Université René Descartes - Paris5
UFR de mathématiques et informatique

licence de mathématiques
licence MASS

Méthodes numériques
Examen du 3 septembre 2002
Durée 3h

Autorisés : documents distribués en cours, notes personnelles, calculettes prêtées
Interdits : téléphones portables, calculettes personnelles

I

Donner les valeurs successives de b pendant l'exécution par Scilab des instructions suivantes :

```
a=ones(2,3)
b=[a,a*a';a',a'*a]
b([2,4],[1,5])=zeros(2,2)
b([1,5],[2,4])=b([5,1],[4,2])
b=b-diag(diag(b))
```

II

Effectuer une décomposition QR de la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

1. par un calcul direct
2. par la méthode de Givens
3. par la méthode de Householder.

III

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ par la méthode de Gauss-Jordan, en valeur exacte.

On appliquera l'algorithme vu en cours utilisant en mémoire une seule matrice 3x3.

IV

Résolution de l'équation $x^3 - 2 * x^2 - 6 = 0$
1. Déterminer le nombre de ses racines réelles.
2. Calculer par dichotomie une racine réelle à 0.25 près. Soit x_0 cette valeur.
3. Montrer que les racines sont points fixes d'une fonction de la forme $\phi(x) = a + \frac{b}{x^\alpha}$ où a, b et α sont des constantes que l'on déterminera.
4. La suite récurrente définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$ est-elle convergente quelle que soit la valeur initiale choisie ?
5. Calculer, si elle existe, la limite de la suite obtenue en prenant comme valeur initiale la valeur x_0 calculée en 2. et en faisant les calculs avec une machine fictive travaillant avec 3 chiffres significatifs et arrondi.

V

Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ est tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $\mid i - j \mid > 1$ soit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & ... & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & ... & & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{34} & a_{35} & 0 & ... & 0 \\ ... & & & & & & \\ 0 & & ... & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & & ... & 0 & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1. a) La somme de deux matrices tridiagonales est-elle tridiagonale ?
b) Ecrire un algorithme, ou un programme Scilab, qui fait la somme de deux matrices tridiagonales.
c) Calculer la complexité de cet algorithme.
d) Comparer avec la complexité de la somme de deux matrices carrées quelconques.

2. a) La matrice produit de deux matrices tridiagonales est-elle trigiagonale ?
b) Ecrire un algorithme, ou un programme Scilab, qui fait le produit de deux matrices tridiagonales.
c) Calculer la complexité de cet algorithme.
Comparer avec la complexité du produit de deux matrices carrées quelconques.

3. a) Ecrire un algorithme de résolution d'un système linéaire $AX = B$ où A est une matrice tridiagonale régulière.
b) Calculer la complexité de cet algorithme.
c) On ne traitera pas le cas du pivot nul, mais on indiquera succinctement ce qu'il convient alors de faire.