FIP — ENS Année 2012–2013

Physique Statistique hors équilibre et transitions de phase

Soutien n^o 1: Quelques exercices de probabilités

20 février 2013

1 Quelques distributions classiques

1.1 Distribution binomiale et de Poisson

1) On dispose de N boules. Pour chaque boule, indépendamment, on décide si on la garde (avec une probabilité p) ou si on la jette. Quelle est la distribution du nombre n de boules que l'on a gardées ?
2) À partir de cette distribution, calculer la moyenne de n, la variance de n et la fonction génératrice de n.
3) Une variable de Bernoulli est une variable aléatoire qui ne peut prendre que les valeurs 1 ou 0. Montrer que l'on peut écrire n comme une somme de N variables de Bernoulli indépendantes, et donner l'interprétation de ces variables.
4) Que vaut la moyenne d'une somme de variables aléatoires ? Que vaut la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes ? En déduire un deuxième calcul de $\langle n \rangle$ et $\mathrm{var}(n)$.
5) On suppose maintenant que $p = m/N$ et on envoie N vers l'infini en gardant m constant. Calculer dans cette limite les nouvelles distribution, moyenne, variance et fonction génératrice de n.
6) (Pour ceux qui finisse avant tout le monde, et à la maison pour les autres). On revient au problème avec p fixé, et on écrit $n = Np + \sqrt{N}y$. Calculer la distribution de y quand $N \to \infty$.

1.2 Distribution hypergéométrique

1) On dispose de T boules, dont une proportion p est marquée. (Donc : pT boules marquées et $(1-p)T$ boules non marquées.) On tire au hasard N boules parmi ces T et on appelle n la proportion de boules marquées que l'on a obtenues. La distribution de n doit ressembler beaucoup à une binomiale (finalement, on a pris N boules, chacune de ces boules est marquée avec une probabilité p, et on comptabilise les marquées). Expliquer pourquoi ce n'est pas exactement une binomiale et dire dans quelle limite on retrouve la binomiale.
2) Donner la distribution de n. Vérifier que dans la bonne limite on retrouve la binomiale.
3) Montrer que l'on peut écrire n comme une somme de N variables de Bernoulli. Ces variables sont-elles indépendantes ?
4) Calculer la moyenne de n et la variance de n.

2 Processus de Poisson

On suppose que pendant chaque instant infinitésimal $\mathrm{d}t$, il y a de manière indépendante une probabilité $\alpha\,\mathrm{d}t$ qu'un événement se produise.

1) Quelle est la probabilité que pendant un intervalle de temps t, il n'y ait aucun événement ? Un unique événement ? Exactement n événements ?
2) On appelle t_k l'instant où le k-ième événement est arrivé. Calculer la distribution de t_k, puis sa moyenne et sa variance.