Université René Descartes Paris 5
UFR de mathématiques et informatique

Licence de mathématiques
Licence MASS

Méthodes numériques 2001/2002
Dominique Pastre

Exercices chapitre 10 — Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, gradient, gradient conjugué

Exercice 1 : Appliquer la méthode du point fixe au système

$$\left|\begin{array}{l} 4x - y = 5 \\ x + 3y = -2 \end{array}\right.$$

en choisissant G = 4 Id et $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Exercice 2 : Calculer le rayon spectral de la matrice M obtenue dans l'exercice 1.

Exercice 3
Résoudre le système $\left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \end{array}\right.$

par la méthode de Jacobi en choisissant $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Calculer le rayon spectral de la matrice M.

Exercice 4
Même chose avec le système $\left|\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right.$

Exercice 4 bis
Les matrices A des exercices 3 et 4 sont-elles à diagonale dominante ?

Exercices 5 et 6
Appliquer la méthode de Gauss-Seidel aux systèmes des exercices 3 et 4 et calculer les rayons spectraux des matrices M.

Exercices 7 et 8
Appliquer la méthode du gradient aux deux systèmes des exercices précédents.

Exercices 9 et 10
Appliquer la méthode du gradient conjugué aux deux systèmes des exercices précédents.

Exercice 11
Démontrer les deux résultats énoncés dans le paragraphe "Point de vue géométrique"

Exercice 12
Démontrer (théorème énoncé dans le cours) que la méthode du gradient converge, quel que soit le vecteur initial $X^{(0)}$, vers la solution Xo si $\dfrac{\lambda_M}{\lambda_m} < \sqrt{2}$.

Aide : exprimer ${}^t r^{(k+1)} r^{(k)}$ en fonction de ${}^t r^{(k)} r^{(k)}$ et majorer le rapport obtenu en utilisant les résultats sur le conditionnement des matrices.