Université René Descartes - Paris5
UFR de mathématiques et informatique

licence de mathématiques
licence MASS

Méthodes numériques 2003/2004

$\boxed{\text{Exercices chapitre 7}}$ Normes vectorielles – Normes matricielles
Conditionnement

I

Montrer que les normes $\|v\|_1$, $\|v\|_\infty$, $\|v\|_2$, $\|v\|_p$ sont bien des normes et qu'elles sont équivalentes

Aide : pour démontrer l'inégalité triangulaire de $\|v\|_2$ considérer le vecteur (tu+v).(tu+v);
pour $\|v\|_p$ (plus difficile) on pourra montrer d'abord la propriété intermédiaire $\alpha\beta < \alpha^p/p + \beta^p/q$ avec α et β <0 et 1/p + 1/q=1 en utilisant la convexité de l'exponentielle.

II

Montrer que (propriétés énoncées dans le cours) :

1. La norme subordonnée $\|A\|$ est bien une norme matricielle.
2. Pour tout vecteur v, on a $\|Av\| \leq \|A\|\,\|v\|$
3. $\|I\|=1$
4. $\|A\|_1 = \sup\limits_{v\neq 0} \dfrac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$
5. $\|A\|_\infty = \sup\limits_{v\neq 0} \dfrac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$

plus difficile :

6. $\|A\|_2 = \sup\limits_{v\neq 0} \dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$ où ρ(M) désigne le rayon spectral de la matrice M, c'est-à-dire la plus grande valeur propre de M en valeur absolue

III

Montrer que (propriété énoncée dans le cours) toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

IV

Pour toute matrice A inversible, montrer que

1. $\mathrm{cond}(A) \geq 1$
   $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1})$
   $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$ pour tout $\alpha \geq 0$

2. Si A est une matrice normale ($AA^*=A^*A$), en particulier réelle symétrique ($A\,{}^tA = {}^tA\,A$), alors $\mathrm{cond}_2(A)$ est égal au rapport de la plus grande à la plus petite valeur propre de A en valeurs absolues.

3. Si A est une matrice unitaire ($A A^* = A^* A = I$) ou orthogonale (réelle et $A\,{}^tA = {}^tA\,A=I$) alors $\mathrm{cond}_2(A)$ est égal = 1

Remarque : cette propriété montre que les systèmes linéaires à matrice orthogonale ou unitaire sont bien conditionnés.

4. Calculer le conditionnement de la matrice de l'exemple du cours pour les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ sachant que les valeurs propres de A ont pour valeurs numériques approchées 0.01015, 0.8431, 3.858 et 30.29

5. Calculer le conditionnement de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$