Université René Descartes
UFR de mathématiques et informatique

chapitre 8

Factorisation QR

Calcul direct
Méthode de Givens
Méthode de Householder

Méthodes numériques 2003/2004 – D.Pastre
licence de mathématiques et licence MASS

Définition **:**
Une matrice Q est orthogonale si

$$Q\,{}^tQ = {}^tQ\,Q = I$$

c'est-à-dire

$$\sum_k q_{ik} q_{jk} = Q(:,i).Q(:,j) = {}^tQ(:,i)Q(:,j)$$
$$= 0 \text{ si } i \neq j$$
$$\sum_k (q_{ik})^2 = Q(:,i).Q(:,i) = {}^tQ(:,i)Q(:,i)$$
$$= \| Q(:,i) \|^2 = 1$$

Propriétés :
Les matrices orthogonales sont inversibles
$Q^{-1} = {}^tQ$.
Le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale

Théorème

Pour toute matrice A d'ordre n, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que A=QR.
On peut imposer les signes des éléments diagonaux de R. Si A est inversible, la factorisation correspondante est alors unique.

Intérêt :
- -stabilité des matrices orthogonales (conditionnement = 1)
- -déterminant = ±1
- -inverse = transposée

Unicité :
Si A = QR = Q'R' avec A inversible, on a $Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$ triangulaire supérieure orthogonale donc diagonale avec éléments diagonaux égaux à ±1. Si on impose les signes des éléments diagonaux de R et R' $Q'^{-1}Q = R'R^{-1} = I$ donc Q=Q' et R=R'

Existence et calcul direct (déconseillé) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On doit résoudre le système

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} q_{ik} r_{kj} \text{ c'est-à-dire}$$

$A(:,1)= Q(:,1)\, r_{11}$
$A(:,2)=Q(:,1)\, r_{12} + Q(:,2)\, r_{22}$
…
$A(:,i)=Q(:,1)r_{1i} + Q(:,2)r_{2i} + \ldots + Q(:,i)r_{ii}$
…
$A(:,n)=Q(:,1)r_{1n} + Q(:,2)r_{2n} + \ldots + Q(:,n)r_{nn}$

on calcule, dans l'ordre
$r_{11} = \pm\| A(:,1) \| \neq 0$ si A est inversible
$Q(:,1)= A(:,1) / r_{11} \neq 0$ si A est inversible
$r_{12} = A(:,2).Q(:,1)$
$r_{22} = \pm\| A(:,2) - r_{12}Q(:,1) \|$
$\neq 0$ si A est inversible
$Q(:,2) = [A(:,2) - r_{12}Q(:,1)] / r_{22}$
…

si $k<i\leq n$, $r_{ki} = A(:,i).Q(:,k)$
$\neq 0$ si A est inversible
$r_{ii} = \pm\| A(:,i) - r_{1i}Q(:,1) - r_{2i}Q(:,2) - \ldots - r_{i-1,i}Q(:,i-1) \|$
$\neq 0$ si A est inversible
$= \| A(:,i) - Q(:,1:i-1)\ R(1:i-1,i) \|$
$Q(:,i) = [A(:,i)- Q(:,1:i-1)R(1:i-1,i)] / r_{ii}$

si A n'est pas inversible, un des r_{ii} sera nul et Q(:,i) quelconque

Méthode de Givens

Les matrices de rotation

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && \cos\theta && \sin\theta && \\ &&& 1 &&& \\ && -\sin\theta && \cos\theta && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && c && s && \\ &&& 1 &&& \\ && -s && c && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

avec $c^2+s^2=1$

sont orthogonales

Idée : multiplier A par des matrices de rotation pour faire apparaître des 0 successivement en dessous de la diagonale.

On aura alors
ΠG_i orthogonale régulière $*$ A
= R triangulaire supérieure

et $A = Q*R$
avec $Q = (\Pi G_i)^{-1}$ orthogonale régulière

Propriété :

Soient $c(p,q,A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{pp}=a_{qp}=0 \\ \dfrac{a_{pp}}{\sqrt{a_{pp}^2 + a_{qp}^2}} & \text{sinon} \end{cases}$

$s(p,q,A) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{pp}=a_{qp}=0 \\ \dfrac{a_{qp}}{\sqrt{a_{pp}^2 + a_{qp}^2}} & \text{sinon} \end{cases}$

la matrice G(q,p,A) =

$$= \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && c(p,q,A) && s(p,q,A) && \\ &&& 1 &&& \\ && -s(p,q,A) && c(p,q,A) && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

annule l'élément q,p de A, soit
$(G(q,p,A)*A)_{q,p} = 0$

On fait donc les multiplications suivantes :
(de droite à gauche)

$$\underbrace{*G(n,1,A^{(n-1,1)})*\ldots*G(3,1,A^{(2,1)})*\overbrace{G(2,1,A)*A}^{A^{(2,1)}}}_{A^{(n,1)}}$$

$*G(n,2,A^{(n-1,2)})*\ldots*G(4,2,A^{(3,2)})*G(3,2,A^{(n,1)})$
$*\ldots$
$*G(n,n-2,A^{(n-1,n-2)})*\ G(n-1,n-2,A^{(n,n-3)})$
$G(n,n-1,A^{(n,n-2)})$

$= A^{(n,n-1)}$

$$= \left(\prod_{p=n-1}^{1} \prod_{q=n}^{p+1} G(q,p,A^{(q,p)}) \right) * A$$

On a les relations suivantes entre les $A^{(q,p)}$, en posant $A^{(1,1)} = A$
le « suivant » est
$A^{(q+1,p)}=G(q+1,p,A^{(q,p)})*A^{(q,p)}$ si $1 \leq p<q<n$
$A^{(p+2,p+1)}=G(p+2,p+1,A^{(n,p)})*A^{(n,p)}$
si $1 \leq p<q=p+1 \leq n$

Autre formulation :

$A^{(q,p)}= G(q,p,A^{(q-1,p)})*A^{(q-1,p)}$ si $1 \leq p<p+1<q<n$
$A^{(q,p)}= G(q,p,A^{(n,p-1)})*A^{(n,p-1)}$ si $1 \leq p=q+1<n$

$$\text{Soit } B = \left(\prod_{p=n-1}^{1} \prod_{q=n}^{p+1} G(q,p,A^{(q,p)}) \right) * Id$$

B est orthogonale régulière et on a B*A=R triangulaire supérieure (choix des coefficients c(p,q,A) et s(p,q,A))

On a alors A = QR en prenant $Q = {}^tB$

Programmation
fonction [Q,R]=QR(A,n)
// A est la matrice d'ordre n à factoriser
U=matrice identité d'ordre n
<u>pour p=1 à n-1</u>
  // annulation des coefficients
  // de la colonne p
  <u>pour q=p+1 à n</u>
    // annulation du coefficient $a_{q,p}$
    norme = $\sqrt{a_{pp}^2 + a_{qp}^2}$
    si norme =0 alors c=1,s=0
      sinon c=$a_{p,p}$/norme, s=$a_{q,p}$/norme
    // nouvelles matrices A et U
    // seules les lignes p et q sont modifiées
    A([p,q],:)= $\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$* A([p,q],:)
    U([p,q],:)= $\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$* U([p,q],:)
    Q=tU
    R=A

Méthode de Householder

Les matrices de Householder sont la matrice identité I et les matrices de la forme

$$H(v) = I - 2\,\frac{v\,{}^tv}{{}^tv\,v} = I - 2\,\frac{v\,{}^tv}{\|v\|^2} \quad \text{si } v \neq 0$$

(on peut noter H(0)=I)

Propriété
Les matrices de Householder sont orthogonales.

Théorème
Soit a un vecteur de R^n, il existe deux matrices de Househorder H telles que les n-1 dernières composantes de Ha soient nulles.

1. si $\sum_{i=2}^{n} |a_i| > 0$, les vecteurs
$v_1(a) = a+\|a\|e_1$ et $v_2(a) = a - \|a\|e_1$
sont non nuls et différents.

$$H(v_i(a))a=a - 2\,\frac{(a \pm \|a\|e_1)\ {}^t(a \pm \|a\|e_1)}{{}^t(a \pm \|a\|e_1)\,(a \pm \|a\|e_1)}\,a$$

$$= a - 2\,(a \pm \|a\| e_1)\,\frac{\|a\|^2 \pm \|a\|\; a_1}{\|a\|^2 \pm 2\;\|a\|\; a_1 + \|a\|^2}$$

$$= \mp \|a\| e_1$$

2.si $\sum_{i=2}^{n} |a_i| = 0$, c'est-à-dire $a = \begin{bmatrix} a1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$

$a - a_1 e_1 = 0$ mais

$H(a + a_1 e_1)a = H(a + \text{signe}(a_1)\,\|a_1\|\,e_1)a$

$= -\ \text{signe}(a_1)\,\|a\|\,e_1$

$I\,a = a = \text{signe}(a_1)\,\|a\|\,e_1$

Méthode de Householder

Trouver n-1 matrices de Householder $H_1, H_2 \ldots H_{n-1}$ telles que $A^{(n)} = (H_{n-1} \ldots H_2 H_1)A$ soit triangulaire supérieure.

On aura alors $A = (H_{n-1} \ldots H_2 H_1)^{-1} A^{(n)}$ et on prendra $R = A^{(n)}$ et

$Q = (H_{n-1} \ldots H_2 H_1)^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} \ldots H_{n-1}^{-1}$

$= {}^tH_1\, {}^tH_2 \ldots {}^tH_{n-1}^{-1}$

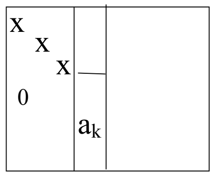
Construction par récurrence

Soit $a = A(:,1)$, il existe v tel que

$H_1 = H(v)a = \pm\|a\|\,e_1$

$$A^{(1)} = H_1\, A = \begin{bmatrix} \pm\|a\| & \boxed{} \\ 0 & \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

Supposons que l'on ait

$A^{(k)} =$ 

$a_k = A^{(k)}(k{:}n,k)$ est un vecteur de R^{n-k+1}

Il existe v_k tel que $H_k = H(v_k) = \pm\|a_k\|\,e_k$

$$\text{Soit } w_k = [\text{zeros}(k-1,1);\ v_k] = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline v_k \end{bmatrix}$$

$$H(w_k) = I_n - 2\,\frac{w_k\,{}^t w_k}{\|w_k\|}$$

$$= I_n - \frac{2}{\|v_k\|} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & v_k\,{}^t v_k \end{array}\right]$$

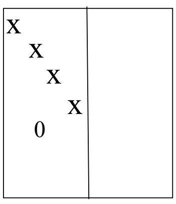
Remarque $\|w_k\| = \|v_k\|$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k-1} \end{array}\right] - \frac{2}{\|v_k\|} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & v_k\,{}^t v_k \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H(v_k) \end{array}\right]$$

soit $H_{k+1} = H(w_k)$

(à calculer à partir de v_k et non w_k)

$A^{(k+1)} = H_{k+1}\, A^{(k)} =$ 

On a donc bien à la fin $A^{(n)}$ triangulaire supérieure.