FIP — ENS

Année 2012–2013
Physique Statistique hors équilibre et transitions de phase

Soutien n° 8: Marche aléatoire et équation de Fokker-Planck
Équation de Langevin

10 avril 2013

1 Marche aléatoire et équation de Fokker-Planck

1) On considère un marcheur aléatoire sur un réseau infini unidimensionnel de maille a, en temps continu, en présence d'un potentiel $U(x)$. Donner la distribution de probabilité stationnaire π_i^{stat} de trouver le marcheur à la position x_i.
2) On suppose que le marcheur ne saute que d'un site à l'un de ses deux voisins. Quelle relation entre les probabilités de saut $p(i \to i+1)dt$ et $p(i+1 \to i)dt$ suffit à garantir de retrouver la distribution de probabilité stationnaire ? Justifier que le choix suivant est compatible avec cette relation :

$$p(i \to j)dt = \begin{cases} e^{-\frac{\beta}{2}(U(x_j)-U(x_i))}dt & \text{si } i \text{ et } j \text{ voisins} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Donner l'équation maîtresse décrivant l'évolution de la probabilité $\pi_i(t)$ de trouver le marcheur à la position x_i.
4) En faisant tendre la maille du réseau vers 0, exprimer l'analogue continu de l'équation précédente. Quelle équation reconnaissez-vous ? Vérifier qu'on retrouve bien la solution stationnaire évoquée à la question 1. Un autre choix de probabilités de saut vérifiant la condition de la question 2 aurait-il donné la même équation ?

2 Équation de Langevin avec bruit corrélé

On considère le mouvement d'une particule de masse nulle et de vitesse $V(t)$, gouverné par l'équation de Langevin :

$$\gamma V(t) = \xi(t),$$

où $\xi(t)$ est une force aléatoire gaussienne de moyenne nulle caractérisée par sa fonction de corrélation C :

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = C(t'-t).$$

1) Calculer le déplacement $X(t) - X(0)$ et le déplacement moyen correspondant.
2) On peut définir la constante de diffusion de la manière suivante :

$$D = \lim_{t\to\infty} \frac{\langle (X(t)-X(0))^2 \rangle}{2t}.$$

Justifier cette définition. Calculer D.
3) Remarquer qu'on a une relation de type Green-Kubo entre la constante de diffusion et les corrélations de vitesse :

$$D = \int_0^\infty dt \langle V(0)V(t) \rangle.$$

Montrer que cette relation est générale.