FIP — ENS

Année 2012–2013

Physique Statistique hors équilibre et transitions de phase

TD n$^{\text{o}}$ 1: Fluctuations

Février 2013

1 Densités exceptionnelles

On considère un gaz parfait de densité $\rho = N/V$ à l'équilibre thermodynamique à la température T.

1) Comment sont distribuées les vitesses des particules ? Quelle est la vitesse typique d'une particule de gaz dans la salle de TD ?
2) On considère un volume infinitésimal dV (dV est infiniment petit au sens mathématique ; ce n'est pas un volume « mésoscopique » au sens de l'hydrodynamique). Quelles sont les probabilités qu'il y ait 0 ou 1 particule dans ce volume ? Peut-il y en avoir 2 ou plus ?
3) En déduire la probabilité de trouver n particules dans un volume donné a. (Indice : on pourra découper le volume a en $a/\mathrm{d}V$ volumes infinitésimaux de taille dV.)
4) Calculer la moyenne et la variance du nombre de particules dans le volume a.
5) On suppose que le volume a est suffisamment grand pour contenir beaucoup de particules, et on cherche maintenant à estimer la probabilité qu'il y ait une grande fluctuation conduisant à avoir plus de $q\rho a$ particules dans ce volume avec $q > 1$ (mais pas trop proche de 1). Montrer que cette probabilité est de l'ordre de celle qu'il y ait exactement $q\rho a$ particules dans le volume, puis en donner une estimation. (On doit trouver $[e^{q-1}/q^q]^{\rho a}$, à des facteurs correctifs près.)
6) On prend $q = 2$ et on donne $e/4 = 0{,}68 = 10^{-0{,}17}$. Pour l'air ambiant, calculer les probabilités qu'il y ait plus de $2\rho a$ particules dans le volume a défini par un cube de 16 nm de côté, puis par un cube deux fois plus volumineux.
7) Quel est le temps typique pour renouveler les particules à l'intérieur du volume a ? En déduire le temps typique qu'il faut attendre pour observer une fluctuation comme celle que l'on vient de décrire.

2 Théorèmes de fluctuation-dissipation

2.1 Énergie

Un système a l'énergie $E(\mathcal{C})$ quand il se trouve dans la configuration $\mathcal{C}$.

1) Donner l'expression de l'énergie moyenne $\langle E\rangle$ et de la capacité calorifique $C = \frac{d\langle E\rangle}{dT}$ dans l'ensemble canonique à la température T.
2) Donner l'expression de la variance $\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$ de l'énergie. En déduire la relation de fluctuation-dissipation entre la capacité calorifique et la variance de l'énergie.

2.2 Densité

On cherche à vérifier sur deux exemples simples que les fluctuations de densité du nombre n de particules d'un gaz dans un sous-volume v sont données par

$$\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = v\rho^2\kappa k_B T$$

où ρ est la densité particulaire, p est la pression et κ est la compressibilité isotherme définie par

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T$$

1) Justifier la définition de κ et montrer que l'on peut le réécrire comme une dérivée de ρ par rapport à p.

On considère d'abord un gaz parfait classique de N particules dans un volume V.

2) Calculer la variance du nombre n de particules dans un volume v qui est suffisamment grand pour contenir beaucoup de particules, mais qui est beaucoup plus petit que V.
3) Calculer la compressibilité κ et vérifier la relation de fluctuation dissipation.

On considère maintenant un gaz sur réseau Chacune des N particules peut se trouver sur l'un des αV sites d'un réseau occupant le volume V. Chaque site est occupé par au plus une particule.

4) Calculer la variance de n.
5) Calculer la pression et la compressibilité.
6) Vérifier la relation de fluctuation-dissipation.