Equations différentielles 2

Méthode des différences finies

Problème : trouver une fonction y(x) qui vérifie

$$\left|\begin{array}{l} -y''(x) + c(x)\,y(x) = f(x), \quad 0<x<1, \\ y(0)=\alpha,\ y(1)=\beta \end{array}\right.$$

On supposera que f est au moins 3 fois dérivable.

Ce problème est appelé problème aux limites car au lieu d'imposer des conditions en 0, soit y(0) et y'(0), on impose des conditions aux limites y(0) et y(1).

Si l'on suppose que $c(x) \geq 0$ sur l'intervalle [0,1], on peut montrer que ce problème a une solution et une seule que l'on notera φ. (On peut trouver une condition moins forte).

Méthode

On a, pour i=2 à N (formule de Taylor)

$$\left|\begin{array}{l} \varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{6}\varphi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\varphi^{(4)}(x_i+\theta_i^+ h) \\ \varphi(x_{i-1}) = \varphi(x_i) - h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_i) - \frac{h^3}{6}\varphi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\varphi^{(4)}(x_i+\theta_i^- h) \end{array}\right.$$

avec $-1 < \theta_i^- < 0 < \theta_i^+ < 1$ d'où

$$-\varphi(x_{i+1}) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = -h^2\varphi''(x_i) - \frac{h^4}{24}\left[\varphi^{(4)}(x_i+\theta_i^+ h) + \varphi^{(4)}(x_i+\theta_i^- h)\right]$$

$$= -h^2\varphi''(x_i) - \frac{h^4}{12}\varphi^{(4)}(x_i+\theta_i^+ h) \text{ avec } |\theta|_i \leq \max(\theta_i^+,\theta_i^-) < 1$$

$$-\varphi''(x_i) = \frac{-\varphi(x_{i+1}) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{h^2} + -\frac{h2}{12}\varphi^{(4)}(x_i+\theta_i h)$$

$$= -c(x_i)y(x_i) + f(x_i)$$

en notant $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$, on a

$$\left|\begin{array}{ll} -\frac{\alpha}{h^2} + \frac{2\varphi_1 - \varphi_2}{h^2} + c_1\varphi_1 = f_1 - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_1+\theta_1 h) & (i=1) \\ \frac{-\varphi_{i-1} + 2\varphi_i - \varphi_{i+1}}{h^2} + c_i\varphi_i = f_i - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i+\theta_i h) & 2\leq i\leq N-1 \\ \frac{-\varphi_{N-1} + 2\varphi_N}{h^2} - \frac{\beta}{h^2} + c_N\varphi_N = f_N - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_N+\theta_N h) & (i=N) \end{array}\right.$$

soit $A_h\varphi_h = b_h + \varepsilon_h(\varphi)$ avec

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & 2+c_ih^2 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2+c_{N-1}h^2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2+c_Nh^2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_h=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \\ \varphi_i\\ \\ \varphi_{N-1}\\ \varphi_N\end{bmatrix}\qquad b_h=\begin{bmatrix}f_1+\frac{\alpha}{h^2}\\ f_2\\ \\ f_i\\ \\ f_{N-1}\\ f_N+\frac{\beta}{h^2}\end{bmatrix}\qquad \varepsilon_h(\varphi)=\frac{h^2}{12}\begin{bmatrix}\varphi^{(4)}(x_1+\theta_1 h)\\ \varphi^{(4)}(x_2+\theta_2 h)\\ \\ \varphi^{(4)}(x_i+\theta_i h)\\ \\ \varphi^{(4)}(x_{N-1}+\theta_{N-1} h)\\ \varphi^{(4)}(x_N+\theta_N h)\end{bmatrix}$$

$\varepsilon_h(\varphi)$ est d'autant plus petit que le pas h est petit, à préciser selon la norme (*Exercice*).
On le néglige et on définit le problème discret

$$\boxed{A_h\varphi_h=b_h}$$

en remarquant que A_h et b_h sont calculables à partir des données, ce qui n'est pas le cas de $\varepsilon_h(\varphi)$.

Justification de la terminologie « différences finies » : on remplace $\varphi(x_i)$ par l'un des quotients « aux différences finies » $\frac{\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}$ ou $\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}$ et on itère ce procédé pour $\varphi''(x_i)$, soit

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}-\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}\right]=\frac{-\varphi_{i-1}+2\varphi_i-\varphi_{i+1}}{h^2}$$

Propriété
$\boxed{\text{Le problème discret a une solution et une seule.}}$
En effet, A_h est inversible car définie positive.

Remarque : si φ est un polynôme de degré ≤3, on a $\varphi^{(4)}(x)=0$ d'où $y_i=\varphi(x_i)$

Définitions
Une matrice A est dite *positive* si tous ses éléments a_{ij} sont ≥ 0 (notation A ≥ 0).
Une matrice A est dite *monotone* si elle est inversible et si $A^{-1}\geq 0$.

Lemme : Une matrice A est monotone si et seulement si $\{v \mid Av\geq 0\}\subset\{v \mid v\geq 0\}$

Théorème : $\boxed{\text{Si } c\geq 0, \text{ alors } A_h \text{ est monotone.}}$

il suffit d'établir que pour tout v, si $A_h v\geq 0$ alors $v\geq 0$

Théorème de Gerschgorin :

Si c ≥ 0 et φ est 4 fois continûment dérivable, on a $\max_{1\leq i\leq n}|y_i-\varphi(x_i)|=\|y_h-\varphi_h\|_\infty\leq\frac{1}{96}\sup_{0\leq x\leq 1}|\varphi^{(4)}(x)|h^2$
La méthode est donc convergente et d'ordre 2 .

1. On montre d'abord que $\|A_h^{-1}\|_\infty\leq\frac{1}{8}$ en considérant la matrice A_{oh} correspondant à c=0, en montrant que $\|A_h^{-1}\|_\infty\leq\|A_{oh}^{-1}\|_\infty=\|A_{oh}^{-1}e\|_\infty=\frac{1}{8}$ où e est le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1, après avoir constaté que $A_{oh}^{-1}e$ est solution du problème particulier avec c=0, y(0)=y(1)=0 dont on connaît la solution.
2. On a $\varphi_h-y_h=A_h^{-1}\varepsilon_h(\varphi)$ d'où la relation avec les normes matricielles $\|\varphi_h-y_h\|_\infty\leq\|A_h^{-1}\|_\infty\|\varepsilon_h(\varphi)\|_\infty$ et la majoration annoncée.

Exercice : Appliquer la méthode au problème $-y''(x)+x\,y(x)=(1+2x-x^2)e^x$, y(0)=1, y(1)=0.
Evaluer $\frac{\|\varphi_h-y_h\|_\infty}{h^2}$ pour $h=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$. En déduire que la majoration en $0(h^2)$ est la meilleure possible.