FIP — ENS

Année 2012–2013
Physique Statistique hors équilibre et transitions de phase

Soutien n^o 4: Le modèle d'Ising en 1D et en ∞D

Mars 2013

Dans le modèle d'Ising, sur chaque site i on met une variable σ_i pouvant prendre les valeur ± 1. L'Hamiltonien est

$$\mathcal{H} = -B \sum_i \sigma_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \tag{1}$$

où la seconde somme est sur toutes les paires i,j de sites telles que i et j soient plus proches voisins.

1 En une dimension, matrice de transfert

On considère une ligne de N spins.

1) En une minute, calculer la fonction de partition pour $J = 0$.
2) En deux minutes, calculer la fonction de partition pour $B = 0$. On introduira $\tau_i = \sigma_i \sigma_{i+1}$.
3) On considère maintenant $J > 0$ et $B > 0$. On pose $Z_N = Z_N^+ + Z_N^-$, où $Z_N^\pm$ est la contribution à la fonction de partition de toutes les configurations dont le N-ième spin est ± 1. Montrer que l'on peut calculer les $Z_N^\pm$ par récurrence à partir d'une matrice de transfert, et expliciter cette matrice.
4) Calculer les valeurs propres de M. En supposant que P est une matrice de passage qui diagonalise M, que vaut M^N ? En déduire la valeur de

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N. \tag{2}$$

Vérifier qu'on retrouve bien les résultats attendus pour $B = 0$ ou $J = 0$.

5) Calculer l'énergie libre dans la limite thermodynamique pour B petit jusqu'à l'ordre B^2. En déduire la magnétisation moyenne et la susceptibilité magnétique en champ nul de ce système.

2 En dimension infinie, modèle de Curie-Weiss, champ moyen

On considère maintenant que chacun des N spins est relié à tous les autres, et que donc la somme dans (1) se fait sur les $N(N-1)/2$ paires de spins. On suppose aussi que $J = j/N$ avec j fixé.

1) Montrer que l'hamiltonien est une fonction de la magnétisation. Pourquoi a-t-on introduit le scaling $J = j/N$?
2) On pose $m = M/N$. Combien y a-t-il de configurations avec m fixé ?

En microcanonique

3) À partir de la définition de la température microcanonique, établir une relation entre B, j, m et T.
4) À $B = 0$, montrer qu'il y a une transition de phase et déterminer la température critique.
5) Que vaut la susceptibilité magnétique pour $T > T_c$ en champ nul ?

En canonique

6) Écrire la fonction de partition sous la forme d'une somme. Montrer que dans la limite thermodynamique on peut écrire

$$Z \sim \int_{-1}^{1} \mathrm{d}m \; e^{N\phi(m)}.$$

Que représente $\phi(m)$? Comment calculer-t-on ce genre d'intégrale dans la limite thermodynamique ? Vérifier que l'on retrouve le calcul fait en microcanonique.

3 Sur un réseau hiérarchique, renormalisation

On considère maintenant le modèle d'Ising sur le réseau hiérarchique de degré n, défini ainsi : le réseau hiérarchique de degré 0 est constitué d'un segment ; le réseau hiérarchique de degré $n+1$ s'obtient en remplaçant tous les segments par des losanges dans le réseau hiérarchique de degré n. (Voir figure) On vérifie (faites le !) qu'il y a 4^n segments et $2(4^n+2)/3$ sommets dans le réseau hiérarchique

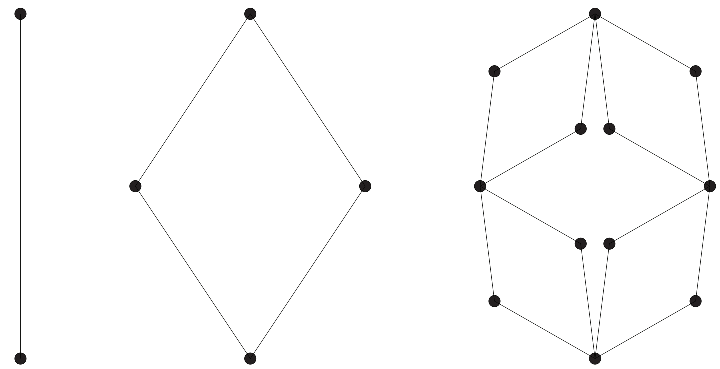

Figure 1 – Le réseau hiérarchique pour les degrés 0, 1 et 2.

de degré n. On met des spins sur les sommets ; deux spins sont voisins s'ils sont reliés par un trait.

Soit $Z_n(\beta J)$ la fonction de partition du réseau hiérarchique de degré n, et $Z_n^{\sigma,\tau}(\beta J)$ la fonction de partition du réseau hiérarchique de degré n quand le spin du haut vaut σ et que le spin du bas vaut τ. On travaillera tout le temps à $B=0$.

1) On a clairement
$$Z_0^{\sigma,\tau}(\beta J) = e^{\beta J\sigma\tau}, \qquad Z_0(\beta J) = 4\cosh(\beta J). \tag{3}$$
Calculer $Z_1^{\sigma,\tau}(\beta J)$ et montrer que l'on peut écrire
$$Z_1^{\sigma,\tau}(\beta J) = A(\beta J)e^{K(\beta J)\sigma\tau} \tag{4}$$
où A et K sont deux fonctions que l'on déterminera.
2) On considère maintenant le réseau hiérarchique de degré n. En sommant sur tous les spins n'ayant que deux voisins, écrire $Z_n(\beta J)$ à l'aide de Z_{n-1}. Interpréter le résultat.
3) Tracer sur un même graphe l'allure de $x \mapsto K(x)$ et la diagonale $x \mapsto x$.
4) Selon la valeur de βJ, vers quoi $K_p = K \circ K \circ \cdots \circ K(\beta J)$ évolue-t-il quand le nombre p d'itérations devient grand ? Quel est l'interprétation de ce résultat ?
5) On pose $\phi_n(\beta J) = -4^{-n}\beta^{-1}\ln Z_n(\beta J)$ l'énergie libre spécifique pour le réseau hiérarchique de taille n. Écrire la récurrence pour ϕ_n.
6) On rappelle que l'exposant critique α est défini par $C_V \propto (T-T_c)^{-\alpha}$. On pose $\phi = \lim_{n\to\infty}\phi_n$. Justifier que
$$\phi(\beta J) = B(\beta J - \beta_c J)^{2-\alpha} + \phi^R(\beta J) \tag{5}$$
où β_c est la température critique inverse, B ext une constante (ou peut-être une fonction du signe de $\beta - \beta_c$) et ϕ^R est une fonction régulière.
7) Calculer α.