

Méthodes numériques 2003/2004

Dominique Pastre

Exercices chapitre 9 Valeurs et vecteurs propres

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. On applique l'algorithme de la puissance itérée avec $v^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Calculer les premières valeurs des vecteurs $u^{(n)}$ et $v^{(n)}$ (notations du cours).

Montrer que $u^{(n)} = \begin{bmatrix} -2^n + (-1)^n \\ 2^n + (-1)^n \\ (-1)^n \end{bmatrix}$. En utilisant la norme la plus simple possible (pour les

calculs), en déduire $v^{(n)}$, ainsi que sa limite, une valeur propre et un vecteur propre de A.

2. Calculer la matrice A1 par l'algorithme de déflation.

3. Continuer l'algorithme de la puissance itérée pour A1 avec $v^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. En déduire une valeur

propre et un vecteur propre de A. On montrera que $u^{(n)} = \begin{bmatrix} -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \\ 2^{n+1} + (-1)^n \end{bmatrix}$.

4. Itérer une troisième fois pour obtenir une dernière valeur propre et un dernier vecteur propre de A. On pourra prendre un $v^{(0)}$ quelconque.

5. Déterminer la matrice de passage et son inverse et vérifier qu'on a bien diagonalisé la matrice A.

6. Était-on sûr d'arriver à ce résultat ?

7. Retrouver ces résultats avec SCILAB. Utiliser successivement les trois normes classiques.