FIP — ENS

Année 2012–2013
Physique Statistique hors équilibre et transitions de phase

Soutien n° 7: Gaz de Lorentz et marche aléatoire

10 avril 2013

1 Gaz de Lorentz

On considère un gaz bidimensionnel de particules ayant toutes la vitesse $V = |\mathbf{v}|$, en présence de disques durs de rayon a et de densité ρ vérifiant $\rho a^2 \ll 1$. On appelle $f_t(\theta)$ la densité de probabilité qu'une particule ait la vitesse $(V\cos\theta, V\sin\theta)$.

On appelle $W(\theta', \theta)dt$ densité de probabilité qu'a une particule de passer de la direction θ à la direction θ' pendant dt suite à un choc avec un disque dur.

1) Exprimer la probabilité qu'une particule ne change pas de direction pendant dt en fonction de W.
2) Écrire $f_{t+dt}(\theta)$ et en déduire l'équation de Boltzmann vérifiée par la densité $f_t(\theta)$.
3) Expliquer pourquoi on peut écrire $W(\theta, \theta')$ comme une fonction d'une seule variable. *A priori*, comment cette fonction dépend-elle des constantes dimensionnées a, V et ρ ?
4) Donner la limite de $f_t(\theta)$ aux temps longs et le temps caractéristique qu'il faut attendre pour atteindre l'équilibre.
5) Donner une expression explicite de $W(\theta', \theta)$.

2 Carctère récurrent ou transient d'une marche aléatoire

On considère une marche aléatoire sur le réseau hypercubique en dimension d (c'est-à-dire carré pour $d = 2$, cubique pour $d = 3$, etc.). À $t = 0$, le marcheur se trouve en $\mathbf{x} = 0$ et a une probabilité λdt de sauter vers chacun des $2d$ sites voisins pendant dt.

1) Montrer que la probabilité $P_t(x)$ qu'à l'instant t le marcheur se trouve en $\mathbf{x}$ vérifie l'équation

$$\frac{dP_t(\mathbf{x})}{dt} = \lambda \sum_{i=1}^{2d} \left[P_t(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - P_t(\mathbf{x})\right]. \tag{1}$$

2) Exprimer la probabilité $P_t(\mathbf{x})$ aux temps longs.
3) De quelle manière $P_t(0)$ décroît-il aux temps longs ?
4) Donner le temps moyen passé à l'origine lors de chaque visite.
5) Calculer le temps moyen passé en $\mathbf{x} = 0$ entre t_0 et T, où t_0 est suffisamment grand.
6) En déduire que le nombre moyen de retours à l'origine d'une marche infiniment longue est infini si $d \leq 2$ et fini si $d > 2$.