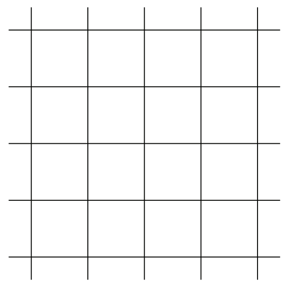
TD4: Température critique du modèle d'Ising bidimensionnel

mars 2013

Considérons N spins d'Ising $\sigma_i = \pm 1$ placés sur les nœuds d'un réseau carré, schématisé sur la figure ci-dessous.



L'énergie d'une configuration est définie par :

$$H(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \ , \qquad (1)$$

où la somme porte sur les liens du réseau entre plus proches voisins, et l'on supposera des conditions aux limites périodiques dans les deux directions. Les interactions sont ferromagnétiques, $J > 0$. L'objectif de l'exercice est de déterminer la température critique T_c du modèle.

1) Combien de termes comporte la somme dans l'équation (1) ?
2) Si ce système présente une transition de phase à température finie, quel est alors l'ordre de grandeur de la température critique associée ?

1 Développement de haute température

1) Montrer que l'on peut écrire $e^{\beta J \sigma_i \sigma_j} = c(1 + t\sigma_i\sigma_j)$, où l'on précisera les valeurs des constantes c et t.
2) En déduire l'écriture suivante de la fonction de partition à la température inverse β :

$$Z_N(\beta) = c^{2N} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_N} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + t\sigma_i\sigma_j) \ . \qquad (2)$$

Combien de termes comporte le développement du produit dans cette équation ?

3) Remarquons que chaque terme est un produit de $t\sigma_i\sigma_j$. On associe alors à chacun de ces termes un diagramme, c'est-à-dire un sous-ensemble des liens du réseau, correspondant aux liens $t\sigma_i\sigma_j$ retenus dans ce terme. Caractériser les diagrammes qui donnent une contribution non nulle dans l'équation (2).

   On ordonne ce développement en puissances de t, en définissant des coefficients $a_{N,n}$ selon

$$Z_N(\beta) = (2c^2)^N \sum_{n=0}^{\infty} a_{N,n} t^n \ . \qquad (3)$$

4) Justifier le nom de développement de haute température donné à cette série. On notera dans la suite $A_N(x) = \sum_n a_{N,n} x^n$.
5) Donner une définition, sans calcul, du coefficient $a_{N,n}$ pour n quelconque.
6) Calculer les valeurs de $a_{N,n}$ pour $n = 0, 1, \ldots, 8$.
7) Remarquons la présence de puissances multiples de N dans la fonction de partition. L'extensivité de l'énergie libre est-elle encore assurée ? Le vérifier pour un développement jusqu'à l'ordre 8.

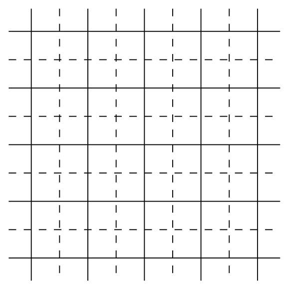
2 Développement de basse température

1) Quelles sont les configurations qui minimisent le Hamiltonien (1) ? Donner leur nombre et leur énergie E_0.

2) Quelle est l'énergie $E_1 > E_0$ des premiers niveaux excités ? Décrire les configurations correspondantes et donner leur nombre.
3) Même question pour le niveau suivant, d'énergie $E_2 > E_1$.
4) En déduire le développement de basse température suivant,

$$Z_N(\beta) = 2e^{2N\beta J} \left(b_{N,0} + b_{N,4} \left(e^{-2\beta J}\right)^4 + b_{N,6} \left(e^{-2\beta J}\right)^6 + o\left(\left(e^{-2\beta J}\right)^6\right)\right) , \tag{4}$$

où l'on précisera les valeurs des coefficients $b_{N,n}$. Les comparer aux coefficients $a_{N,n}$ du développement de haute température.
5) Montrer que le développement de basse température peut s'écrire $Z_N(\beta) = 2e^{2N\beta J} A_N(e^{-2\beta J})$, où $A_N(x)$ est la fonction définie à la question 1.4. Pour cela on pourra considérer les diagrammes du réseau dual, schématisé en pointillés sur la figure suivante.



3 Température de transition

1) On note $f(\beta) = -\frac{1}{\beta} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln Z_N(\beta)$ l'énergie libre par spin dans la limite thermodynamique. Déduire des développements de haute et basse température deux expressions de $f(\beta)$. On notera $g(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln A_N(x)$.
2) On admet que le modèle présente une unique température critique, et donc que $f(\beta)$ est singulière en un unique point β_c. Montrer que :

$$\beta_c J = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) . \tag{5}$$

3) Le champ moyen prédit une autre valeur pour la température critique : $\beta_c^{cm} z J = 1$, où z est la coordinence du réseau. La comparer avec la valeur obtenue à la question précédente et commenter.