Soutien 5: Diffusion thermique

mars 2013

1 Préliminaire : équation de la chaleur

1) On considère un solide indéformable de capacité thermique c, de masse volumique ρ et de conductivité thermique κ. À l'aide d'un bilan énergétique, établir l'équation de la chaleur. On appelle diffusivité thermique la grandeur $D = \kappa/\rho c$.
2) Voici quelques ordres de grandeurs :

air	$\kappa = 0{,}026\,\mathrm{J\,m^{-1}\,s^{-1}\,K^{-1}}$	$\rho c = 1{,}3\,10^3\,\mathrm{J\,K^{-1}\,m^{-3}}$	$D = 2\,10^{-5}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$
eau	$\kappa = 0{,}63\,\mathrm{J\,m^{-1}\,s^{-1}\,K^{-1}}$	$\rho c = 4{,}2\,10^6\,\mathrm{J\,K^{-1}\,m^{-3}}$	$D = 1{,}5\,10^{-7}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$
bois	$\kappa = 0{,}13\,\mathrm{J\,m^{-1}\,s^{-1}\,K^{-1}}$	$\rho c = 0{,}4\,10^6\,\mathrm{J\,K^{-1}\,m^{-3}}$	$D = 3\,10^{-7}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$
aluminium	$\kappa = 236\,\mathrm{J\,m^{-1}\,s^{-1}\,K^{-1}}$	$\rho c = 3\,10^6\,\mathrm{J\,K^{-1}\,m^{-3}}$	$D = 8\,10^{-5}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$

Auriez-vous pu évaluer l'ordre de grandeur de ρc sans les données fournies par l'énoncé ?

2 Diffusion thermique dans un barreau

On considère un barreau semi-infini, calorifugé sur sa surface latérale, qui occupe le demi-espace $x \geq 0$. Sa température initiale est T_i. Pour $t \geq 0$, on impose la température T_0 en son extrémité $x = 0$.

1) Écrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température dans le barreau.
2) En utilisant un argument dimensionnel, montrer que la solution est fonction d'une variable réduite que l'on exprimera. Calculer alors la distribution de température dans le barreau. On exprimera le résultat à l'aide de la fonction d'erreur définie par :
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}x \tag{1}$$
3) En déduire la densité de courant de chaleur. De quelle équation aux dérivées partielles est-elle solution ?

3 Application : Température de contact

On considère maintenant deux barreaux semi-infinis de coefficients κ_i, C_i, ρ_i et D_i et de températures initiales T_i, avec $i \in \{1, 2\}$. À l'instant $t = 0$, on met les deux barreaux en contact par leur extrémité située en $x = 0$.

1) En supposant le courant de chaleur maximal à l'interface à tout instant, comment évolue la température de contact ?
2) En utilisant les résultats précédents, donner la densité de courant de chaleur dans les deux barreaux et en déduire $T(x = 0)$. Tracer son allure à différents instants.
3) Déterminer la distribution de température dans les deux barreaux. Tracer son allure.
4) *Application numérique* : en assimilant le corps humain à de l'eau à 37°C, calculer la température de contact entre la main et un matériau à 20°C dans le cas de l'eau, du bois et de l'aluminium.