Soutien n° 6: Le processus de contact

10 avril 2013

On considère un ensemble de N sites sur un réseau donné où chaque site a z voisins (par exemple $z = 2d$ pour un réseau cubique en dimension d). Un site i peut être dans deux états : soit infecté, on écrit $\tau_i = 1$, soit sain, $\tau_i = 0$. La dynamique est la suivante : pendant chaque intervalle de temps $\mathrm{d}t$,

- chaque site infecté a une probabilité $\mathrm{d}t$ de « guérir » et de devenir sain,
- chaque site sain a une probabilité $n_i\lambda\,\mathrm{d}t$ d'être infecté où n_i est le nombre de sites voisins de i qui sont infectés.

À l'instant initial, chaque site a indépendamment une probabilité ρ d'être infecté.

1) Aux temps longs, quel est le comportement du système en fonction de λ ? Et aux temps *incroyablement* longs ?

Établissement d'une équation exacte

1) On considère un site i donné et on note j_1, j_2, …, j_z ses z voisins. On suppose que les valeurs τ_i et τ_{j_n} $(1 \le n \le z)$ à l'instant t sont données. Quelles sont les valeurs possibles de τ_i à l'instant $t + \mathrm{d}t$, et quelles sont leur probabilités ?
2) En déduire $\langle \tau_i(t+\mathrm{d}t)[\mathcal{F}_t\rangle$, c'est-à-dire la moyenne de τ_i à l'instant $t+\mathrm{d}t$ étant donnée toute l'information à l'instant t.
3) En déduire une expression pour $\partial_t\langle\tau_i\rangle$. Peut-on résoudre cette équation ? Pourquoi ?

Étude du champ moyen

1) En faisant une hypothèse de champ moyen, déduire de ce qui précède une équation fermée pour $m_t = \langle\tau_i\rangle$.
2) De manière générale, lorsqu'une quantité m_t évolue selon
$$\partial_t m_t = f(m_t), \tag{1}$$
comment obtient-on à partir de f le comportement aux temps longs de m_t ? (Point fixe, stabilité linéaire...)
3) Sans résoudre l'équation en déduire, pour le processus de contact en champ moyen, la valeur de m_t aux temps longs et le point critique λ_c.
4) Maintenant résoudre explicitement l'équation donnant m_t et vérifier que l'on retrouve bien les mêmes résultats. Montrer qu'une loi de puissance (et un exposant critique !) apparaissent à la transition.

Calcul perturbatif pour λ grand

On va maintenant calculer quelques termes du développement à grand λ du résultat exact, hors champ moyen. On va utiliser des notations pratiques : pour un site donné, on note $[\bullet] = \langle\tau_i\rangle$ la probabilité qu'il soit infecté et $[\cdot] = 1 - [\bullet]$ la probabilité qu'il soit sain. Pour deux sites voisins on notera $[\bullet\bullet]$, $[\cdot\bullet]$, $[\bullet\cdot]$ et $[\cdot\bullet]$ les probabilités des quatre configurations. Idem pour trois sites voisins. (Nota cette notation commence à être problèmatique à partir de quatre sites...)

1) Simplifier $[\bullet\cdot] + [\bullet\bullet]$.
2) Réécrire l'équation donnant $\partial_t\langle\tau_i\rangle$ avec les nouvelles notations, puis écrire les équations donnant $\partial_t[\bullet\bullet]$, $\partial_t[\bullet\cdot]$, $\partial_t[\cdot\,\cdot]$. Combien y a-t-il d'équations indépendantes ?
3) Transformer les équations obtenues pour ne faire apparaître que les termes $[\cdot]$, $[\cdot\,\cdot]$ et $[\cdot\;\cdot\;\cdot]$.
4) Pour λ grand, que peut-on dire de la valeur de $[\cdot]$, $[\cdot\,\cdot]$, $[\cdot\;\cdot\;\cdot]$? En déduire le début du développement asymptotique de $[\cdot]$ et de $[\cdot\,\cdot]$ aux temps longs.
5) Dans quelle limite le champ moyen devient-il exact ? Est-ce surprenant ?