Université René Descartes
UFR de mathématiques et informatique

chapitre 9

Valeurs propres et vecteurs propres

Méthodes numériques 2003/2004 - D.Pastre
licence de mathématiques et licence MASS

Valeurs et vecteurs propres

Problème très important en analyse numérique
Difficile
Remarque :
- les valeurs propres peuvent être complexes, même si la matrice est réelle
- les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles

Théorème de Gerschgorin-Hadamard
Si A est une matrice carrée d'ordre n
$A_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \mid a_{ij} \mid$, $A'_j = \sum_{i=1,i\neq j}^{n} \mid a_{ij} \mid$
alors les valeurs propres de A appartiennent à la réunion des n disques définis par $\mid z - a_{ii} \mid \leq A_i$.
De même elles appartiennent à la réunion des n disques définis par $\mid z - a_{jj} \mid \leq A'_j$

Ce théorème permet de situer grossièrement les valeurs propres.
La localisation est d'autant meilleure que les termes diagonaux sont grands devant les autres.
Cas extrême : matrice diagonale

Algorithme de la puissance itérée

Calcul de la valeur propre de plus grand module et du vecteur propre associé, dans le cas où il existe une seule valeur propre plus grande en module que toutes les autres.

On forme la suite de vecteurs
$v^{(p)} = \frac{Av^{(p-1)}}{\|Av^{(p-1)}\|}$
avec $v^{(o)}$ vecteur arbitraire de R^n
et $\| \;\|$ norme de C^n

Soit λ_1 la valeur propre de plus grand module et $x^{(1)}$ un vecteur propre associé.
Sous certaines conditions, $v^{(p)}$ devient proportionnel à $x^{(1)}$ quand $p \to \infty$ et $\| Av^{(p)} \| \to \mid \lambda_1 \mid$

Théorème - Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant les propriétés suivantes :
1) ses valeurs propres λ_i vérifient $\mid \lambda_1 \mid > \mid \lambda_i \mid$ pour $i = 2...n$
2) A admet n vecteurs propres indépendants $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$,
3) le vecteur initial $v^{(0)}$ s'écrit $\sum_{i=1}^{n} c_i x^{(i)}$ avec $c_1 \neq 0$ dans la base $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$,
alors $v^{(p)} = \frac{Av^{(p-1)}}{\|Av^{(p-1)}\|}$ devient proportionnel à $x^{(1)}$ quand $p \to \infty$ et $\| Av^p \| \to \mid \lambda_i \mid$

Aspect algorithmique
a) test d'arrêt : si $\lambda_1 > 0$ (resp. < 0), on s'arrête si les rapports des composantes de $v^{(p+1)}$ et $v^{(p)}$ appartiennent à $]1-\epsilon, 1+\epsilon[$ (resp. $]-1-\epsilon, -1+\epsilon[$)
b) vitesse de convergence : d'autant plus grande que $\mid \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mid$ est petit où λ_2 est la plus grande valeur propre en valeur absolue après λ_1.
c) cas où $c_1 = 0$: on fait la même chose avec λ_2 et $x^{(2)}$ sous des hypothèses similaires à celles du théorème.

Algorithme de déflation

calcule les autres valeurs propres de A

Principe : λ_1 étant calculée, on déduit une matrice $A1$ qui admet les valeurs propres 0, λ_2, ..., λ_n.
On détermine alors λ_2, etc ...

Détermination de $A1$
λ_1 est aussi valeur propre de ${}^tA$ de vecteur propre y
alors $A1 = A - \frac{\lambda_1}{{}^ty\, x^{(1)}}\, x^{(1)}\, {}^ty$ convient.

Suite du calcul : l'algorithme de la puissance itérée appliqué à $A1$ donne λ_2 valeur propre de plus grand module de $A1$.
En réitérant ce processus de déflation, on pourra calculer successivement toutes les valeurs propres de A, à condition qu'elles soient toutes différentes en module.

Algorithme de Rutishauser

(Autre méthode)

Recherche, au moyen de décompositions LU successives, d'une matrice semblable à la matrice étudiée et triangulaire supérieure.
Les valeurs propres sont alors les éléments diagonaux de la matrice triangulaire.

Principe de l'algorithme
- décomposition LU, $A = LU$
- calcul, à l'aide de la matrice de passage L, de la matrice $L^{-1}AL = L^{-1}LUL = UL$ semblable à A
- iteration, à partir de la nouvelle matrice UL du processus

On définit ainsi les suites A_k, L_k, U_k de matrices par
$A = A_1 = L_1U_1$
$A_2 = U_1L_1 = L_2U_2$
...
$A_{k+1} = U_kL_k = L_{k+1}U_{k+1}$
Les matrices A_k sont toutes semblables à A.

Sous certaines conditions, $A_k \to$ une matrice triangulaire supérieure quand $k \to \infty$

Theorème de convergence

Si A est une matrice telle que
1) ses valeurs propres λ_i sont non nulles et différentes en modules,
soient $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n| > 0$,
d'où A diagonalisable, avec une matrice de passage X (dans la base de vecteurs propres),
2) pour tout k, A_k est décomposable en produit LU,
3) les matrices X et $Y = X^{-1}$ sont décomposables en produit LU,
alors A_k converge, quand $k \to \infty$ vers une matrice triangulaire supérieure ayant les valeurs propres de A ordonnées en valeurs absolues sur sa diagonale.

La vitesse de convergence de A_k vers la forme triangulaire dépend des rapports en modules des valeurs propres entre elles : si $i > j$, $(A_k)_{i,j} \to 0$ comme $|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}|^k$.
La convergence est donc d'autant meilleure que les valeurs propres sont bien séparées en modules.

Test d'arrêt
On pourra s'arrêter, par exemple, lorsque les éléments diagonaux des matrices A_k ne varient pratiquement plus, c'est-à-dire si

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|(A_{k+1})_{ii} - (A_k)_{ii}|}{\sum_{i=1}^{n}|(A_k)_{ii}|} < \epsilon$$

Complément
Si dans la décomposition LU on rencontre un pivot nul, on modifie la matrice en ajoutant un nombre fixe, par exemple 1, aux termes diagonaux.
(Les valeurs propres de $A + \mu I$ sont $\lambda_i + \mu$).
On retranchera alors ce nombre des résultats finaux.