Méthodes numériques

Examen du 16 juin 2004 (2^e session)

Durée 3h

Autorisés : documents distribués en cours, notes personnelles, calculettes prêtées
Interdits : téléphones portables, calculettes personnelles

I

Montrer les proprétés suivantes des normes matricielles subordonnées.

1. Pour toute norme matricielle $|||\ \ |||$ subordonnée à une norme vectorielle $\|\ \|$ on a :

$$|||I||| = 1$$

$$\|Av\| \leq |||A|||\ \|v\|$$

2. Pour les normes 1 et ∞ on a :

$$|||A|||_1 = \max_j \Sigma_i |a_{ij}|$$

$$|||A|||_\infty = \max_i \Sigma_j |a_{ij}|$$

II

Ecrire un programme Scilab qui trace le graphe d'un ensemble de courbes integrales solutions de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

III

On rappelle le développement en série de la fonction *Arc tangente* :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

et la majoration de la valeur absolue du reste r_n d'une somme de série alternée dont le terme général décroit en valeur absolue par le premier terme négligé : $|r_n| \ \leq\ |u_{n+1}|$

Pour $x = 1$ cette série converge vers $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

1. Ecrire un programme SCILAB qui calcule la somme des n premiers termes de cette série.
   (a) en calculant directement les valeurs du terme général et de la somme partielle dans une boucle `for` explicite.
   (b) en calculant les valeurs du terme général par une relation de récurrence. En quoi cette version est-elle intéressante ou non par rapport à la précédente ?
   (c) en calculant toutes les valeurs des termes généraux par une seule instruction vectorielle SCILAB. En quoi cette version est-elle intéressante ou non par rapport aux précédentes ?
2. On suppose que l'on dispose d'une machine fictive travaillant en base 10 avec p chiffres significatifs et arrondi. Avec cette machine, au bout de combien d'itérations la somme deviendra-t-elle stationnaire, pour $x = 1.$? (On ne demande pas de faire ces calculs ...).
3. On va plutôt utiliser, pour calculer π, la formule

$$4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$$

   Effectuer les calculs avec la calculette fournie.
   Evaluer les erreurs de méthode et les erreurs de calcul et encadrer la valeur exacte de π.
   Attention : la calculette fournie tronque sans arrondir et elle n'a pas de notation exponentielle.
   En tenir compte dans les calculs et dans l'évaluation des erreurs de calcul.

IV

Déterminer une valeur propre de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et le vecteur propre associé par la méthode de la puissance itérée en faisant les calculs avec une machine fictive travaillant en base 10 avec 3 chiffres significatifs et arrondi.

V

Calculer $\sqrt[3]{3}$ par la méthode de Newton comme racine de l'équation $x^3 - 3 = 0$.
On fera les caluls avec la calculette fournie jusqu'à ce que les valeurs de deux termes successifs de la suite ne diffèrent que de 10^{-4}.
Est-on alors assuré d'avoir obtenu la valeur de $\sqrt[3]{3}$ à 10^{-4} près?
Encadrer la valeur exacte de $\sqrt[3]{3}$.