FIP — ENS Année 2012–2013

Physique Statistique hors équilibre et transitions de phase

TD n$^{\text{o}}$ 5 : Modèle de Bak-Sneppen

Avril 2013

On s'intéresse au modèle de Bak-Sneppen, utilisé pour modéliser l'apparition et l'extinction d'espèces. On considère que le nombre d'espèces reste constant ; l'espèce la moins bien adaptée disparaît et entraîne dans sa disparition m espèces proches qui dépendaient d'elles. Ces espèces disparues sont remplacées par $m+1$ nouvelles espèces.

En une dimension, on modélise ce processus en prenant N nombres x_1, x_2, …, x_N aléatoires compris entre 0 et 1 qui représentent le degré d'adaptation de chaque espèce. À chaque pas de temps, on choisit l'espèce k la moins adaptée (celle qui a le plus petit nombre x_k) et on la fait disparaître, ainsi que ses $m = 2$ espèces voisines $k-1$ et $k+1$. Trois nouvelles espèces apparaissent ; on tire au hasard trois nouvelles valeurs pour les nombres x_{k-1}, x_k et x_{k+1}. Les conditions aux bords sont supposées périodiques.

1) Qualitativement, quelle sera la distribution des x_k aux temps longs quand N est grand ? On introduira un degré d'adaptation critique x_c qu'on n'essaiera pas de calculer.
2) Dans la suite de ce TD, on néglige les corrélations entre espèces voisines. Comment se reformule le processus de Bak-Sneppen en champ moyen ?

On se place donc dans le champ moyen et l'on suppose que $m = 1$, c'est-à-dire que chaque fois qu'une espèce disparaît, une seule autre espèce est entraînée dans sa chute.

On pose $n_t(x)$ le nombre d'espèces dont le degré d'adaptabilité au temps t est inférieur à x.

3) Écrire la relation de récurrence pour calculer $\langle n_t(x)\rangle$. On supposera N et x assez grand pour que n_t ne vaille jamais zéro.
4) Quelle est la distribution des x_k aux temps longs quand N est grand ? Que vaut la valeur critique x_c ?

On observe que les évolutions des espèces sont caractérisées par de longues périodes avec relativement peu de changements entrecoupées par des périodes (relativement) courtes où beaucoup d'espèces disparaissent et sont remplacées. Nous allons maintenant montrer que cette propriété est présente dans le modèle de Bak-Sneppen.

On définit, pour un $x < x_c$ donné, une avalanche comme une période de temps pendant laquelle $n_t(x) > 0$. Cette avalanche correspond à une période de grande activité où de nombreux bouleversements ont lieu. On cherche donc à calculer la probabilité $P_t(n)$ que le nombre d'espèces en dessous de x a évolué de n_0 à $n_t = n$ en t pas de temps *sans jamais passer par* $n_t = 0$.

5) Quand $x < x_c$, que vaut typiquement $n_t(x)$? Quelles approximations peut-on faire dans les équations d'évolution ?
6) Dans le cadre de cette approximation, exprimer $P_{t+1}(n)$ en fonction des $P_t(n)$.

Pour résoudre ces équations, on commence par calculer la probabilité $\tilde{P}_t(\Delta n)$ que le nombre d'espèces passe de n_0 à $n_0 + \Delta n$ en un temps t, sachant qu'on n'utilise pas la règle spéciale pour $n = 0$ et qu'on autorise n à prendre n'importe quelle valeur entière, y compris négative.

7) Que vaut $\tilde{P}_t(\Delta n)$? Attention, le calcul doit conduire à une formule close (sans symbole $\sum$). Pour éliminer la somme qui apparaît naturellement dans le calcul, il faut être astucieux ! Indice[1] en bas de la feuille.

8) Justifier que l'on a

$$P_t(n) = \begin{cases} \tilde{P}_t(n - n_0) - \alpha \tilde{P}_t(n + n_0) & \text{pour } n > 0 \\ 0 & \text{pour } n \leq 0, \end{cases}$$

pour une valeur de α que l'on déterminera.

9) En supposant qu'il y a à $t = 0$ exactement une espèce dont le degré d'adaptabilité est inférieur à x, calculer la probabilité $q(t)$ que le premier retour à $n_t(x) = 0$ se fasse à l'instant t.

10) Comment se comporte $q(t)$ à t grand ? À t grand et quand x se rapproche de x_c ?

11) *Sans faire le calcul*, que doit valoir $\sum_{t \geq 1} q(t)$ en fonction de x ?

12) Si vous y tenez vraiment, faire le calcul... Indice : commencer par montrer que $\sum_{t \geq 0} C_{2t}^t a^t = (1 - 4a)^{-1/2}$.

---

1. Considérer des demis pas de temps ce qui permet d'écrire une marche aléatoire plus simple