

Partie 2: Dérivées, Opérateurs, Discrétisation

Pierre Maurel

Visages, IRISA/INRIA

pierre.maurel@irisa.fr

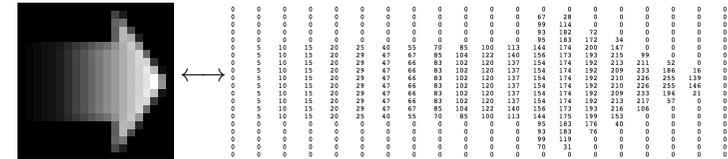
<http://www.normalesup.org/~pmaurel/IMA/>

Qu'est-ce qu'une image ?

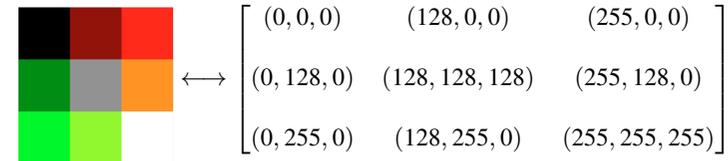
Plusieurs réponses possibles

- Réponse "informatique" → un **tableau** de valeurs, une **matrice** de pixels (*picture element*)

- Image en niveau de gris, valeurs entre 0 (noir) et 255 (blanc)



- Image en couleur, triplet de valeurs entre 0 et 255 (RGB : Red/Green/Blue)

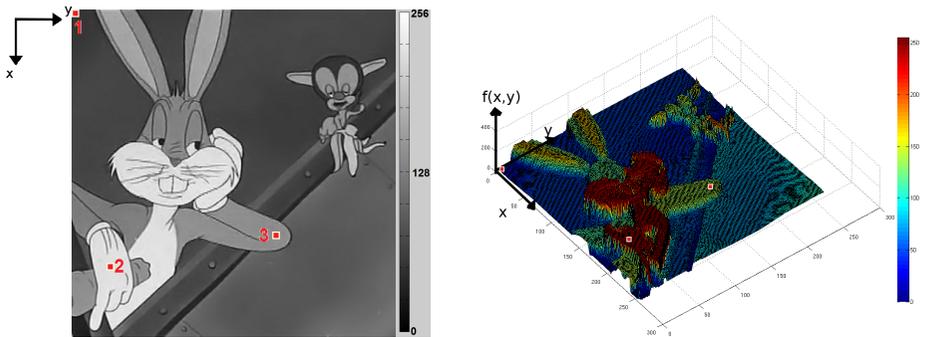


Qu'est-ce qu'une image ?

Plusieurs réponses possibles

- Réponse "mathématique" → une **fonction**, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

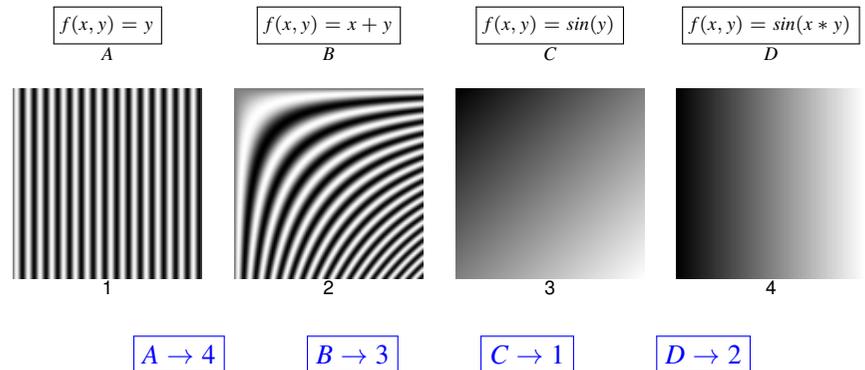
- f associe un niveau de gris $f(x, y)$ à une position (x, y)



Autre visualisation de la fonction f (en fausses couleurs)

- Ici, on a, par exemple (pour une image de taille 512×512)
 $3 \rightarrow f(320, 350) = 130$ $1 \rightarrow f(1, 1) = 50$ $2 \rightarrow f(400, 60) = 230$

Une image en tant que fonction : exemples



- En pratique : pour une image réelle, on n'a pas de formule explicite pour la fonction f correspondante.



→ $f = ?$

Manipulations basiques sur les images

$$f(x, y) \longrightarrow$$



$$g_1(x, y) = 255 - f(x, y)$$

$$g_2(x, y) = f(y, x)$$

$$g_3(x, y) = f(x, y)/3$$

$$g_4(x, y) = f(x, y) * 2$$



A



B



C



D

$$g_1 \rightarrow D$$

$$g_2 \rightarrow A$$

$$g_3 \rightarrow C$$

$$g_4 \rightarrow B$$

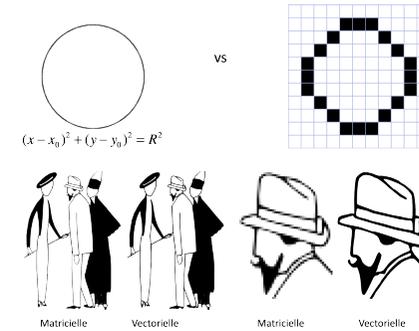
- manipulations de fonctions ... dérivées = ?

6 / 72

Autres possibilités

Images vectorielles

- composées d'entités mathématiques (cercles, lignes, etc)
- chaque entité est décrite par une formule mathématique :



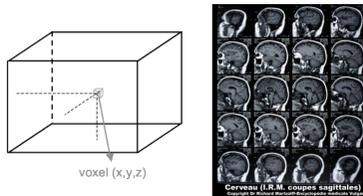
- Avantages : zoom infini, définir une image avec peu d'informations
- Inconvénients : représentation de formes simples, pas d'images réalistes.

7 / 72

Autres possibilités

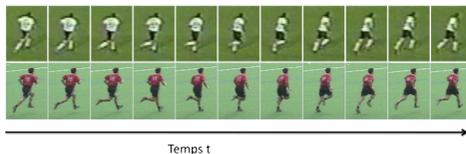
Images 3D

- On parle de *voxels* plutôt que de *pixels*.



Images 2D+t

- variante du 3D, il s'agit des vidéos

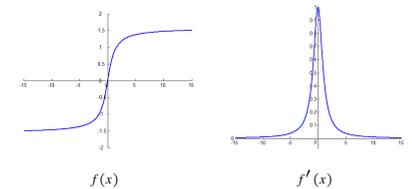


Temps t

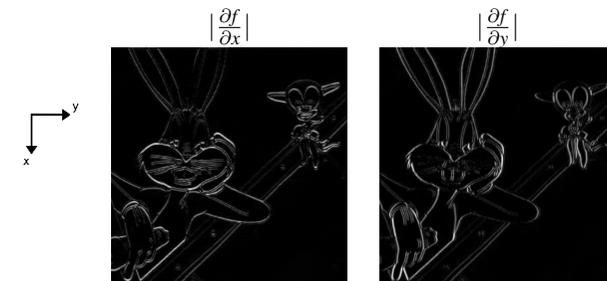
8 / 72

Dérivées partielles : une image

- En 1D : dérivée forte \Rightarrow forte variation de la fonction :

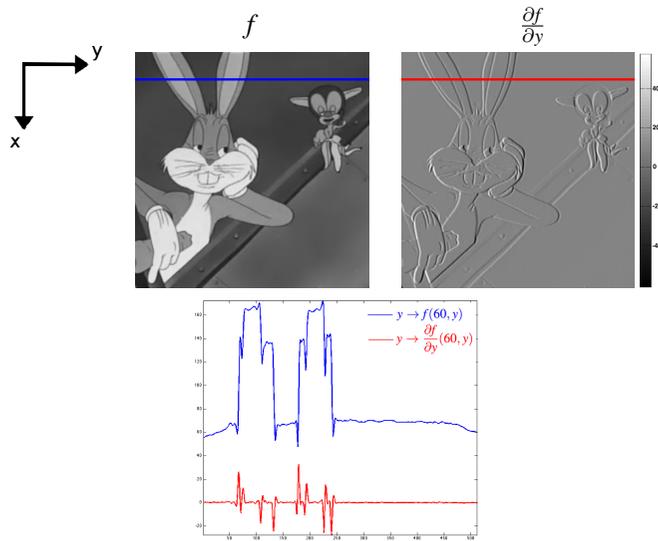


- En 2D (ou plus) : la dérivée partielle dans une direction indique la variation de l'image dans cette direction



10 / 72

Dérivées partielles : une image



11/72

Opérateurs usuels : Gradient

- Le gradient en un point d'une image est un opérateur très important et est utilisé dans de nombreux cas
- f est un champ de **scalaires**, le gradient de f est un champ de **vecteurs** :

$$\vec{\text{grad}} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

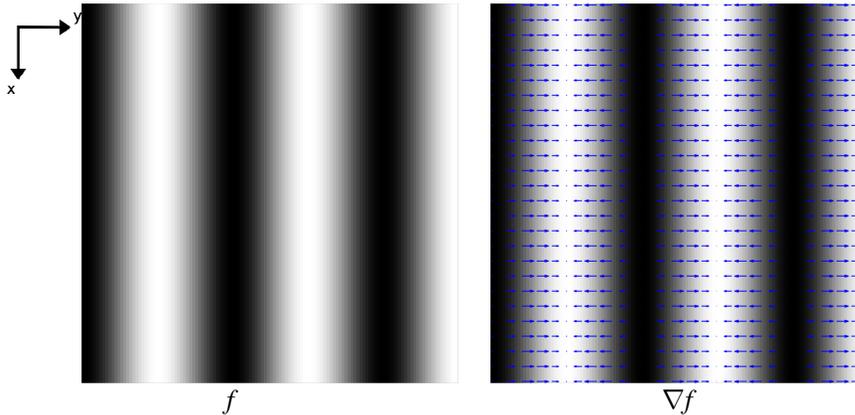
- $f(10, 10)$ est un scalaire ($\in \mathbb{R}$) mais $(\nabla f)(10, 10)$ est un vecteur ($\in \mathbb{R}^2$)
- Exemple : $f(x, y) = \underbrace{xy^2 + e^x}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \nabla f(x, y) = \underbrace{(y^2 + e^x, 2xy)}_{\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

12/72

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple

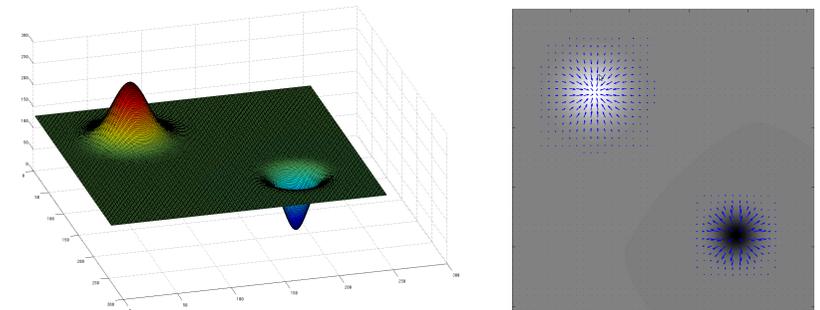
- $f(x, y) = \sin(y)$
- $\nabla f(x, y) = (0, \cos(y))$



13/72

Opérateurs usuels : Gradient

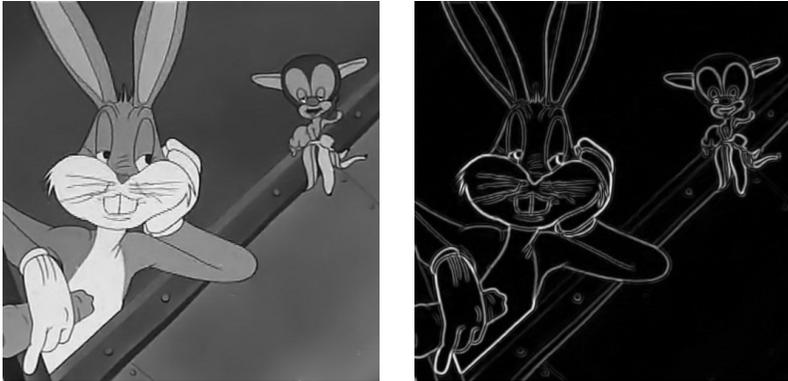
- le **vecteur** $\vec{\text{grad}} f(x, y)$ (ou $\nabla f(x, y)$) indique la direction et l'intensité de la plus grande variation du champ scalaire f autour du point (x, y)
- interprétation : direction de "plus grande pente" et valeur de cette pente.



14/72

Opérateurs usuels : Gradient

- les zones de fort gradient sont donc des zones de fortes variations



f

Norme du gradient

$$\|\vec{\text{grad}} f\| = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$

15/72

Opérateurs usuels : Gradient

- les zones de fort gradient sont donc des zones de fortes variations



f

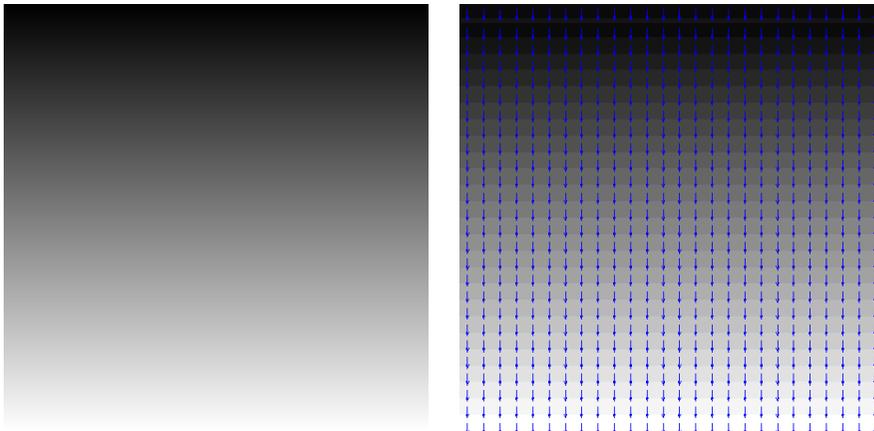
Norme du gradient

$$\|\vec{\text{grad}} f\| = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$

16/72

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients



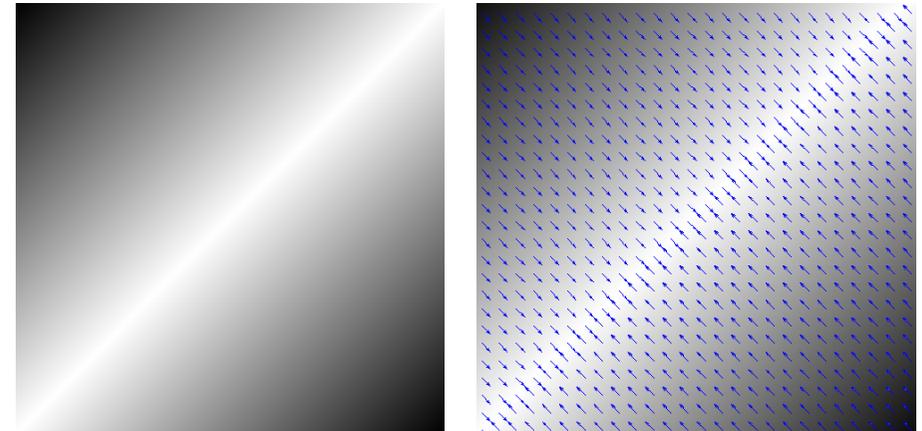
f

$\vec{\text{grad}} f$

17/72

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients



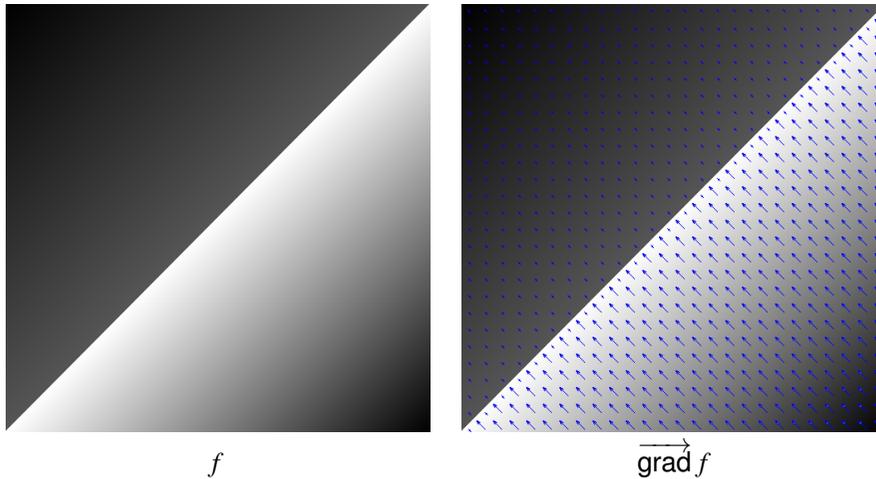
f

$\vec{\text{grad}} f$

18/72

Opérateurs usuels : Gradient

Exemple de champ de gradients



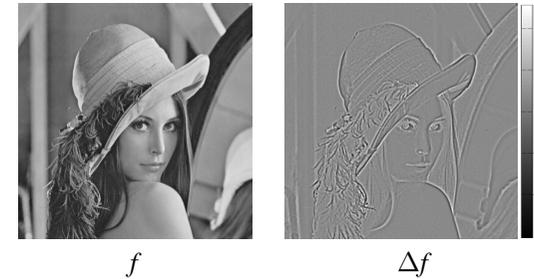
19/72

Opérateurs usuels : Laplacien

- f est un champ de **scalaires**, le laplacien de f est également un champ de **scalaires** :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

- Exemple : $f(x, y) = \underbrace{xy^2 + e^x}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \Delta f(x, y) = \underbrace{e^x + 2x}_{\in \mathbb{R}}$



- Nombreuses applications physiques (eq de Poisson $\Delta \phi = f$)

20/72

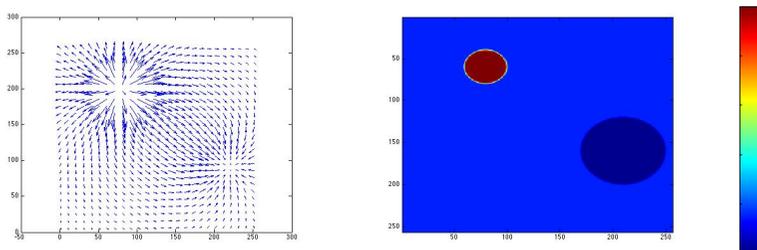
Opérateurs usuels : Divergence

- Divergence d'un champ $w = (w_1, \dots, w_n)$ (**vecteurs** \rightarrow **scalaires**) :

$$\text{div } w = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = \nabla \cdot w$$

- Exemple : $w(x, y) = \underbrace{(y^2 + e^x, 2xy)}_{\in \mathbb{R}^2} \Rightarrow \text{div } w(x, y) = \underbrace{e^x + 2x}_{\in \mathbb{R}}$

- interprétation physique : variation infinitésimale du volume autour d'un point



21/72

Opérateurs usuels : Rotationnel

- $w = (w_1, \dots, w_n)$ est un champ de **vecteurs** et son rotationnel est aussi un champ de **vecteurs** :

$$\text{rot } w = \nabla \wedge w$$

$$\text{Cas 3D : } \text{rot } w = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w/\partial y - \partial v/\partial z \\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \end{bmatrix}$$

- **Résumé :**

- grad : **scalaire** \mapsto **vecteur**
- div : **vecteur** \mapsto **scalaire**
- rot : **vecteur** \mapsto **vecteur**
- Δ (laplacien) : **scalaire** \mapsto **scalaire**

- **Remarque :** Tous ces opérateurs sont **linéaires**.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f + \beta \overrightarrow{\text{grad}} g$$

22/72

Opérateurs usuels

Quelques formules

- $\Delta = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}})$
- $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \nabla \wedge \nabla = 0$
- $\text{div}(\text{rot}) = 0$
- $\text{rot}(\text{rot}) = \nabla \wedge \nabla w = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \Delta$
- $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{B} + \vec{A} \wedge \text{rot}(\vec{B}) + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} + \vec{B} \wedge \text{rot}(\vec{A})$
- $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\overrightarrow{\text{grad}}(f)$
- $\text{div}(f\vec{A}) = f\text{div}(\vec{A}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{A}$
- $\text{rot}(f\vec{A}) = f\text{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{A}$
- $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\Delta f$

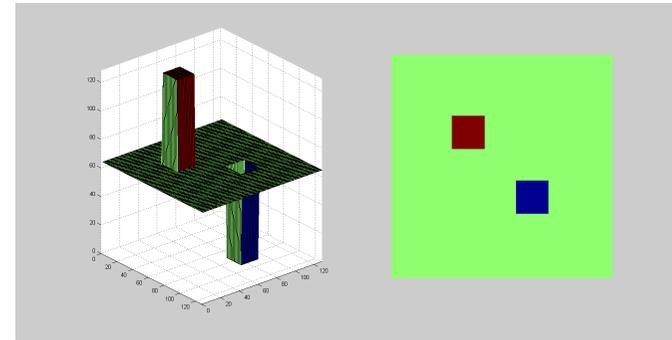
23 / 72

Équation de la chaleur

- décrit le phénomène physique de conduction thermique (Fourier, 1811)
- évolution de la température sans contraintes extérieures
- $T(x, y, t)$ le champ de température sur un domaine Ω :

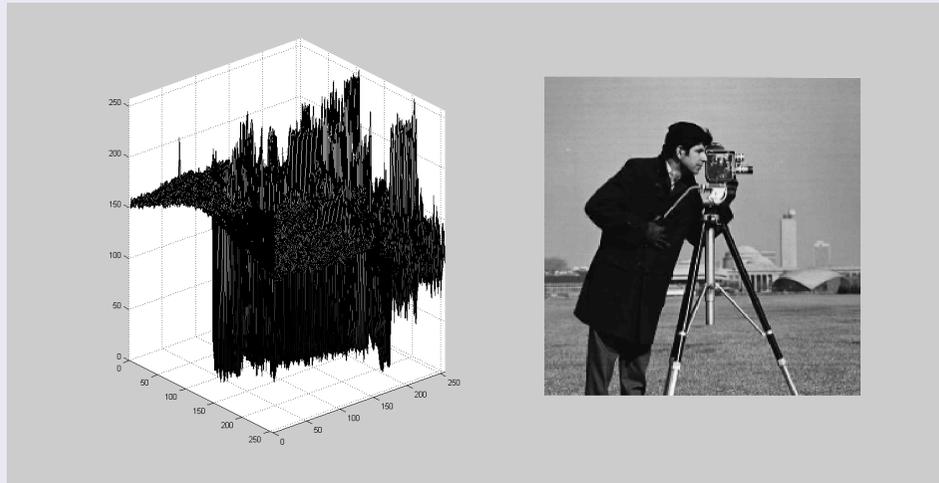
$$\forall (x, y) \in \Omega, \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \Delta T(x, y, t) \quad \text{et} \quad T(x, y, 0) = T_0$$

(attention le laplacien est uniquement en "espace", sur x et y : $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.)



24 / 72

Équation de la chaleur sur une image



On parle de **diffusion isotrope** : pas d'orientation préférentielle.

25 / 72

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier : (attention les constantes peuvent différer selon les définitions)

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{et} \quad \text{TF}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

- Ce qui permet de se "débarrasser" des dérivées spatiales

$$\text{TF}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t}$$

$$\text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right)(\omega) = -\omega^2 \text{TF}(u)(\omega) \quad (\text{par intégration par parties et en supposant } u \text{ à support borné})$$

26 / 72

Résolution de l'équation de la chaleur

- On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow \text{TF}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = \text{TF}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \text{TF}(u)}{\partial t} = -\omega^2 \text{TF}(u) \\ &\Rightarrow \text{TF}(u)(\omega, t) = f(\omega) e^{-\omega^2 t} \quad (f \text{ est quelconque}). \end{aligned}$$

- Condition initiale : $u(x,0) = u_0(x)$, donc $\text{TF}(u)(\omega, 0) = \text{TF}(u_0)(\omega)$

- on prend donc $f(\omega) = \text{TF}(u_0)(\omega)$

- La transformée de Fourier transforme la multiplication en convolution**

$$\begin{aligned} \text{TF}(u) &= \text{TF}(u_0) e^{-\omega^2 t} \Rightarrow u = \text{TF}^{-1}\left(\text{TF}(u_0) e^{-\omega^2 t}\right) \\ &\Rightarrow u = u_0 * \text{TF}^{-1}\left(e^{-\omega^2 t}\right) \end{aligned}$$

- La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.**

27/72

Résolution de l'équation de la chaleur

- On montre que la solution est : $u(x,t) = g(x,t) * u_0(x)$

$$\text{avec } g(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow \text{Gaussienne d'écart type } \sigma = \sqrt{2t}$$

- g est la *fonction de Green* associée à l'équation de la chaleur.

Solution de l'équation de la chaleur 1D

Si la donnée initiale u_0 est suffisamment régulière, la solution explicite de l'équation

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ avec } u(x,0) = u_0(x), \forall x$$

est donnée par :

$$u(x,t) = G_{\sqrt{2t}}(x,t) * u_0(x)$$

28/72

Résolution de l'équation de la chaleur

- Cas 1D : diffusion isotrope du signal u_0 sur \mathbb{R} :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ avec } u(x,0) = u_0(x), \forall x$$

- On utilise la transformée de Fourier (attention les constantes peuvent différer selon les définitions) :

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

- Transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{TF}(f)(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \text{TF}^{-1}(\text{TF}(f))$$

- On montre que la solution est $u(x,t) = g(x,t) * u_0(x)$

$$\text{avec } g(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow \text{Gaussienne d'écart type } \sigma = \sqrt{2t}$$

- g est la *fonction de Green* associée à l'équation de la chaleur.

29/72

Équation de la chaleur sur une image

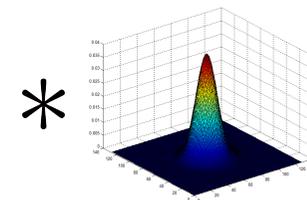
- Retour au 2D+t

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \Delta u(x,y,t) \quad \text{et} \quad u(x,y,0) = u_0(x,y)$$

- on peut montrer que la solution est donnée par

$$u(x,y,t) = G(x,y,\sigma(t)) * u_0(x,y)$$

où $G(x,y,\sigma(t))$ est une gaussienne dont l'écart-type σ est **proportionnel à t** et $*$ est l'opérateur de convolution.



30/72

Équation de la chaleur sur une image

$$(0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5)$$



$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$



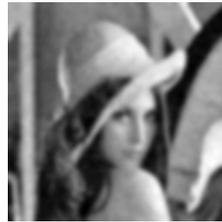
$$u(x, y, t_1) = G(x, y, \sqrt{2t_1}) * u_0(x, y)$$



$$u(x, y, t_2) = G(x, y, \sqrt{2t_2}) * u_0(x, y)$$



$$u(x, y, t_3) = G(x, y, \sqrt{2t_3}) * u_0(x, y)$$



$$u(x, y, t_4) = G(x, y, \sqrt{2t_4}) * u_0(x, y)$$



$$u(x, y, t_5) = G(x, y, \sqrt{2t_5}) * u_0(x, y)$$

31/72

Interprétation de l'équation de la chaleur par la diffusion

- Diffusion isotrope de l'image I_0

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I = \text{div}(\nabla I)$$

- On diffuse selon toutes les directions de ∇I
- En particulier on diffuse autant au niveau des contours qu'à l'intérieur
- \rightarrow trop flou
- Diffusion non-linéaire (« anisotrope »)

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(c(|\nabla I|)\nabla I)$$

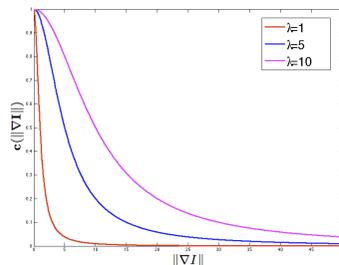
où c est une fonction décroissante du gradient.

32/72

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik

- Lissage des zones à faible gradient (réduction du bruit) $\rightarrow c(0) = 1$
- Atténuation de la diffusion lorsque le gradient est important (préservation des singularités et contours) $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = 0$

exemples : $c(u) = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{\lambda^2}}$ $c(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{\lambda^2}\right)$



- Cette diffusion est en fait toujours **isotrope**. En effet c ne dépend pas de la **direction** du gradient mais uniquement de sa **norme**.

33/72

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik



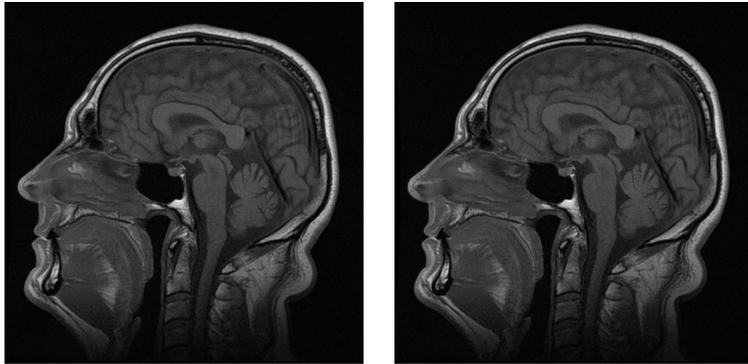
diffusion isotrope



diffusion Perona-Malik

34/72

Exemple de diffusion non linéaire : Perona-Malik



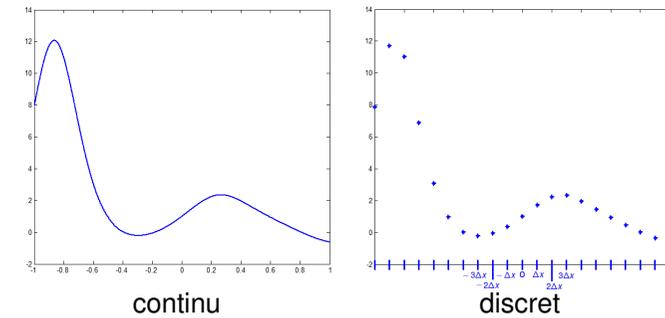
diffusion isotrope

diffusion Perona-Malik

35 / 72

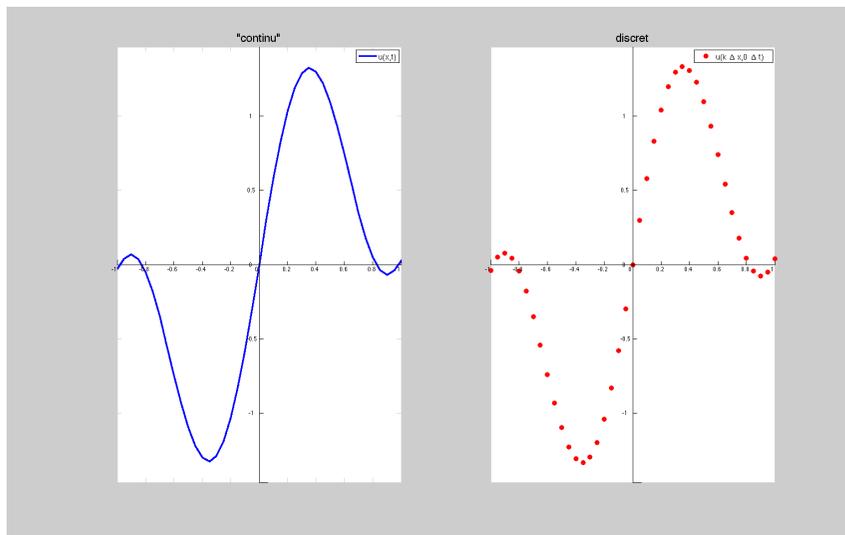
Du continu au discret

- théorie : fonctions "continues" (définies en tout point)
 - cas 1-D + temps : $v : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, t) \in \mathbb{R}$
 - cas 2-D + temps : $v : (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, y, t) \in \mathbb{R}$
- mais en pratique : fonctions **discrétisées**, définies sur une grille **finie** $k \Delta x$ et pour certains instants $n \Delta t$



37 / 72

Du continu au discret



38 / 72

Continu / discret

- **Problème** : l'EDP que l'on cherche à résoudre n'est définie qu'en **continu**, cf définition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, \boxed{a_i + h}, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

→ comment **approximer** ces dérivées ?

- plusieurs possibilités : éléments finis, méthodes spectrales, **différences finies**
- On va donc chercher une solution à une nouvelle EDP **discrète** → solution approchée de l'EDP originale (**continue**)

39 / 72

Continu / discret

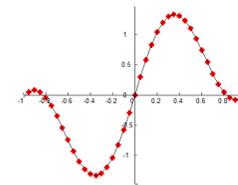
- “**Avantage**” : en **discret**, on n’a pas forcément besoin de trouver la solution exacte (analytique) de l’EDP.
- Pour l’équation de la chaleur (en continu), on a vu qu’on pouvait trouver la solution analytique :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \implies u(x, t) = G_{\sigma(t)} * u_0(x)$$

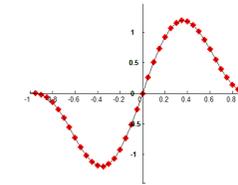
- Mais c’est très souvent impossible
- En discret on peut espérer **construire** une solution à partir de la condition initiale (fonction ou image initiale)
- En particulier, s’il y a une variable temporelle ($f(x_1, \dots, x_n, t)$), on peut partir de la condition initiale et “construire” la solution à l’instant $(n + 1) \Delta t$ en fonction de la solution à l’instant $n \Delta t$

40/72

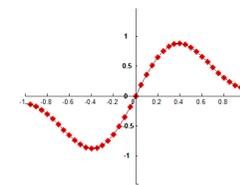
“Construction” de la solution discrète



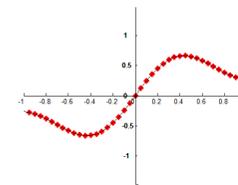
$$u(x, 0) = u_0(x)$$



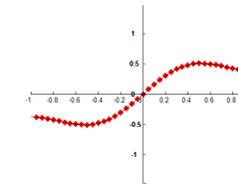
$$u(x, \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 0))$$



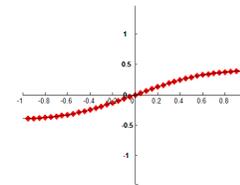
$$u(x, 2 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, \Delta t))$$



$$u(x, 3 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 2 \Delta t))$$



$$u(x, 4 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 3 \Delta t))$$



$$u(x, 5 \Delta t) \stackrel{?}{=} F(u(x, 4 \Delta t))$$

41/72

Discrétisation des dérivées

- En continu, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: on défini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

- En discret, la fonction/image est définie sur une grille (pixels) :

$$u(i \Delta x, j \Delta y)$$

- Comment définir la dérivée partielle de u par rapport à x ?

$$\bullet \frac{u(i \Delta x + \Delta x, j \Delta y) - u(i \Delta x, j \Delta y)}{\Delta x} \quad ? \quad \dots \quad \frac{u(i \Delta x - \Delta x, j \Delta y) - u(i \Delta x, j \Delta y)}{-\Delta x} \quad ?$$

$$\dots \quad \frac{u(i \Delta x + \Delta x, j \Delta y) - u(i \Delta x - \Delta x, j \Delta y)}{2 \Delta x} \quad ?$$

42/72

Conditions aux bords

- \mathcal{I} est une image définie sur Ω
- Ω est borné
- comment définir les dérivées de \mathcal{I} sur les bords de Ω (noté $\text{Fr}(\Omega)$) ?
Même problème pour la convolution (filtrage)
- \rightarrow on prolonge de manière arbitraire l’image
 - ne pas traiter le bord : nouvelle image plus petite que l’originale
 - compléter l’extérieur de l’image originale avec des 0 (padding)
 - compléter l’extérieur de l’image originale en symétrisant ses valeurs aux bords (mirroring)
 - compléter l’extérieur de l’image originale par extrapolation de ses valeurs aux bords
 - compléter l’extérieur de l’image originale par périodisation

43/72

Conditions aux bords

Exple : par réflexion ($\frac{\partial f}{\partial N} = 0$ sur $\text{Fr}(\Omega)$)



44/72

Différences finies

- Notation "petit o" : "négligeable devant"

$$f(x) = o(g(x)), \quad \text{lorsque} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

- Exemples : $x^{n+1} = o(x^n)$, $28x^{n+1} + x^{n+3} = o(x^n)$

- Formule de Taylor-Young :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n)$$

- Formule de Taylor-Young pour une fonction à plusieurs variables :

$$u(x+h, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, y)h^n + o(h^n)$$

45/72

Différences finies

- Soit $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une image

- on a $v(x + \Delta x, y) = v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o(\Delta x)$

$$\text{donc} \quad \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + o(1)$$

- Pour une image, Δx et Δy n'ont pas de sens particulier et sont généralement pris égaux à 1 pour simplifier les formules

- Approximations classiques pour $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$:

$$\text{Schéma "avant" : } v(x+1, y) - v(x, y)$$

$$\text{Schéma "arrière" : } v(x, y) - v(x-1, y)$$

$$\text{Schéma "centré" : } \frac{v(x+1, y) - v(x-1, y)}{2}$$

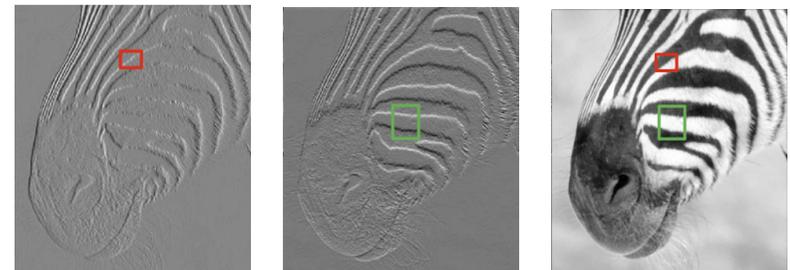
46/72

Différences finies

- Filtres associés

$$\nabla I = \begin{bmatrix} G_x * I \\ G_y * I \end{bmatrix} \quad \text{avec } G_x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{et } G_y = G_x^T$$

$$\Delta I = D * I, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



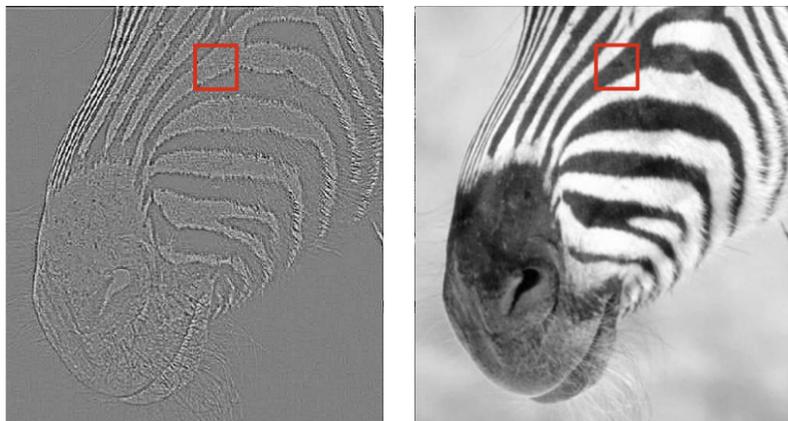
$$\frac{\partial I}{\partial x} \rightarrow$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} \downarrow$$

I

47/72

Différences finies

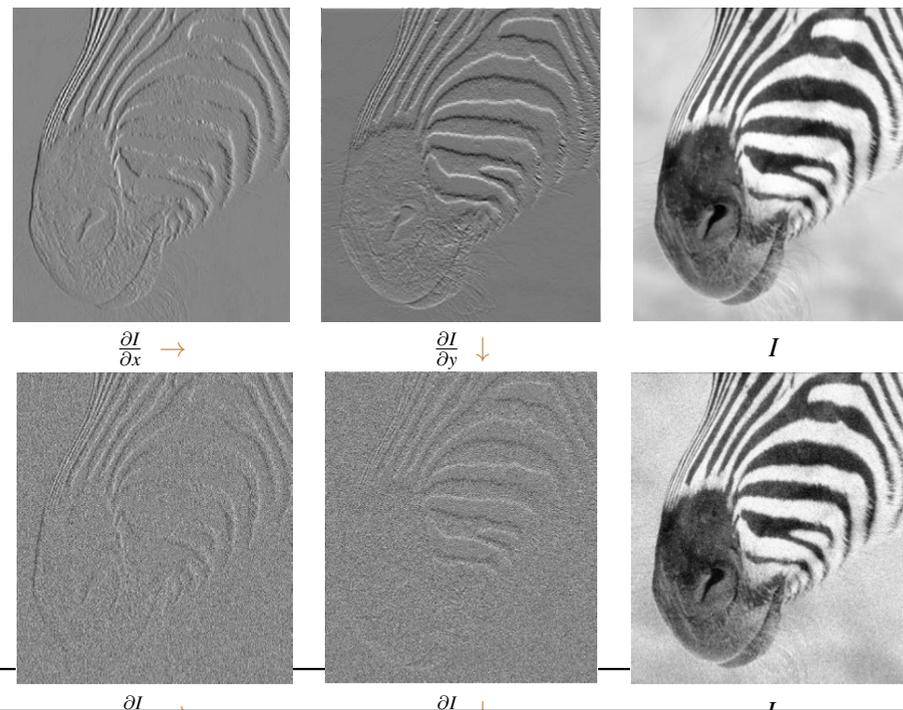


$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

I

48/72

Sensibilité au bruit



$\frac{\partial I}{\partial x} \rightarrow$

$\frac{\partial I}{\partial y} \downarrow$

I

∂I

∂I

I

Sensibilité au bruit

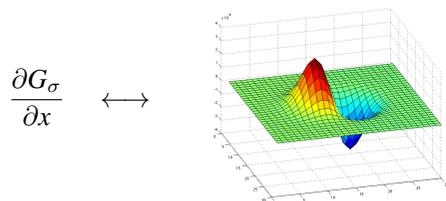
pour augmenter la robustesse au bruit :

- Lisser l'image avant différentiation (par filtrage linéaire)

$$\frac{\partial I}{\partial x} := G_x * (H * I)$$

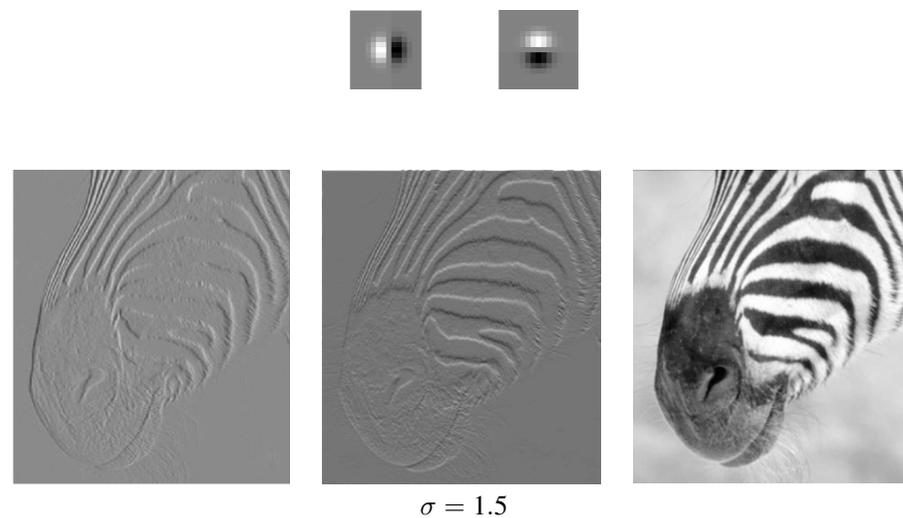
- Si H filtre moyenneur 3×3 → Filtre de Prewitt

- Si H filtre gaussien → $\frac{\partial I}{\partial x} := \frac{\partial G_\sigma * I}{\partial x} = \frac{\partial G_\sigma}{\partial x} * I$



50/72

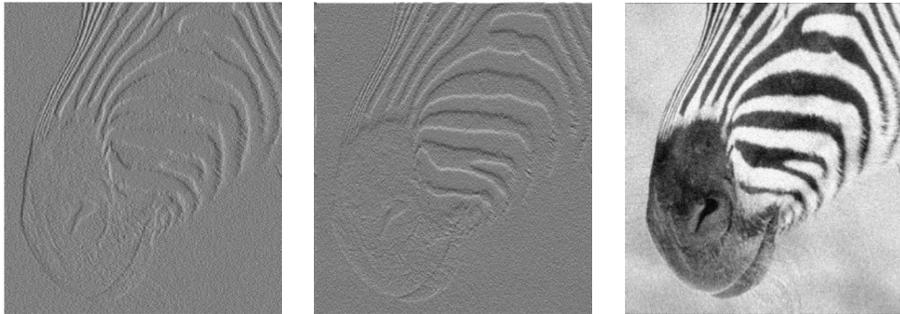
Différentiation et lissage



$\sigma = 1.5$

51/72

Différentiation et lissage

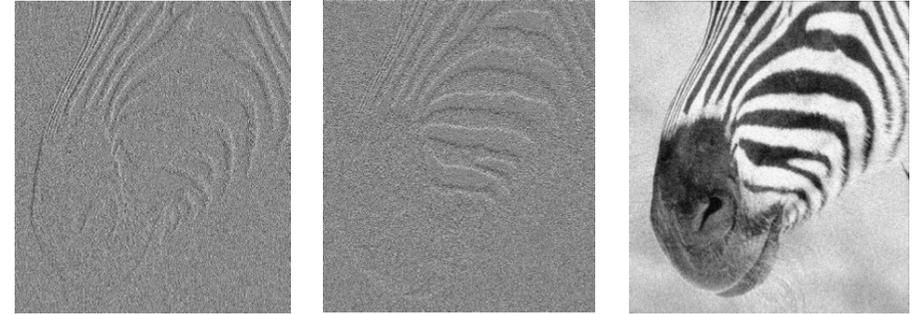


$\sigma = 1.5$

52/72

Différentiation et lissage

Sans lissage pour comparaison



53/72

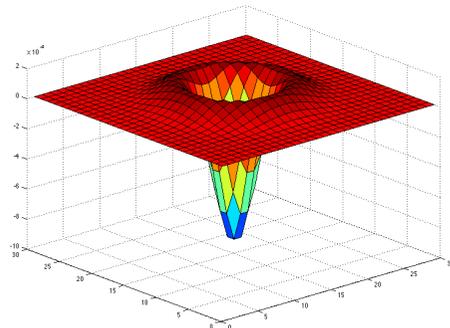
Différentiation et lissage

- Laplacien de Gaussienne (LoG)

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 G_\sigma * I}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial x^2} * I \quad \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 G_\sigma * I}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial y^2} * I$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} := (\Delta G_\sigma) * I$$

$\Delta G_\sigma \longleftrightarrow$

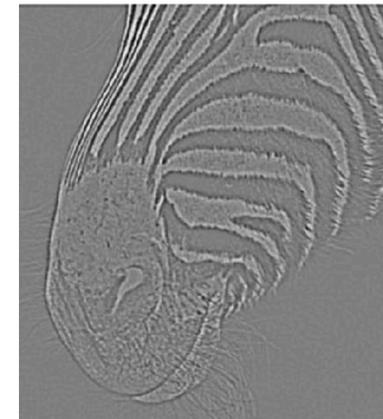
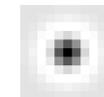


54/72

Différentiation et lissage

Laplacien de Gaussienne (LoG)

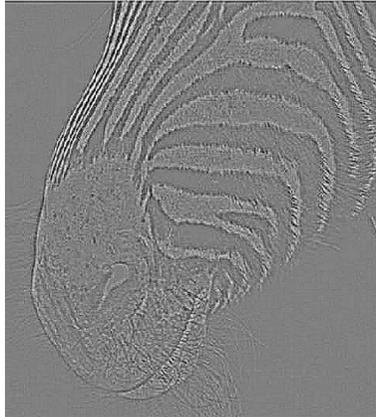
$\sigma = 1.5$



55/72

Différentiation et lissage

Sans lissage pour comparaison



56/72

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- on utilise le développement de Taylor de $v(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on note $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$:

$$\text{(premier ordre)} \quad v(k \Delta x, (n+1) \Delta t) = v_k^{n+1} = v_k^n + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + o(\Delta t)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k+1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k+1}^n = v_k^n + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

$$\text{(second ordre)} \quad v((k-1) \Delta x, n \Delta t) = v_{k-1}^n = v_k^n - \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

- on en déduit des approximations des dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(k \Delta x, n \Delta t) = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + o(1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) = \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1)$$

57/72

Exemple : équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Retour aux EDP

- Donc $\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1) = 0$

- et finalement une approximation "raisonnable" de l'EDP semble être :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

58/72

Analyse numérique

- Comment choisir $\Delta x, \Delta t, \dots$?

DEMO MATLAB

Précautions lors de la discrétisation numérique

- 1 Notion de consistance
- 2 Notion de stabilité

59/72

Précautions lors de la discrétisation numérique

- EDP, Notation continue : $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(v)(x, t) = g(x, t) & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\mathcal{L} \text{ est l'opérateur définissant l'EDP}) \quad (1)$$

- *Exemple* : pour l'équation de la chaleur $\mathcal{L}(v) = \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $g = 0$
- Notation discrète : $u_k^n \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$ (temps) et $k \in \mathbb{Z}$ (espace)

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\Delta(u_k^n) = g(k \Delta x, n \Delta t) \\ u_k^0 = f(k \Delta x) \end{cases} \quad (2)$$

- **Problématique** : choisir \mathcal{L}_Δ (à partir de \mathcal{L}) pour que la solution discrète u_k^n de (2) soit une "bonne approximation" de la solution continue $v(x, t)$ de (1).

60/72

Précautions lors de la discrétisation numérique

Définition : schéma convergent

On dit qu'il y a convergence si, quand Δx et $\Delta t \rightarrow 0$:

$$(k \Delta x, n \Delta t) \text{ converge vers } (x, t) \implies u_k^n \text{ converge vers } v(t, x)$$

- \rightarrow "si les pas de discrétisation deviennent petits, alors la solution discrète tend bien vers la solution continue théorique"
- En général, la convergence est dure à montrer mais :

Théorème de Lax

Un schéma **consistant** pour un problème linéaire bien posé converge si et seulement si il est **stable**.

61/72

Consistance

Consistance – Erreur de troncature

On appelle "erreur de troncature" (ou "erreur de discrétisation") l'expression

$$R_\Delta(\phi) = \mathcal{L}_\Delta(\phi_k^n) - \mathcal{L}(\phi)$$

Le schéma est dit **consistant** si, pour toute fonction ϕ , l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δ tend vers 0 (i.e. lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers 0)

- \rightarrow "Lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers 0, les approximations discrètes des dérivées présentes dans \mathcal{L}_Δ tendent bien vers les dérivées continues de \mathcal{L} "
- "Les dérivées sont bien approximées"
- \rightarrow se montre facilement en utilisant la formule de Taylor.

62/72

Consistance : équation de la chaleur

- Équation de la chaleur : on a montré que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \alpha \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + o(1)$$

avec $v_k^n = v(k \Delta x, n \Delta t)$.

$$\implies \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \alpha \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} \right) \xrightarrow{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} 0$$

Donc, le schéma de discrétisation obtenu précédemment est bien **consistant** avec l'équation de la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

63/72

Consistance : exercices

- $\frac{y(x+h) - y(x-h)}{h}$ est-il une bonne approximation de $y'(x)$?

NON : $2y'(x)$

- $\frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}$ approxime ?

$y'(x)$

- Déterminez une approximation consistante d'ordre 2 de $y'(x)$ faisant intervenir une combinaison linéaire de $y(x)$, $y(x-h)$ et $y(x-2h)$.

$$y'(x) = \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 3y(x)}{2h} + o(h)$$

64/72

Stabilité d'un schéma numérique

65/72

Stabilité d'un schéma numérique

Définition

On dit qu'un processus de calcul séquentiel (ou itératif) est « stable » si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas lors de la progression des calculs.

$$\|u^{n+1}\| \leq K \|u^0\|$$

- normes usuelles :

$$\|v\|_{\mathcal{L}^1} = \sum_k |v_k| \quad \|v\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\sum_k |v_k|^2} \quad \|v\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |v_k|$$

- Théorème de Lax → "si on a bien choisi nos discrétisations, soit u^n reste borné et on a convergence, soit u^n explose"

66/72

Stabilité d'un schéma numérique

- Stabilité du schéma $u_k^{n+1} = (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$ en considérant la norme $\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k |u_k^n|$.

$$\text{si } (1-2r) \geq 0, \quad u_k^{n+1} \leq (1-2r)\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} + r\|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

$$\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_k u_k^{n+1} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u^n\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u^0\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

Si $r \leq \frac{1}{2}$, le schéma est stable.

67/72

Stabilité d'un schéma numérique

- En général : plus compliqué. Une méthode possible, passer en Fourier

	En continu	En discret
Transformée de Fourier	$\widehat{v}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} v(t, x) dx$	$\widehat{u}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k$
Transformée de Fourier inverse	$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \widehat{v}(t, \omega) d\omega$	$u_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi$

Remarques : i désigne le complexe tel que $i^2 = -1$ • les constantes (ici $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$) peuvent varier suivant les définitions.

Identité de Parseval	$\ v\ _{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \ \widehat{v}\ _{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$	$\ u\ _{\mathcal{L}^2} = \ \widehat{u}\ _{\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)}$
----------------------	---	--

FIGURE : Rappel sur les transformées de Fourier (continue et discrète)

68/72

Stabilité d'un schéma numérique : méthode de Fourier

Identité de Parseval : pour prouver la stabilité on peut raisonner en Fourier.

- on veut montrer que $\|u^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|u^0\|_{\mathcal{L}^2}$
- or : $\|u\|_{\mathcal{L}^2} = \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}^2}$ (\leftarrow Parseval)
- on peut donc montrer que $\|\widehat{u}^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|\widehat{u}^0\|_{\mathcal{L}^2}$

Remarque :

$$\bullet \|u\|_{\mathcal{L}^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|^2 \quad \text{et} \quad \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

69/72

Stabilité d'un schéma numérique

Calculs préliminaires :

- Si $f : k \rightarrow u_k^n$, on a donc $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_k^n$
- si on pose $g : k \rightarrow u_{k-1}^n$, on a :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n = e^{-i\xi} \widehat{f}(\xi)$$

Propriété : Transf. de Fourier : on se "débarrasse" des dérivées spatiales.

- en continu (résolution équation de la chaleur) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \omega) = -\omega^2 \widehat{v}(t, \omega)$
- en discret : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k \Delta x, n \Delta t) \approx u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n$ (si $\Delta x = 1$,

comme svu en image)

$$\widehat{A}(\xi) = e^{i\xi} \widehat{u}_k^n(\xi) - 2\widehat{u}_k^n(\xi) + e^{-i\xi} \widehat{u}_k^n(\xi) = 2(\cos(\xi) - 1) \widehat{u}^n(\xi)$$

70/72

Exemple : équation de la chaleur

- EDP : $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$
- On a vu une discrétisation consistante possible :

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \quad \text{avec} \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\widehat{u}^{n+1}(\xi) = (1 + 2r(\cos(\xi) - 1)) \widehat{u}^n(\xi) = \left(1 + 2r(\cos(\xi) - 1)\right)^{n+1} \widehat{u}^0(\xi)$$

Stable si, et seulement si, $|1 + 2r(\cos(\xi) - 1)| \leq 1$, pour tout ξ

$$\Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2r(\cos(\xi) - 1) \leq 1, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq r(\cos(\xi) - 1) \leq 0, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{1 - \cos(\xi)}, \quad \text{pour tout } \xi$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{2}$$

DEMO MATLAB

71/72

Exercice : équation de la chaleur (schéma implicite)

- un schéma est dit **explicite** si on peut écrire u_k^{n+1} en fonction de u_i^n pour certains i

- exemple : $u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$
- facile à implémenter

- un schéma est dit **implicite** si ce n'est pas le cas

- Le schéma suivant est un schéma implicite consistant avec l'équation de la chaleur

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

- Étudier sa stabilité

Rappel : $\widehat{u}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im\xi} u_m$, (où i désigne le complexe $i^2 = -1$)

On obtient $\widehat{u}^{n+1}(\xi) = \frac{1}{1+2r(1-\cos(\xi))} \widehat{u}^n(\xi)$ or on a $1 - \cos(\xi) \geq 0$ donc $\frac{1}{1+2r(1-\cos(\xi))} \leq 1$ et on obtient un schéma inconditionnellement stable (mais difficile à implémenter car schéma **implicite**)