuels : Rotationnel

- $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ est un champ de **vecteurs** et son rotationnel est aussi un champ de **vecteurs** :

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{w}$$

$$\text{Cas 3D : } \text{rot } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w/\partial y - \partial v/\partial z \\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \end{bmatrix}$$

Opérateurs usuels : Rotationnel

- $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ est un champ de **vecteurs** et son rotationnel est aussi un champ de **vecteurs** :

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{w}$$

$$\text{Cas 3D : } \text{rot } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w/\partial y - \partial v/\partial z \\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \end{bmatrix}$$

- Résumé :

- grad : scalaire \mapsto vecteur

Opérateurs usuels : Rotationnel

- $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ est un champ de **vecteurs** et son rotationnel est aussi un champ de **vecteurs** :

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{w}$$

$$\text{Cas 3D : } \text{rot } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w/\partial y - \partial v/\partial z \\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \end{bmatrix}$$

- Résumé :

- grad : **scalaire** \mapsto **vecteur**
- div : **vecteur** \mapsto **scalaire**

Opérateurs usuels : Rotationnel

- $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ est un champ de **vecteurs** et son rotationnel est aussi un champ de **vecteurs** :

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{w}$$

$$\text{Cas 3D : } \text{rot } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w/\partial y - \partial v/\partial z \\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \end{bmatrix}$$

- Résumé :

- grad : **scalaire** \mapsto **vecteur**
- div : **vecteur** \mapsto **scalaire**
- rot : **vecteur** \mapsto **vecteur**

Opérateurs usuels : Rotationnel

- $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ est un champ de **vecteurs** et son rotationnel est aussi un champ de **vecteurs** :

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{w}$$

$$\text{Cas 3D : } \text{rot } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w/\partial y - \partial v/\partial z \\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \end{bmatrix}$$

- Résumé :

- grad : **scalaire** \mapsto **vecteur**
- div : **vecteur** \mapsto **scalaire**
- rot : **vecteur** \mapsto **vecteur**
- Δ (laplacien) : **scalaire** \mapsto **scalaire**

Opérateurs usuels : Rotationnel

- $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ est un champ de **vecteurs** et son rotationnel est aussi un champ de **vecteurs** :

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{w}$$

$$\text{Cas 3D : } \text{rot } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w/\partial y - \partial v/\partial z \\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \end{bmatrix}$$

- **Résumé :**

- grad : scalaire \mapsto vecteur
- div : **vecteur** \mapsto **scalaire**
- rot : **vecteur** \mapsto **vecteur**
- Δ (laplacien) : **scalaire** \mapsto **scalaire**
- **Remarque :** Tous ces opérateurs sont **linéaires**.
 $\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f + \beta \overrightarrow{\text{grad}} g$

Opérateurs usuels

Quelques formules

- $\Delta = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}})$
- $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}) = \nabla \wedge \nabla = 0$
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}) = 0$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}) = \nabla \wedge \nabla \mathbf{w} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}) - \Delta$
- $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\vec{B} + \vec{A} \wedge \operatorname{rot}(\vec{B}) + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\vec{A} + \vec{B} \wedge \operatorname{rot}(\vec{A})$
- $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\operatorname{grad}}(g) + g\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)$
- $\operatorname{div}(f\vec{A}) = f\operatorname{div}(\vec{A}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \cdot \vec{A}$
- $\operatorname{rot}(f\vec{A}) = f\operatorname{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \wedge \vec{A}$
- $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(g) + g\Delta f$

Équation de la chaleur

- décrit le phénomène physique de conduction thermique (Fourier, 1811)

Équation de la chaleur

- décrit le phénomène physique de conduction thermique (Fourier, 1811)
- évolution de la température sans contraintes extérieures

Équation de la chaleur

- décrit le phénomène physique de conduction thermique (Fourier, 1811)
- évolution de la température sans contraintes extérieures
- $T(x, y, t)$ le champ de température sur un domaine Ω :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \Delta T(x, y, t) \quad \text{et} \quad T(x, y, 0) = T_0$$

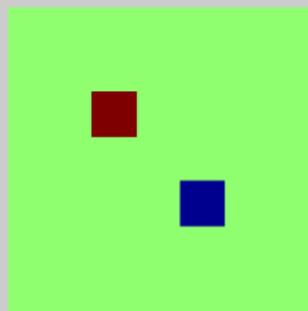
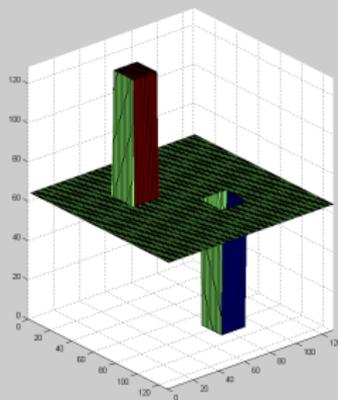
(attention le laplacien est uniquement en "espace", sur x et y : $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.)

Équation de la chaleur

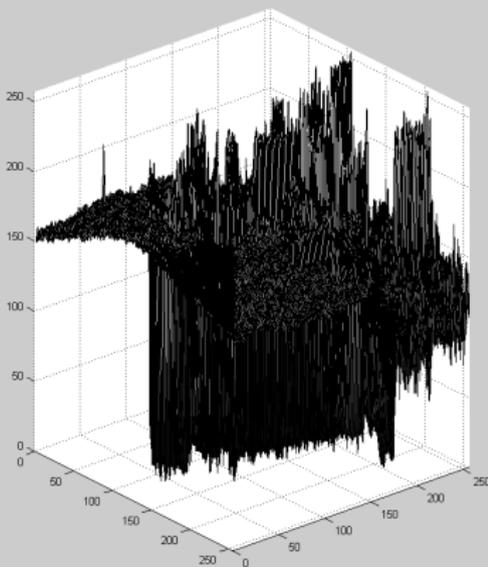
- décrit le phénomène physique de conduction thermique (Fourier, 1811)
- évolution de la température sans contraintes extérieures
- $T(x, y, t)$ le champ de température sur un domaine Ω :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \Delta T(x, y, t) \quad \text{et} \quad T(x, y, 0) = T_0$$

(attention le laplacien est uniquement en "espace", sur x et y : $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.)



Équation de la chaleur sur une image



On parle de **diffusion isotrope** : pas d'orientation préférentielle.

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \text{ avec } u(x, 0) = u_0(x), \forall x$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec } u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier : (attention les constantes peuvent différer selon les définitions)

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{et} \quad \text{TF}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier : (attention les constantes peuvent différer selon les définitions)

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{et} \quad \text{TF}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

- Ce qui permet de se "débarrasser" des dérivées spatiales

$$\text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)(\omega) =$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier : (attention les constantes peuvent différer selon les définitions)

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{et} \quad \text{TF}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

- Ce qui permet de se "débarrasser" des dérivées spatiales

$$\text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx =$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier : (attention les constantes peuvent différer selon les définitions)

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{et} \quad \text{TF}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

- Ce qui permet de se "débarrasser" des dérivées spatiales

$$\text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx =$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier : (attention les constantes peuvent différer selon les définitions)

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{et} \quad \text{TF}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

- Ce qui permet de se "débarrasser" des dérivées spatiales

$$\text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t}$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier : (attention les constantes peuvent différer selon les définitions)

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{et} \quad \text{TF}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

- Ce qui permet de se "débarrasser" des dérivées spatiales

$$\text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t}$$

$$\text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right)(\omega) =$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec } u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier : (attention les constantes peuvent différer selon les définitions)

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{et} \quad \text{TF}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

- Ce qui permet de se "débarrasser" des dérivées spatiales

$$\text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t}$$

$$\text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right)(\omega) = -\omega^2 \text{TF}(u)(\omega) \quad (\text{par intégration par parties et en supposant } u \text{ à support borné})$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right)$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\Rightarrow & \text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right) \\ & &\Rightarrow & \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t} = -\omega^2 \text{TF}(u)\end{aligned}$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t} = -\omega^2 \text{TF}(u)$$

$$\Rightarrow \quad \text{TF}(u)(\omega, t) = f(\omega) e^{-\omega^2 t} \quad (f \text{ est quelconque}).$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\Rightarrow & \text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right) \\ & &\Rightarrow & \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t} = -\omega^2 \text{TF}(u) \\ & &\Rightarrow & \text{TF}(u)(\omega, t) = f(\omega) e^{-\omega^2 t} \quad (f \text{ est quelconque}). \end{aligned}$$

- Condition initiale : $u(x, 0) = u_0(x)$, donc $\text{TF}(u)(\omega, 0) = \text{TF}(u_0)(\omega)$

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t} = -\omega^2 \text{TF}(u)$$

$$\Rightarrow \quad \text{TF}(u)(\omega, t) = f(\omega) e^{-\omega^2 t} \quad (f \text{ est quelconque}).$$

- Condition initiale : $u(x, 0) = u_0(x)$, donc $\text{TF}(u)(\omega, 0) = \text{TF}(u_0)(\omega)$
- on prend donc $f(\omega) = \text{TF}(u_0)(\omega)$

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right) \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t} = -\omega^2 \text{TF}(u) \\ &\Rightarrow \quad \text{TF}(u)(\omega, t) = f(\omega) e^{-\omega^2 t} \quad (f \text{ est quelconque}). \end{aligned}$$

- Condition initiale : $u(x, 0) = u_0(x)$, donc $\text{TF}(u)(\omega, 0) = \text{TF}(u_0)(\omega)$
- on prend donc $f(\omega) = \text{TF}(u_0)(\omega)$
- La transformée de Fourier transforme la multiplication en convolution**

$$\text{TF}(u) = \text{TF}(u_0) e^{-\omega^2 t} \quad \Rightarrow \quad u = \text{TF}^{-1} \left(\text{TF}(u_0) e^{-\omega^2 t} \right)$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\Rightarrow \text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t} = -\omega^2 \text{TF}(u) \\ &\Rightarrow \text{TF}(u)(\omega, t) = f(\omega) e^{-\omega^2 t} \quad (f \text{ est quelconque}). \end{aligned}$$

- Condition initiale : $u(x, 0) = u_0(x)$, donc $\text{TF}(u)(\omega, 0) = \text{TF}(u_0)(\omega)$
- on prend donc $f(\omega) = \text{TF}(u_0)(\omega)$
- La transformée de Fourier transforme la multiplication en convolution**

$$\begin{aligned} \text{TF}(u) = \text{TF}(u_0) e^{-\omega^2 t} &\Rightarrow u = \text{TF}^{-1}\left(\text{TF}(u_0) e^{-\omega^2 t}\right) \\ &\Rightarrow u = u_0 * \text{TF}^{-1}\left(e^{-\omega^2 t}\right) \end{aligned}$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right) \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t} = -\omega^2 \text{TF}(u) \\ &\Rightarrow \quad \text{TF}(u)(\omega, t) = f(\omega) e^{-\omega^2 t} \quad (f \text{ est quelconque}). \end{aligned}$$

- Condition initiale : $u(x, 0) = u_0(x)$, donc $\text{TF}(u)(\omega, 0) = \text{TF}(u_0)(\omega)$
- on prend donc $f(\omega) = \text{TF}(u_0)(\omega)$

- La transformée de Fourier transforme la multiplication en convolution**

$$\begin{aligned} \text{TF}(u) &= \text{TF}(u_0) e^{-\omega^2 t} \quad \Rightarrow \quad u = \text{TF}^{-1} \left(\text{TF}(u_0) e^{-\omega^2 t} \right) \\ &\Rightarrow \quad u = u_0 * \text{TF}^{-1} \left(e^{-\omega^2 t} \right) \end{aligned}$$

- La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.**

Résolution de l'équation de la chaleur

- On montre que la solution est : $u(x, t) = g(x, t) * u_0(x)$

avec $g(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow$ Gaussienne d'écart type $\sigma = \sqrt{2t}$

- g est la *fonction de Green* associée à l'équation de la chaleur.

Résolution de l'équation de la chaleur

- On montre que la solution est : $u(x, t) = g(x, t) * u_0(x)$

avec $g(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow$ Gaussienne d'écart type $\sigma = \sqrt{2t}$

- g est la *fonction de Green* associée à l'équation de la chaleur.

Solution de l'équation de la chaleur 1D

Si la donnée initiale u_0 est suffisamment régulière, la solution explicite de l'équation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

est donnée par :

$$u(x, t) = G_{\sqrt{2t}}(x, t) * u_0(x)$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \text{ avec } u(x, 0) = u_0(x), \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier (attention les constantes peuvent différer selon les définitions) :

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

- Transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{TF}(f)(\omega)e^{i\omega x} d\omega = \text{TF}^{-1}(\text{TF}(f))$$

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \text{ avec } u(x, 0) = u_0(x), \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier (attention les constantes peuvent différer selon les définitions) :

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

- Transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{TF}(f)(\omega)e^{i\omega x} d\omega = \text{TF}^{-1}(\text{TF}(f))$$

- On montre que la solution est $u(x, t) = g(x, t) * u_0(x)$

avec $g(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow$ Gaussienne d'écart type $\sigma = \sqrt{2t}$

- g est la *fonction de Green* associée à l'équation de la chaleur.

Équation de la chaleur sur une image

- Retour au 2D+t

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t) \quad \text{et} \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

Équation de la chaleur sur une image

- Retour au 2D+t

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t) \quad \text{et} \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

- on peut montrer que la solution est donnée par

$$u(x, y, t) = G(x, y, \sigma(t)) * u_0(x, y)$$

où $G(x, y, \sigma(t))$ est une gaussienne dont **l'écart-type σ est proportionnel à t** et $*$ est l'opérateur de convolution.

Équation de la chaleur sur une image

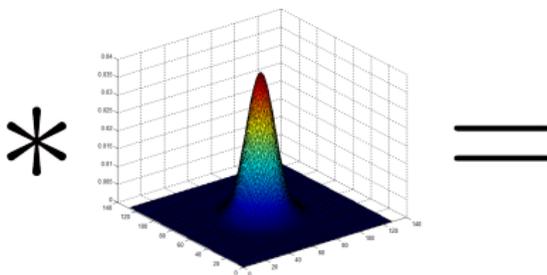
- Retour au 2D+t

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t) \quad \text{et} \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

- on peut montrer que la solution est donnée par

$$u(x, y, t) = G(x, y, \sigma(t)) * u_0(x, y)$$

où $G(x, y, \sigma(t))$ est une gaussienne dont **l'écart-type σ est proportionnel à t** et $*$ est l'opérateur de convolution.



Équation de la chaleur sur une image

$(0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5)$



$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$



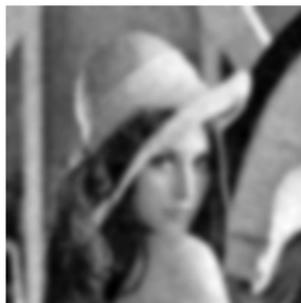
$u(x, y, t_1)$



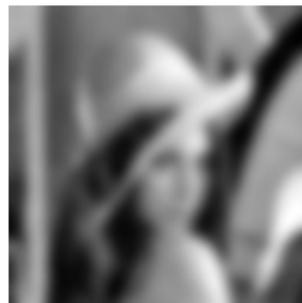
$u(x, y, t_2)$



$u(x, y, t_3)$



$u(x, y, t_4)$



$u(x, y, t_5)$

Équation de la chaleur sur une image

$(0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5)$



$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$



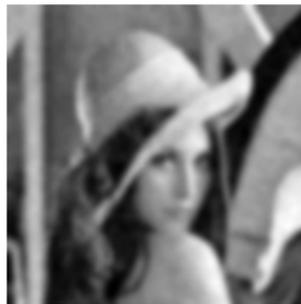
$$u(x, y, t_1) = G(x, y, \sqrt{2t_1}) * u_0(x, y)$$



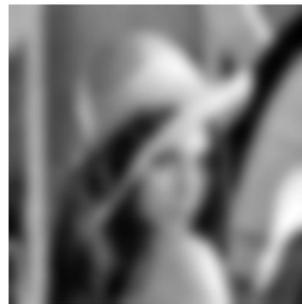
$$u(x, y, t_2) = G(x, y, \sqrt{2t_2}) * u_0(x, y)$$



$$u(x, y, t_3) = G(x, y, \sqrt{2t_3}) * u_0(x, y)$$



$$u(x, y, t_4) = G(x, y, \sqrt{2t_4}) * u_0(x, y)$$



$$u(x, y, t_5) = G(x, y, \sqrt{2t_5}) * u_0(x, y)$$

Interprétation de l'équation de la chaleur par la diffusion

- Diffusion isotrope de l'image I_0

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I = \operatorname{div}(\nabla I)$$

- On diffuse selon toutes les directions de ∇I
- En particulier on diffuse autant au niveau des contours qu'à l'intérieur
- \rightarrow trop flou

Interprétation de l'équation de la chaleur par la diffusion

- Diffusion isotrope de l'image I_0

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I = \operatorname{div}(\nabla I)$$

- On diffuse selon toutes les directions de ∇I
 - En particulier on diffuse autant au niveau des contours qu'à l'intérieur
 - \rightarrow trop flou
- Diffusion non-linéaire (« anisotrope »)

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div}\left(c(|\nabla I|)\nabla I\right)$$

où c est une fonction décroissante du gradient.

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik

- Lissage des zones à faible gradient (réduction du bruit)

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik

- Lissage des zones à faible gradient (réduction du bruit) $\rightarrow c(0) = 1$

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik

- Lissage des zones à faible gradient (réduction du bruit) $\rightarrow c(0) = 1$
- Atténuation de la diffusion lorsque le gradient est important (préservation des singularités et contours)

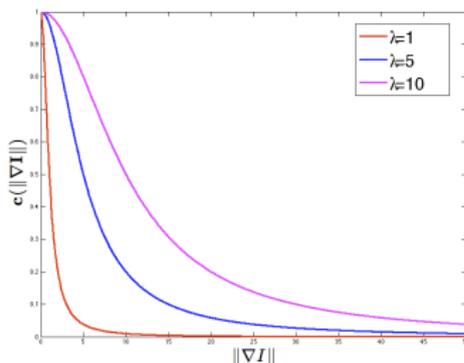
Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik

- Lissage des zones à faible gradient (réduction du bruit) $\rightarrow c(0) = 1$
- Atténuation de la diffusion lorsque le gradient est important (préservation des singularités et contours) $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = 0$

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik

- Lissage des zones à faible gradient (réduction du bruit) $\rightarrow c(0) = 1$
- Atténuation de la diffusion lorsque le gradient est important (préservation des singularités et contours) $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = 0$

exemples : $c(u) = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{\lambda^2}}$ $c(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{\lambda^2}\right)$



- Cette diffusion est en fait toujours **isotrope**. En effet c ne dépend pas de la **direction** du gradient mais uniquement de sa **norme**.

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik

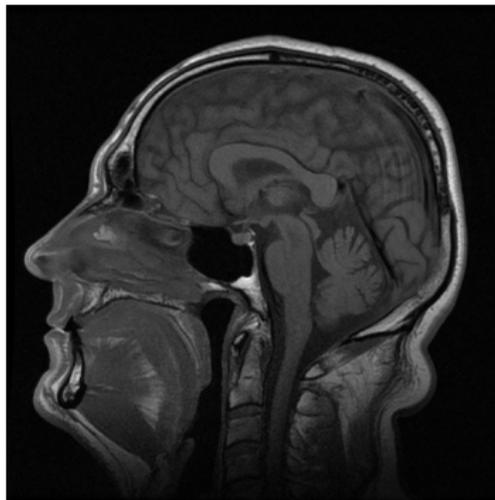


diffusion isotrope

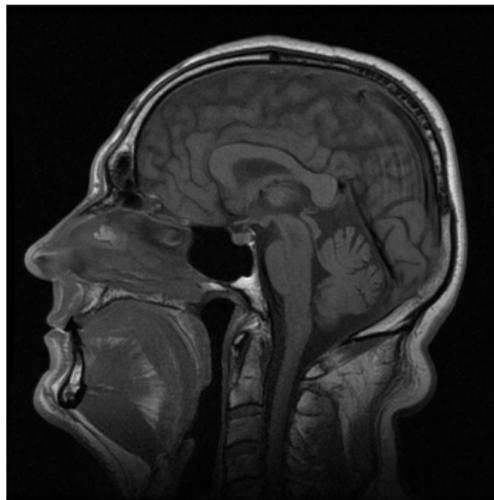


diffusion Perona-Malik

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik



diffusion isotrope



diffusion Perona-Malik

Discrétisation numérique : du continu au discret

Du continu au discret

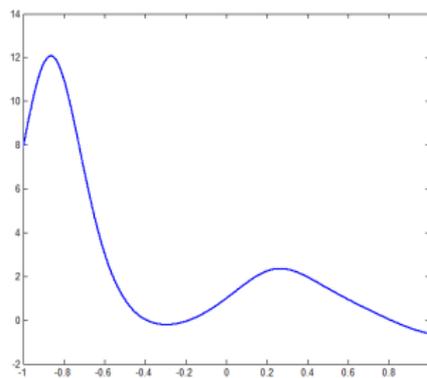
- théorie : fonctions "**continues**" (définies en tout point)
 - cas 1-D + temps : $v : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, t) \in \mathbb{R}$
 - cas 2-D + temps : $v : (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, y, t) \in \mathbb{R}$

Du continu au discret

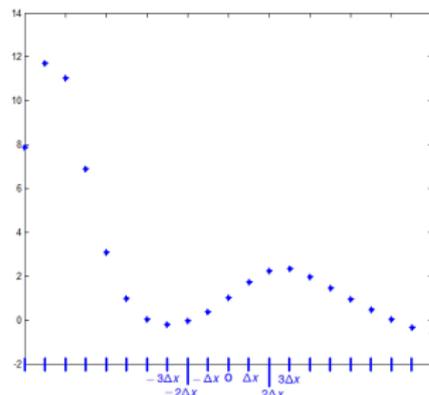
- théorie : fonctions "**continues**" (définies en tout point)
 - cas 1-D + temps : $v : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, t) \in \mathbb{R}$
 - cas 2-D + temps : $v : (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, y, t) \in \mathbb{R}$
- mais en pratique : fonctions **discrétisées**, définies sur une grille **finie** $k \Delta x$ et pour certains instants $n \Delta t$

Du continu au discret

- théorie : fonctions "continues" (définies en tout point)
 - cas 1-D + temps : $v : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, t) \in \mathbb{R}$
 - cas 2-D + temps : $v : (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, y, t) \in \mathbb{R}$
- mais en pratique : fonctions discrétisées, définies sur une grille finie $k \Delta x$ et pour certains instants $n \Delta t$

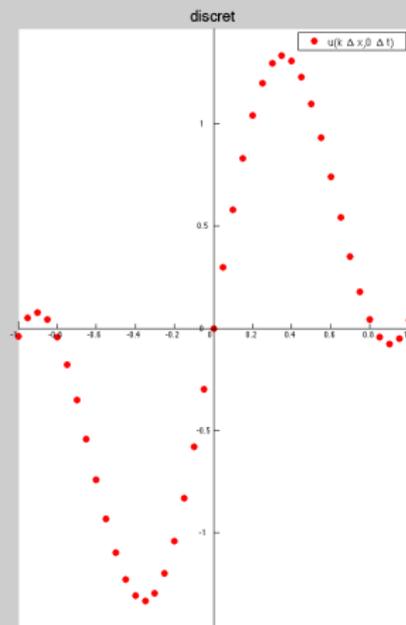
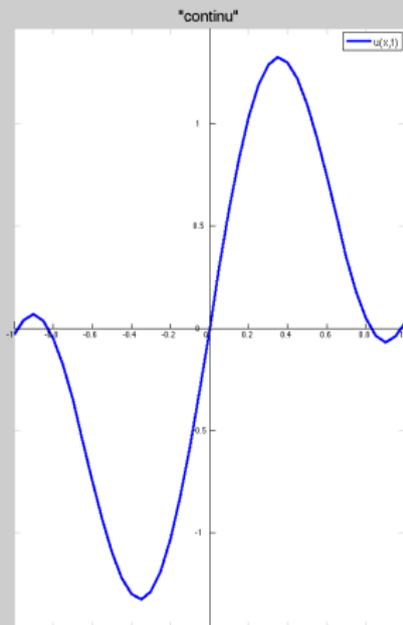


continu



discret

Du continu au discret



Continu / discret

- **Problème** : l'EDP que l'on cherche à résoudre n'est définie qu'en **continu**, cf définition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, \boxed{a_i + h}, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Continu / discret

- **Problème** : l'EDP que l'on cherche à résoudre n'est définie qu'en **continu**, cf définition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, \boxed{a_i + h}, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

→ comment **approximer** ces dérivées ?

Continu / discret

- **Problème** : l'EDP que l'on cherche à résoudre n'est définie qu'en **continu**, cf définition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, \boxed{a_i + h}, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

→ comment **approximer** ces dérivées ?

- plusieurs possibilités : éléments finis, méthodes spectrales, **différences finies**

Continu / discret

- **Problème** : l'EDP que l'on cherche à résoudre n'est définie qu'en **continu**, cf définition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, \boxed{a_i + h}, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

→ comment **approximer** ces dérivées ?

- plusieurs possibilités : éléments finis, méthodes spectrales, **différences finies**
- On va donc chercher une solution à une nouvelle EDP **discrète** → solution approchée de l'EDP originale (**continue**)

Continu / discret

- “Avantage” : en **discret**, on n'a pas forcément besoin de trouver la solution exacte (analytique) de l'EDP.

Continu / discret

- “Avantage” : en **discret**, on n'a pas forcément besoin de trouver la solution exacte (analytique) de l'EDP.
- Pour l'équation de la chaleur (en continu), on a vu qu'on pouvait trouver la solution analytique :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \implies u(x, t) = G_{\sigma(t)} * u_0(x)$$

- Mais c'est très souvent impossible

Continu / discret

- “**Avantage**” : en **discret**, on n'a pas forcément besoin de trouver la solution exacte (analytique) de l'EDP.
- Pour l'équation de la chaleur (en continu), on a vu qu'on pouvait trouver la solution analytique :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \implies u(x, t) = G_{\sigma(t)} * u_0(x)$$

- Mais c'est très souvent impossible
- En discret on peut espérer **construire** une solution à partir de la condition initiale (fonction ou image initiale)

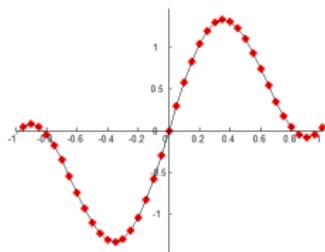
Continu / discret

- **“Avantage”** : en **discret**, on n'a pas forcément besoin de trouver la solution exacte (analytique) de l'EDP.
- Pour l'équation de la chaleur (en continu), on a vu qu'on pouvait trouver la solution analytique :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \implies u(x, t) = G_{\sigma(t)} * u_0(x)$$

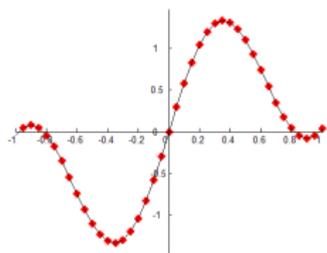
- Mais c'est très souvent impossible
- En discret on peut espérer **construire** une solution à partir de la condition initiale (fonction ou image initiale)
- En particulier, s'il y a une variable temporelle ($f(x_1, \dots, x_n, t)$), on peut partir de la condition initiale et “construire” la solution à l'instant $(n + 1) \Delta t$ en fonction de la solution à l'instant $n \Delta t$

"Construction" de la solution discrète

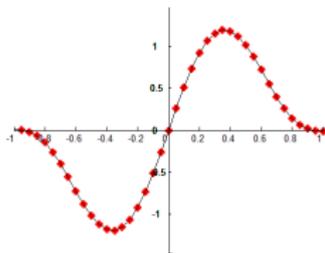


$$u(x, 0) = u_0(x)$$

"Construction" de la solution discrète

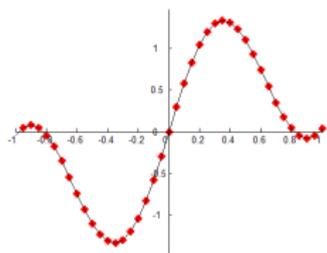


$$u(x, 0) = u_0(x)$$

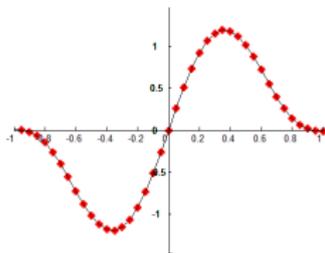


$$u(x, \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 0))$$

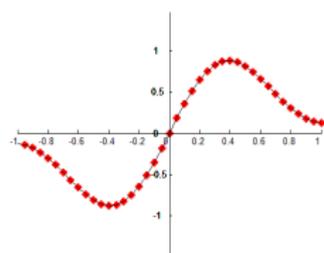
"Construction" de la solution discrète



$$u(x, 0) = u_0(x)$$

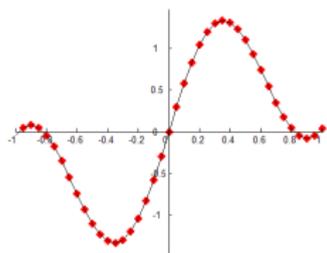


$$u(x, \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 0))$$

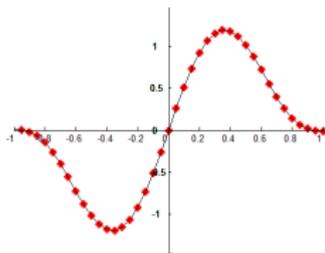


$$u(x, 2 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, \Delta t))$$

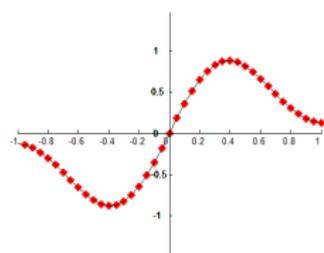
"Construction" de la solution discrète



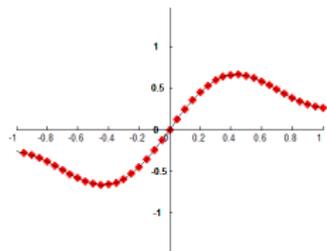
$$u(x, 0) = u_0(x)$$



$$u(x, \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 0))$$

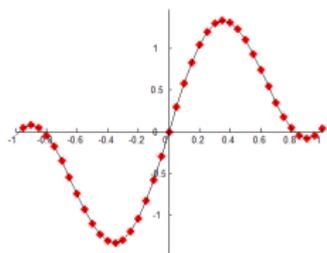


$$u(x, 2 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, \Delta t))$$

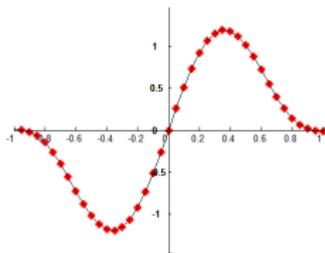


$$u(x, 3 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 2 \Delta t))$$

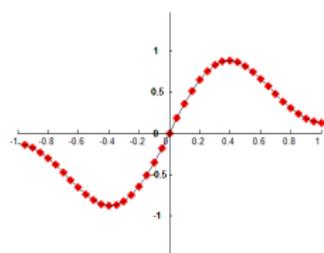
"Construction" de la solution discrète



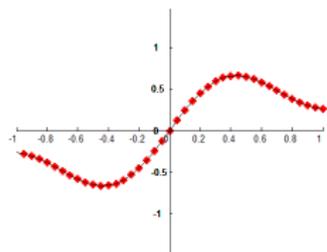
$$u(x, 0) = u_0(x)$$



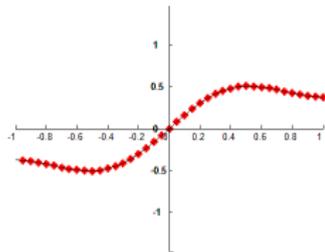
$$u(x, \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 0))$$



$$u(x, 2 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, \Delta t))$$

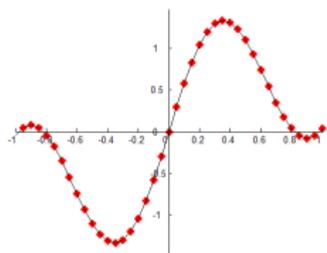


$$u(x, 3 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 2 \Delta t))$$

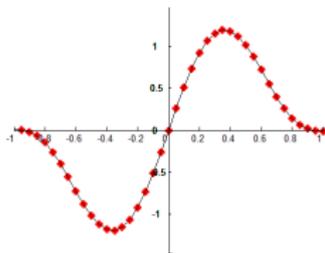


$$u(x, 4 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 3 \Delta t))$$

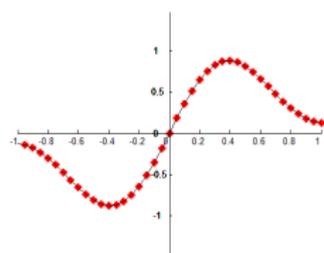
"Construction" de la solution discrète



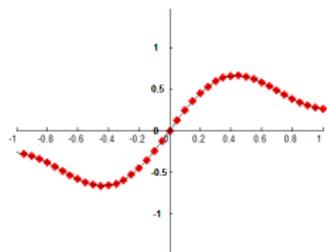
$$u(x, 0) = u_0(x)$$



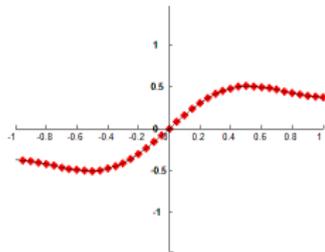
$$u(x, \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 0))$$



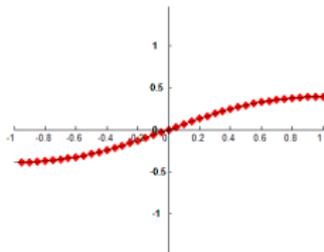
$$u(x, 2 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, \Delta t))$$



$$u(x, 3 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 2 \Delta t))$$



$$u(x, 4 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 3 \Delta t))$$



$$u(x, 5 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 4 \Delta t))$$

Discrétisation des dérivées

- En continu, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: on défini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Discrétisation des dérivées

- En continu, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: on défini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

- En discret, la fonction/image est définie sur une grille (pixels) :

$$u(i \Delta x, j \Delta y)$$

Discrétisation des dérivées

- En continu, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: on défini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

- En discret, la fonction/image est définie sur une grille (pixels) :

$$u(i \Delta x, j \Delta y)$$

- Comment définir la dérivée partielle de u par rapport à x ?

Discrétisation des dérivées

- En continu, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: on défini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

- En discret, la fonction/image est définie sur une grille (pixels) :

$$u(i \Delta x, j \Delta y)$$

- Comment définir la dérivée partielle de u par rapport à x ?

$$\bullet \frac{u(i \Delta x + \Delta x, j \Delta y) - u(i \Delta x, j \Delta y)}{\Delta x} ? \quad \dots \quad \frac{u(i \Delta x - \Delta x, j \Delta y) - u(i \Delta x, j \Delta y)}{-\Delta x} ?$$

$$\dots \quad \frac{u(i \Delta x + \Delta x, j \Delta y) - u(i \Delta x - \Delta x, j \Delta y)}{2 \Delta x} ?$$

Conditions aux bords

- \mathcal{I} est une image définie sur Ω
- Ω est borné
- comment définir les dérivées de \mathcal{I} sur les bords de Ω (noté $\text{Fr}(\Omega)$) ?
Même problème pour la convolution (filtrage)

Conditions aux bords

- \mathcal{I} est une image définie sur Ω
- Ω est borné
- comment définir les dérivées de \mathcal{I} sur les bords de Ω (noté $\text{Fr}(\Omega)$) ?
Même problème pour la convolution (filtrage)
- \rightarrow on prolonge de manière arbitraire l'image

Conditions aux bords

- \mathcal{I} est une image définie sur Ω
- Ω est borné
- comment définir les dérivées de \mathcal{I} sur les bords de Ω (noté $\text{Fr}(\Omega)$) ?
Même problème pour la convolution (filtrage)
- \rightarrow on prolonge de manière arbitraire l'image
 - ne pas traiter le bord : nouvelle image plus petite que l'originale
 - compléter l'extérieur de l'image originale avec des 0 (padding)
 - compléter l'extérieur de l'image originale en symétrisant ses valeurs aux bords (mirroring)
 - compléter l'extérieur de l'image originale par extrapolation de ses valeurs aux bords
 - compléter l'extérieur de l'image originale par périodisation

Conditions aux bords

Exple : par réflexion ($\frac{\partial I}{\partial N} = 0$ sur $\text{Fr}(\Omega)$)



Différences finies

- Notation “petit o” : “négligeable devant”

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)), \quad \text{lorsque} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

- Exemples : $x^{n+1} = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, $28x^{n+1} + x^{n+3} = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

Différences finies

- Notation “petit o” : “négligeable devant”

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)), \quad \text{lorsque} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

- Exemples : $x^{n+1} = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, $28x^{n+1} + x^{n+3} = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

- Formule de Taylor-Young :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

- Formule de Taylor-Young pour une fonction à plusieurs variables :

$$u(x+h, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, y)h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

Différences finies

- Soit $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une image
- on a $v(x + \Delta x, y) = v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o_{\Delta x \rightarrow 0}(\Delta x)$

Différences finies

- Soit $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une image

- on a $v(x + \Delta x, y) = v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o_{\Delta x \rightarrow 0}(\Delta x)$

$$\text{donc } \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o(1)$$

Différences finies

- Soit $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une image

- on a $v(x + \Delta x, y) = v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o_{\Delta x \rightarrow 0}(\Delta x)$

$$\text{donc } \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o(1)$$

- Pour une image, Δx et Δy n'ont pas de sens particulier et sont généralement pris égaux à 1 pour simplifier les formules

Différences finies

- Soit $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une image

- on a $v(x + \Delta x, y) = v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o_{\Delta x \rightarrow 0}(\Delta x)$

$$\text{donc } \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o(1)$$

- Pour une image, Δx et Δy n'ont pas de sens particulier et sont généralement pris égaux à 1 pour simplifier les formules
- Approximations classiques pour $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$:

$$\text{Schéma "avant" : } v(x + 1, y) - v(x, y)$$

$$\text{Schéma "arrière" : } v(x, y) - v(x - 1, y)$$

$$\text{Schéma "centré" : } \frac{v(x + 1, y) - v(x - 1, y)}{2}$$

Différences finies

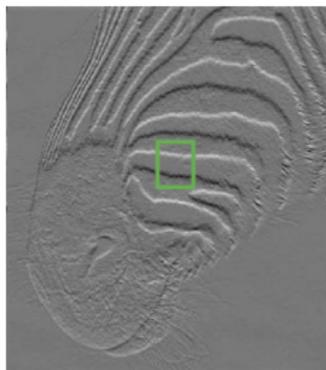
- Filtres associés

$$\nabla I = \begin{bmatrix} G_x * I \\ G_y * I \end{bmatrix} \quad \text{avec } G_x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{et } G_y = G_x^T$$

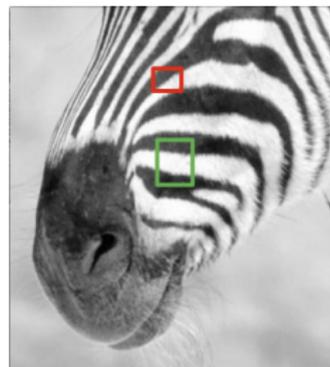
$$\Delta I = D * I, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\frac{\partial I}{\partial x} \rightarrow$$

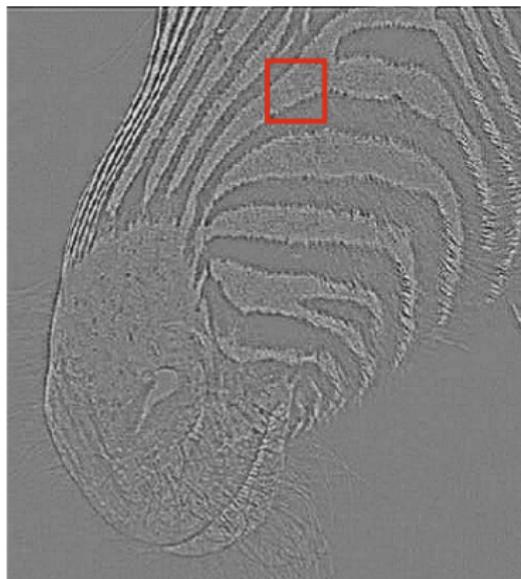


$$\frac{\partial I}{\partial y} \downarrow$$



I

Différences finies

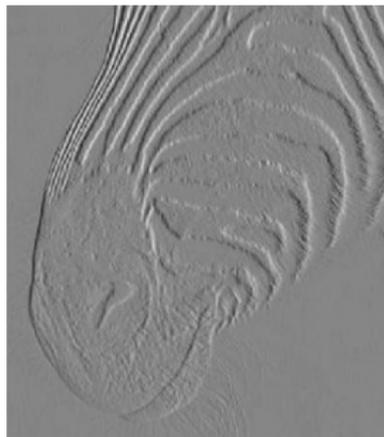


$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

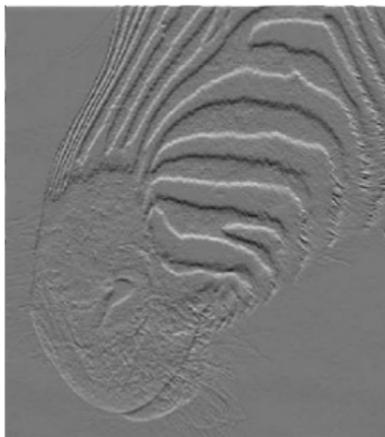


I

Sensibilité au bruit



$$\frac{\partial I}{\partial x} \rightarrow$$

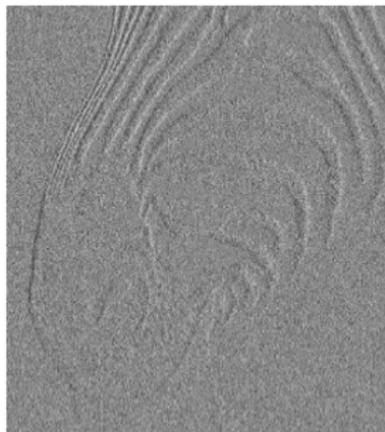


$$\frac{\partial I}{\partial y} \downarrow$$

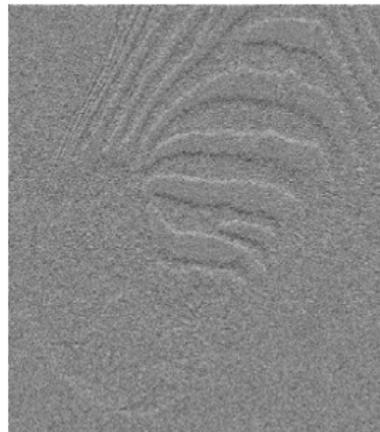


I

Sensibilité au bruit



$$\frac{\partial I}{\partial x} \rightarrow$$



$$\frac{\partial I}{\partial y} \downarrow$$



I

Sensibilité au bruit

pour augmenter la robustesse au bruit :

- Lisser l'image avant différentiation (par filtrage linéaire)

$$\frac{\partial I}{\partial x} := G_x * (H * I)$$

Sensibilité au bruit

pour augmenter la robustesse au bruit :

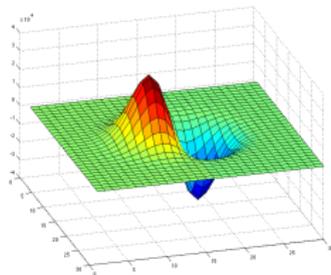
- Lisser l'image avant différentiation (par filtrage linéaire)

$$\frac{\partial I}{\partial x} := G_x * (H * I)$$

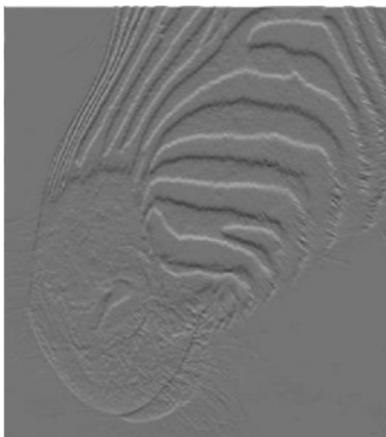
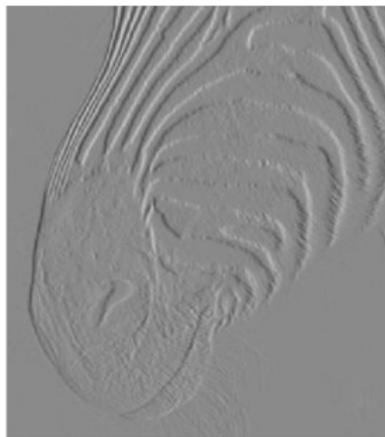
- Si H filtre moyenneur 3×3 → Filtre de Prewitt

- Si H filtre gaussien → $\frac{\partial I}{\partial x} := \frac{\partial G_\sigma * I}{\partial x} = \frac{\partial G_\sigma}{\partial x} * I$

$$\frac{\partial G_\sigma}{\partial x}$$



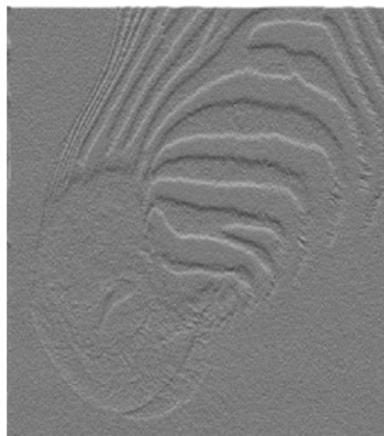
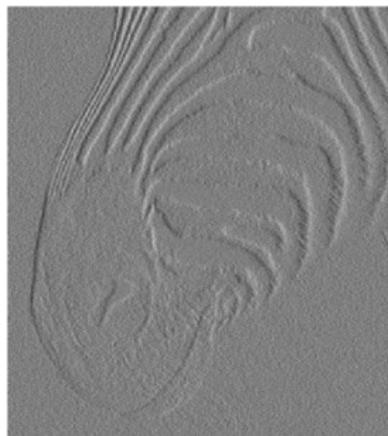
Différentiation et lissage



$\sigma = 1.5$



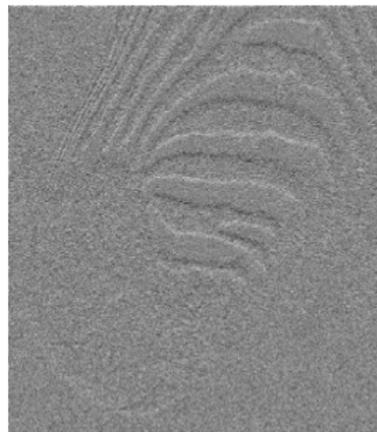
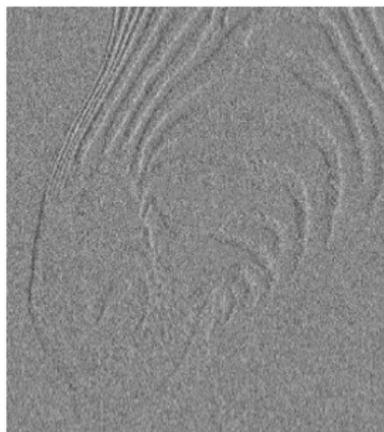
Différentiation et lissage



$$\sigma = 1.5$$

Différentiation et lissage

Sans lissage pour comparaison



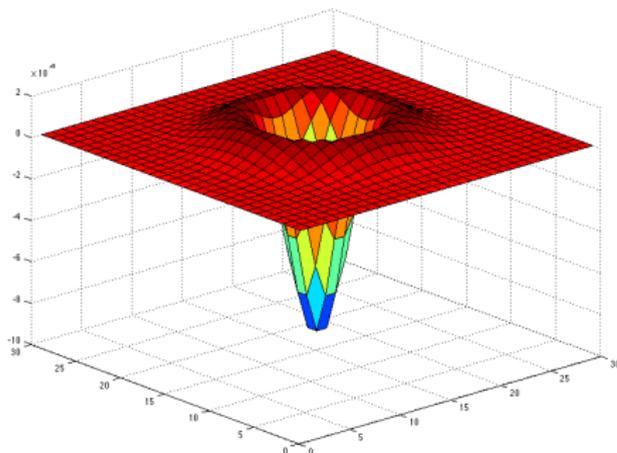
Différentiation et lissage

- Laplacien de Gaussienne (LoG)

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 G_\sigma * I}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial x^2} * I \quad \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 G_\sigma * I}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial y^2} * I$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} := (\Delta G_\sigma) * I$$

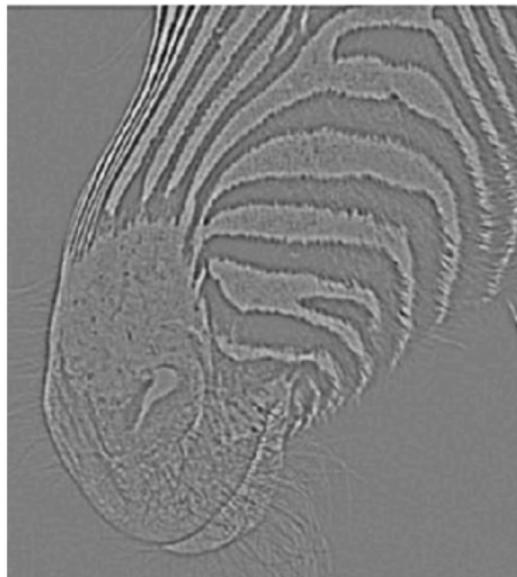
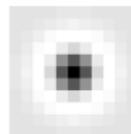
$$\Delta G_\sigma \quad \longleftrightarrow$$



Différentiation et lissage

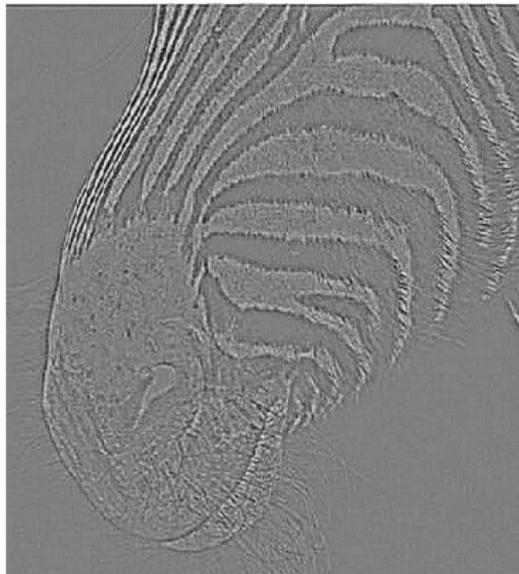
Laplacien de Gaussienne (LoG)

$$\sigma = 1.5$$



Différentiation et lissage

Sans lissage pour comparaison



Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- on utilise le développement de Taylor de $v(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on note $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$:

$$\text{(premier ordre)} \quad v(k \Delta x, (n + 1) \Delta t) = v_k^{n+1} =$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k + 1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k+1}^n =$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k - 1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k-1}^n =$$

- on en déduit des approximations des dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- on utilise le développement de Taylor de $v(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on note $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$:

(premier ordre) $v(k \Delta x, (n + 1) \Delta t) = v_k^{n+1} = v_k^n + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + o(\Delta t)$

(second ordre) $v((k + 1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k+1}^n =$

(second ordre) $v((k - 1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k-1}^n =$

- on en déduit des approximations des dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- on utilise le développement de Taylor de $v(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on note $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$:

$$\text{(premier ordre)} \quad v(k \Delta x, (n+1) \Delta t) = v_k^{n+1} = v_k^n + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + o(\Delta t)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k+1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k+1}^n = v_k^n + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k-1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k-1}^n =$$

- on en déduit des approximations des dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- on utilise le développement de Taylor de $v(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on note $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$:

$$\text{(premier ordre)} \quad v(k \Delta x, (n+1) \Delta t) = v_k^{n+1} = v_k^n + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + o(\Delta t)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k+1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k+1}^n = v_k^n + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k-1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k-1}^n = v_k^n - \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

- on en déduit des approximations des dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- on utilise le développement de Taylor de $v(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on note $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$:

$$\text{(premier ordre)} \quad v(k \Delta x, (n+1) \Delta t) = v_k^{n+1} = v_k^n + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + o(\Delta t)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k+1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k+1}^n = v_k^n + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k-1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k-1}^n = v_k^n - \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

- on en déduit des approximations des dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(k \Delta x, n \Delta t) = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + o(1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) =$$

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- on utilise le développement de Taylor de $v(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on note $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$:

$$\text{(premier ordre)} \quad v(k \Delta x, (n+1) \Delta t) = v_k^{n+1} = v_k^n + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + o(\Delta t)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k+1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k+1}^n = v_k^n + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k-1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k-1}^n = v_k^n - \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

- on en déduit des approximations des dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(k \Delta x, n \Delta t) = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + o(1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) = \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1)$$

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- Donc $\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1) = 0$

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- Donc $\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1) = 0$

- et finalement une approximation "raisonnable" de l'EDP semble être :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Analyse numérique

- Comment choisir Δx , Δt , ... ?

DEMO MATLAB

Analyse numérique

- Comment choisir Δx , Δt , ... ?

DEMO MATLAB

Précautions lors de la discrétisation numérique

- 1 Notion de consistance
- 2 Notion de stabilité

Précautions lors de la discrétisation numérique

- EDP, Notation continue : $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(v)(x, t) = g(x, t) & t > 0, & x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\mathcal{L} \text{ est l'opérateur définissant l'EDP})$$

(1)

Précautions lors de la discrétisation numérique

- EDP, Notation continue : $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(v)(x, t) = g(x, t) & t > 0, & x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\mathcal{L} \text{ est l'opérateur définissant l'EDP})$$

(1)

- *Exemple* : pour l'équation de la chaleur $\mathcal{L}(v) = \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $g = 0$

Précautions lors de la discrétisation numérique

- EDP, Notation continue : $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(v)(x, t) = g(x, t) & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\mathcal{L} \text{ est l'opérateur définissant l'EDP}) \quad (1)$$

- *Exemple* : pour l'équation de la chaleur $\mathcal{L}(v) = \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $g = 0$
- Notation discrète : $u_k^n \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$ (temps) et $k \in \mathbb{Z}$ (espace)

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\Delta(u_k^n) = g(k \Delta x, n \Delta t) \\ u_k^0 = f(k \Delta x) \end{cases} \quad (2)$$

Précautions lors de la discrétisation numérique

- EDP, Notation continue : $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(v)(x, t) = g(x, t) & t > 0, & x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\mathcal{L} \text{ est l'opérateur définissant l'EDP}) \quad (1)$$

- *Exemple* : pour l'équation de la chaleur $\mathcal{L}(v) = \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $g = 0$
- Notation discrète : $u_k^n \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$ (temps) et $k \in \mathbb{Z}$ (espace)

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\Delta(u_k^n) = g(k \Delta x, n \Delta t) \\ u_k^0 = f(k \Delta x) \end{cases} \quad (2)$$

- **Problématique** : choisir \mathcal{L}_Δ (à partir de \mathcal{L}) pour que la solution discrète u_k^n de (2) soit une "bonne approximation" de la solution continue $v(x, t)$ de (1).

Précautions lors de la discrétisation numérique

Définition : schéma convergent

On dit qu'il y a convergence si, quand Δx et $\Delta t \rightarrow 0$:

$$(k \Delta x, n \Delta t) \text{ converge vers } (x, t) \implies u_k^n \text{ converge vers } v(t, x)$$

- \rightarrow "si les pas de discrétisation deviennent petits, alors la solution discrète tend bien vers la solution continue théorique"

Précautions lors de la discrétisation numérique

Définition : schéma convergent

On dit qu'il y a convergence si, quand Δx et $\Delta t \rightarrow 0$:

$$(k \Delta x, n \Delta t) \text{ converge vers } (x, t) \implies u_k^n \text{ converge vers } v(t, x)$$

- \rightarrow "si les pas de discrétisation deviennent petits, alors la solution discrète tend bien vers la solution continue théorique"
- En général, la convergence est dure à montrer mais :

Théorème de Lax

Un schéma **consistant** pour un problème linéaire bien posé converge si et seulement si il est **stable**.

Consistance

Consistance – Erreur de troncature

On appelle "erreur de troncature" (ou "erreur de discrétisation") l'expression

$$R_{\Delta}(\phi) = \mathcal{L}_{\Delta}(\phi_k^n) - \mathcal{L}(\phi)$$

Le schéma est dit **consistant** si, pour toute fonction ϕ , l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δ tend vers 0 (i.e. lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers 0)

- → "Lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers 0, les approximations discrètes des dérivées présentes dans \mathcal{L}_{Δ} tendent bien vers les dérivées continues de \mathcal{L} "
- "Les dérivées sont bien approximées"
- → se montre facilement en utilisant la formule de Taylor.

Consistance : équation de la chaleur

- Équation de la chaleur : on a montré que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \alpha \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1)$$

avec $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$.

Consistance : équation de la chaleur

- Équation de la chaleur : on a montré que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \alpha \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1)$$

avec $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$.

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \alpha \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} \right) \xrightarrow{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} 0$$

Consistance : équation de la chaleur

- Équation de la chaleur : on a montré que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \alpha \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1)$$

avec $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$.

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \alpha \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} \right) \xrightarrow{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} 0$$

Donc, le schéma de discrétisation obtenu précédemment est bien

consistant avec l'équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

Consistance : exercices

- $\frac{y(x+h) - y(x-h)}{h}$ est-il une bonne approximation de $y'(x)$?
- $\frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}$ approxime ?
- Déterminez une approximation consistante d'ordre 2 de $y'(x)$ faisant intervenir une combinaison linéaire de $y(x)$, $y(x-h)$ et $y(x-2h)$.

Consistance : exercices

- $\frac{y(x+h) - y(x-h)}{h}$ est-il une bonne approximation de $y'(x)$?

NON : $2y'(x)$

- $\frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}$ approxime ?

- Déterminez une approximation consistante d'ordre 2 de $y'(x)$ faisant intervenir une combinaison linéaire de $y(x)$, $y(x-h)$ et $y(x-2h)$.

Consistance : exercices

- $\frac{y(x+h) - y(x-h)}{h}$ est-il une bonne approximation de $y'(x)$?

NON : $2y'(x)$

- $\frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}$ approxime ?

$y''(x)$

- Déterminez une approximation consistante d'ordre 2 de $y'(x)$ faisant intervenir une combinaison linéaire de $y(x)$, $y(x-h)$ et $y(x-2h)$.

Consistance : exercices

- $\frac{y(x+h) - y(x-h)}{h}$ est-il une bonne approximation de $y'(x)$?

NON : $2y'(x)$

- $\frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}$ approxime ?

$y''(x)$

- Déterminez une approximation consistante d'ordre 2 de $y'(x)$ faisant intervenir une combinaison linéaire de $y(x)$, $y(x-h)$ et $y(x-2h)$.

$$y'(x) = \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 3y(x)}{2h} + o(h)$$

Stabilité d'un schéma numérique

Stabilité d'un schéma numérique

Définition

On dit qu'un processus de calcul séquentiel (ou itératif) est « stable » si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas lors de la progression des calculs.

$$\|u^{n+1}\| \leq K \|u^0\|$$

- normes usuelles :

$$\|v\|_{\mathcal{L}^1} = \sum_k |v_k| \quad \|v\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\sum_k |v_k|^2} \quad \|v\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |v_k|$$

- Théorème de Lax \rightarrow "si on a bien choisi nos discrétisations, soit u^n reste borné et on a convergence, soit u^n explose"

Stabilité d'un schéma numérique

- Stabilité du schéma $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$ en considérant la norme $\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |u_k^n|$.

Stabilité d'un schéma numérique

- Stabilité du schéma $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$ en considérant la norme $\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |u_k^n|$.
si $(1 - 2r) \geq 0$, $u_k^{n+1} \leq (1 - 2r)\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$

Stabilité d'un schéma numérique

- Stabilité du schéma $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$ en considérant la norme $\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |u_k^n|$.

$$\text{si } (1 - 2r) \geq 0, \quad u_k^{n+1} \leq (1 - 2r)\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$$
$$u_k^{n+1} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

Stabilité d'un schéma numérique

- Stabilité du schéma $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$ en considérant la norme $\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |u_k^n|$.

$$\text{si } (1 - 2r) \geq 0, \quad u_k^{n+1} \leq (1 - 2r)\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$$
$$\sup_k u_k^{n+1} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

Stabilité d'un schéma numérique

- Stabilité du schéma $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$ en considérant la norme $\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |u_k^n|$.

$$\text{si } (1 - 2r) \geq 0, \quad u_k^{n+1} \leq (1 - 2r)\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$$
$$\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k u_k^{n+1} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Stabilité d'un schéma numérique

- Stabilité du schéma $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$ en considérant la norme $\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |u_k^n|$.

$$\text{si } (1 - 2r) \geq 0, \quad u_k^{n+1} \leq (1 - 2r)\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

$$\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k u_k^{n+1} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u^0\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

Stabilité d'un schéma numérique

- Stabilité du schéma $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$ en considérant la norme $\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |u_k^n|$.

$$\text{si } (1 - 2r) \geq 0, \quad u_k^{n+1} \leq (1 - 2r)\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

$$\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k u_k^{n+1} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u^0\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

Si $r \leq \frac{1}{2}$, le schéma est stable.

Stabilité d'un schéma numérique

- En général : plus compliqué. Une méthode possible, passer en Fourier

Stabilité d'un schéma numérique

- En général : plus compliqué. Une méthode possible, passer en Fourier

	En continu	En discret
Transformée de Fourier	$\widehat{v}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} v(t, x) dx$	$\widehat{u}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k$
Transformée de Fourier inverse	$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \widehat{v}(t, \omega) d\omega$	$u_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi$

Remarques : • i désigne le complexe tel que $i^2 = -1$ • les constantes (ici $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$) peuvent varier suivant les définitions.

Identité de Parseval	$\ v\ _{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \ \widehat{v}\ _{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$	$\ u\ _{\mathcal{L}^2} = \ \widehat{u}\ _{\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)}$
----------------------	---	--

FIGURE : Rappel sur les transformées de Fourier (continue et discrète)

Stabilité d'un schéma numérique : méthode de Fourier

Identité de Parseval : pour prouver la stabilité on peut raisonner en Fourier.

- on veut montrer que $\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|u^0\|_{\mathcal{L}^2}$

Stabilité d'un schéma numérique : méthode de Fourier

Identité de Parseval : pour prouver la stabilité on peut raisonner en Fourier.

- on veut montrer que $\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|u^0\|_{\mathcal{L}^2}$
- or : $\|u\|_{\mathcal{L}^2} = \|\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2}$ (\leftarrow Parseval)

Stabilité d'un schéma numérique : méthode de Fourier

Identité de Parseval : pour prouver la stabilité on peut raisonner en Fourier.

- on veut montrer que $\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|u^0\|_{\mathcal{L}^2}$
- or : $\|u\|_{\mathcal{L}^2} = \|\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2}$ (\leftarrow Parseval)
- on peut donc montrer que $\|\hat{u}^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|\hat{u}^0\|_{\mathcal{L}^2}$

Stabilité d'un schéma numérique : méthode de Fourier

Identité de Parseval : pour prouver la stabilité on peut raisonner en Fourier.

- on veut montrer que $\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|u^0\|_{\mathcal{L}^2}$
- or : $\|u\|_{\mathcal{L}^2} = \|\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2}$ (\leftarrow Parseval)
- on peut donc montrer que $\|\hat{u}^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|\hat{u}^0\|_{\mathcal{L}^2}$

Remarque :

$$\bullet \|u\|_{\mathcal{L}^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|^2 \quad \text{et} \quad \|\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) =$$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n$$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n$$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n = e^{-i\xi} \hat{f}(\xi)$$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n = e^{-i\xi} \hat{f}(\xi)$$

Propriété : Transf. de Fourier : on se "débarresse" des dérivées spatiales.

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n = e^{-i\xi} \widehat{f}(\xi)$$

Propriété : Transf. de Fourier : on se “débarrasse” des dérivées spatiales.

- en continu (résolution équation de la chaleur) $\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial x^2}(t, \omega) = -\omega^2 \widehat{v}(t, \omega)$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n = e^{-i\xi} \widehat{f}(\xi)$$

Propriété : Transf. de Fourier : on se "débarresse" des dérivées spatiales.

- en continu (résolution équation de la chaleur) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \omega) = -\omega^2 \widehat{v}(t, \omega)$
- en discret : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) \approx u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n$ (si $\Delta x = 1$, comme svt en image)

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n = e^{-i\xi} \widehat{f}(\xi)$$

Propriété : Transf. de Fourier : on se "débarresse" des dérivées spatiales.

- en continu (résolution équation de la chaleur) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \omega) = -\omega^2 \widehat{v}(t, \omega)$
- en discret : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) \approx \underbrace{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}_A$ (si $\Delta x = 1$, comme svt en image)

$$\widehat{A}(\xi) =$$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n = e^{-i\xi} \widehat{f}(\xi)$$

Propriété : Transf. de Fourier : on se "débarresse" des dérivées spatiales.

- en continu (résolution équation de la chaleur) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \omega) = -\omega^2 \widehat{v}(t, \omega)$
- en discret : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) \approx \underbrace{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}_A$ (si $\Delta x = 1$, comme svt en image)

$$\widehat{A}(\xi) = e^{i\xi} \widehat{u}_k^n(\xi) - 2\widehat{u}_k^n(\xi) + e^{-i\xi} \widehat{u}_k^n(\xi) =$$

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n = e^{-i\xi} \widehat{f}(\xi)$$

Propriété : Transf. de Fourier : on se "débarresse" des dérivées spatiales.

- en continu (résolution équation de la chaleur) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \omega) = -\omega^2 \widehat{v}(t, \omega)$
- en discret : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) \approx \underbrace{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}_A$ (si $\Delta x = 1$, comme svt en image)

$$\widehat{A}(\xi) = e^{i\xi} \widehat{u}_k^n(\xi) - 2\widehat{u}_k^n(\xi) + e^{-i\xi} \widehat{u}_k^n(\xi) = 2(\cos(\xi) - 1) \widehat{u}_k^n(\xi)$$

Exemple : équation de la chaleur

- EDP :
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Exemple : équation de la chaleur

- EDP : $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$
- On a vu une discrétisation consistante possible :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Exemple : équation de la chaleur

- EDP : $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$
- On a vu une discrétisation consistante possible :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\widehat{u}^{n+1}(\xi) = (1 + 2r(\cos(\xi) - 1))\widehat{u}^n(\xi) = \left(1 + 2r(\cos(\xi) - 1)\right)^{n+1} \widehat{u}^0(\xi)$$

Exemple : équation de la chaleur

- EDP :
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

- On a vu une discrétisation consistante possible :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\widehat{u}^{n+1}(\xi) = (1 + 2r(\cos(\xi) - 1))\widehat{u}^n(\xi) = \left(1 + 2r(\cos(\xi) - 1)\right)^{n+1} \widehat{u}^0(\xi)$$

Stable si, et seulement si, $|1 + 2r(\cos(\xi) - 1)| \leq 1$, pour tout ξ

Exemple : équation de la chaleur

- EDP :
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
- On a vu une discrétisation consistante possible :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\widehat{u}^{n+1}(\xi) = (1 + 2r(\cos(\xi) - 1))\widehat{u}^n(\xi) = \left(1 + 2r(\cos(\xi) - 1)\right)^{n+1} \widehat{u}^0(\xi)$$

Stable si, et seulement si, $|1 + 2r(\cos(\xi) - 1)| \leq 1$, pour tout ξ
 $\iff -1 \leq 1 + 2r(\cos(\xi) - 1) \leq 1$, pour tout ξ

Exemple : équation de la chaleur

- EDP :
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

- On a vu une discrétisation consistante possible :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\widehat{u}^{n+1}(\xi) = (1 + 2r(\cos(\xi) - 1))\widehat{u}^n(\xi) = \left(1 + 2r(\cos(\xi) - 1)\right)^{n+1} \widehat{u}^0(\xi)$$

Stable si, et seulement si, $|1 + 2r(\cos(\xi) - 1)| \leq 1$, pour tout ξ

$$\iff -1 \leq 1 + 2r(\cos(\xi) - 1) \leq 1, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\iff -1 \leq r(\cos(\xi) - 1) \leq 0, \quad \text{pour tout } \xi$$

Exemple : équation de la chaleur

- EDP :
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

- On a vu une discrétisation consistante possible :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\widehat{u}^{n+1}(\xi) = (1 + 2r(\cos(\xi) - 1))\widehat{u}^n(\xi) = \left(1 + 2r(\cos(\xi) - 1)\right)^{n+1} \widehat{u}^0(\xi)$$

Stable si, et seulement si, $|1 + 2r(\cos(\xi) - 1)| \leq 1$, pour tout ξ

$$\iff -1 \leq 1 + 2r(\cos(\xi) - 1) \leq 1, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\iff -1 \leq r(\cos(\xi) - 1) \leq 0, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\iff 0 \leq r \leq \frac{1}{1 - \cos(\xi)}, \quad \text{pour tout } \xi$$

Exemple : équation de la chaleur

- EDP :
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

- On a vu une discrétisation consistante possible :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\widehat{u}^{n+1}(\xi) = (1 + 2r(\cos(\xi) - 1))\widehat{u}^n(\xi) = \left(1 + 2r(\cos(\xi) - 1)\right)^{n+1} \widehat{u}^0(\xi)$$

Stable si, et seulement si, $|1 + 2r(\cos(\xi) - 1)| \leq 1$, pour tout ξ

$$\iff -1 \leq 1 + 2r(\cos(\xi) - 1) \leq 1, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\iff -1 \leq r(\cos(\xi) - 1) \leq 0, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\iff 0 \leq r \leq \frac{1}{1 - \cos(\xi)}, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\iff 0 \leq r \leq \frac{1}{2}$$

DEMO MATLAB

Exercice : équation de la chaleur (schéma implicite)

- un schéma est dit **explicite** si on peut écrire u_k^{n+1} en fonction de u_i^n pour certains i
 - exemple : $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$
 - facile à implémenter

Exercice : équation de la chaleur (schéma implicite)

- un schéma est dit **explicite** si on peut écrire u_k^{n+1} en fonction de u_i^n pour certains i
 - exemple : $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$
 - facile à implémenter
- un schéma est dit **implicite** si ce n'est pas le cas
 - Le schéma suivant est un schéma implicite consistant avec l'équation de la chaleur

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Exercice : équation de la chaleur (schéma implicite)

- un schéma est dit **explicite** si on peut écrire u_k^{n+1} en fonction de u_i^n pour certains i
 - exemple : $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$
 - facile à implémenter
- un schéma est dit **implicite** si ce n'est pas le cas
 - Le schéma suivant est un schéma implicite consistant avec l'équation de la chaleur

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

- Étudier sa stabilité

Rappel : $\widehat{u}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im\xi} u_m$, (où i désigne le complexe $i^2 = -1$)

Exercice : équation de la chaleur (schéma implicite)

- un schéma est dit **explicite** si on peut écrire u_k^{n+1} en fonction de u_i^n pour certains i
 - exemple : $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$
 - facile à implémenter
- un schéma est dit **implicite** si ce n'est pas le cas
 - Le schéma suivant est un schéma implicite consistant avec l'équation de la chaleur

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

- Étudier sa stabilité

Rappel : $\hat{u}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im\xi} u_m$, (où i désigne le complexe $i^2 = -1$)

On obtient $\hat{u}^{n+1}(\xi) = \frac{1}{1+2r(1-\cos(\xi))} \hat{u}^n(\xi)$

Exercice : équation de la chaleur (schéma implicite)

- un schéma est dit **explicite** si on peut écrire u_k^{n+1} en fonction de u_i^n pour certains i
 - exemple : $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$
 - facile à implémenter
- un schéma est dit **implicite** si ce n'est pas le cas
 - Le schéma suivant est un schéma implicite consistant avec l'équation de la chaleur

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

- Étudier sa stabilité

Rappel : $\hat{u}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im\xi} u_m$, (où i désigne le complexe $i^2 = -1$)

On obtient $\hat{u}^{n+1}(\xi) = \frac{1}{1+2r(1-\cos(\xi))} \hat{u}^n(\xi)$ or on a $1 - \cos(\xi) \geq 0$ donc

$$\frac{1}{1+2r(1-\cos(\xi))} \leq 1$$

Exercice : équation de la chaleur (schéma implicite)

- un schéma est dit **explicite** si on peut écrire u_k^{n+1} en fonction de u_i^n pour certains i
 - exemple : $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$
 - facile à implémenter
- un schéma est dit **implicite** si ce n'est pas le cas
 - Le schéma suivant est un schéma implicite consistant avec l'équation de la chaleur

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

- Étudier sa stabilité

Rappel : $\hat{u}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im\xi} u_m$, (où i désigne le complexe $i^2 = -1$)

On obtient $\hat{u}^{n+1}(\xi) = \frac{1}{1+2r(1-\cos(\xi))} \hat{u}^n(\xi)$ or on a $1 - \cos(\xi) \geq 0$ donc $\frac{1}{1+2r(1-\cos(\xi))} \leq 1$ et on obtient un schéma inconditionnellement stable (mais difficile à implémenter car schéma **implicite**)