Université René Descartes - Paris5 | licence de mathématiques
UFR de mathématiques et informatique | licence MASS

Méthodes numériques

Examen du 4 septembre 2001

Durée 3h

Autorisés : documents distribués en cours, notes personnelles, calculettes prêtées
Interdits : téléphones portables, calculettes personnelles

I

Exécuter le programme SCILAB suivant :

```
x=[1:8],
y=x;
y(2:2:8)=y(2:2:9)+1
z=x;
for i=1:7, z(i)=z(i)-z(i+1);end,
z,
t=x;
for i=7:-1:1, t(i)=t(i)-t(i+1);end,
t,
xx=x'*ones(1,4),
xyzt=[x;y;z;t],
u=xyzt;
u(:,[2:2:8])=u(:,[2:2:8])-u(:,[2:2:8]),

r=[0,-6,9,10];
s=[3,9,2,8];
plot2d(x',x',1,"011" ," ",r,s)
plot2d(x',y',1,"011" ," ",r,s)
plot2d(x',z',1,"011" ," ",r,s)
plot2d(x',t',1,"011" ," ",r,s)
xpoly([0.5,8.5],[-5,-5],"lines")
xpoly([0.5,8.5],[9.5,9.5],"lines")
xpoly([0.5,0.5],[-5,9.5],"lines")
xpoly([8.5,8.5],[-5,9.5],"lines")

plot2d(xx,xyzt',[1:4],"011" ," ",r,s)
plot2d(xx,u',[1:4],"011" ," ",r,s)
```

II

Résoudre le système linéaire suivant par la méthode de Gauss-Jordan avec pivot maximal :

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 8x + 4y + 5z = 15 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{array} \right.$$

III

1. Calculer l'inverse et le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ par la méthode de Gauss-Jordan avec pivot maximal. On appliquera l'algorithme vu en cours utilisant en mémoire une seule matrice 3×3.

2. Calculer les normes matricielles de A et de son inverse pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$
   En déduire la valeur du conditionnement de A pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$

3. Montrer que les normes vectorielles $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ vérifient
   pour tout vecteur v, $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$
   et que les normes matricielles $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ vérifient
   pour toute matrice A, $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$

4. En déduire un encadrement de $\|A\|_2$ et de $\|A^{-1}\|_2$ pour la matrice A de la question 1 et un encadrement du conditionnement de A pour la norme $\|.\|_2$

5. Expliquer en quoi il est utile de connaître le conditionnement d'une matrice.

IV

Calculer les deux racines de l'équation $x^2 - 80x + 1 = 0$ par la méthode de Newton avec la précision de la calculette.

V

1. La série de terme général u_n défini par la suite récurrente $u_n = \frac{n}{2n+1}u_{n-1}$ avec $u_0 = 1$ converge vers $\frac{\pi}{2}$. En calculer une valeur approchée avec une machine fictive travaillant avec 4 chiffres significatifs et arrondi en base 10. On donnera toutes les valeurs de u_n et de la somme S_n telles qu'elles seraient données par cette machine jusqu'à ce que la suite des valeurs calculées de S_n soit stationnaire.

2. Ecrire un programme SCILAB qui effectue le même calcul, avec la précision de SCILAB.