Université René Descartes
UFR de mathématiques et informatique

Chapitre 7

Normes vectorielles
Norme matricielles

Conditionnement

Méthodes numériques 2003/2004 – D.Pastre
licence de mathématiques et licence MASS

Normes

Normes vectorielles

Propriétés : pour tous u, v, α

$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v=0$ et $\|v\| \geq 0$

$\|\alpha\, v\| = |\alpha|\,\|v\|$

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Exemples

$$\|v\|_1 = \sum_i |v_i|$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_i |v_i|^2} = \sqrt{v.v}$$

$$\|v\|_p = \left(\sum_i |v_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$$

Deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sont *équivalentes* s'il existe deux constantes c et c' telles que $\|v\|' \leq c\,\|v\|$ et $\|v\| \leq c'\,\|v\|'$

Propriété : ces exemples sont bien des normes et elles sont équivalentes.

Normes matricielles

Propriétés : pour tous A, B, α

$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A=0$ et $\|A\| \geq 0$

$\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$

$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$

Exemple : Norme matricielle subordonnée (à une norme vectorielle)

$$\|A\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} \|Av\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$$

Remarque : $\|A\|$ est bien défini car $\sup_{\|v\|=1} \|Av\|$ est borné en raison de la continuité de l'application $v \to \|Av\|$ et de la compacité de la sphère unité et il existe au moins un vecteur v tel que $\|Av\| = \|A\|\,\|v\|$

Propriétés :

1. La norme subordonnée $\|A\|$ est bien une norme matricielle.
2. Pour tout vecteur v, on a $\|Av\| \leq \|A\|\,\|v\|$
3. $\|I\| = 1$
4. $\|A\|_1 = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$
5. $\|A\|_\infty = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$
6. $\|A\|_2 = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}$

   $= \|A^*\|_2$

où $\rho(M)$ désigne le rayon spectral de la matrice M, c'est-à-dire la plus grande valeur propre de M en valeur absolue

Théorème :

Si A est inversible et M est telle que $\|M-A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ alors M est inversible ;

Si $\|A\|<1$ alors I+A est inversible et $\|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

si I+A est singulière alors $\|A\| \geq 1$

Définition :

A est dite à diagonale strictement dominante si pour tout i $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$

Proposition :

Toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Conditionnement

Sources d'erreurs dans la résolution des problèmes numériques

Erreurs d'arrondi
Erreurs de troncature (méthodes itératives)
Erreurs de mesures (données expérimentales)

Conditionnement d'un système linéaire

Exemple résolution du système A X = B avec

```
    !10  7  8  7 !
A = ! 7  5  6  5 !
    ! 8  6 10  9 !
    ! 7  5  9 10 !

    ! 32 !                ! 1 !
B = ! 23 !         A\B =  ! 1 !
    ! 33 !                ! 1 !
    ! 31 !                ! 1 !

    ! 32.1 !              !  9.2 !
B1= ! 22.9 !       A\B1=  !-12.6 !
    ! 33.1 !              !  4.5 !
    ! 30.9 !              ! -1.1 !
```


erreur relative sur les données $\approx$ 1/200

sur le résultat $\approx$ 10/1

!

En faisant maintenant varier A

```
    !10    7.   8.1  7.2 !
A2= ! 7.08 5.04 6    5   !
    ! 8    5.98 9.89 9.  !
    ! 6.99 4.99 9    9.98!

      ! - 81.  !
A2\B= !   137. !
      ! - 34.  !
      !   22.  !
```

La matrice A a pourtant bon aspect, son déterminant vaut 1 et son inverse est tout aussi sympathique

```
     !  25  -41   10  -6 !
1/A = ! -41   68  -17  10 !
     !  10  -17    5  -3 !
     !  -6   10   -3   2 !
```


Conditionnement d'une matrice

Soient AX = B et $A(X+\delta X)= B+\delta B$

d'où $A\,\delta X= \delta B$, $A^{-1}B= X$ et $A^{-1}\,\delta B= \delta X$

On a $\|B\|=\|AX\|\leq\|A\|\,\|X\|$

$\|X\|=\|A^{-1}B\|\leq\|A^{-1}\|\,\|B\|$

de même

$\|\delta B\|\leq\|A\|\,\|\delta X\|$ et $\|\delta X\|\leq\|A^{-1}\|\,\|\delta B\|$

d'où

$$\frac{1}{\|A\|\,\|A^{-1}\|}\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \leq \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|\frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

On fait maintenant varier A.

Soient AX = B et $(A+\delta A)\,(X+\delta X)= B$

d'où $A\,\delta X + \delta A\,(X+\delta X) = 0$

$\delta X = -A^{-1}\,\delta A\,(X+\delta X)$

$\|\delta X\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\|X+\delta X\|$

et $$\frac{\|\delta X\|}{\|X+\delta X\|} \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Définition : conditionnement d'une matrice

Si A est inversible, cond(A) = $\|A\|\,\|A^{-1}\|$

d'où

Théorème :

1. Soient A une matrice inversible, B un vecteur non nul, et soient X et $X+\delta X$ les solutions des systèmes linéaires $AX=B$ et $A(X+\delta X)=B+\delta B$, alors on a l'inégalité

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)}\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \le \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

et c'est la meilleure possible.

Pour vérifier que c'est la meilleure, prendre $u\neq 0$ et $\delta B\neq 0$ tels que $\|A^{-1}\ \delta B\| = \|A^{-1}\|\,\|\delta B\|$ (ils existent)

2. Soient A une matrice inversible, B un vecteur non nul, et soient X et $X+\delta X$ les solutions des systèmes linéaires $AX=B$ et $(A+\delta A)(X+\delta X)=B$, alors on a l'inégalité

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X+\delta X\|} \le \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

et c'est la meilleure possible.

Pour vérifier que c'est la meilleure, prendre $Y\neq 0$ tel que $\|A^{-1}\ Y\| = \|A^{-1}\|\,\|Y\|$ et $\beta\neq 0$

Supposons maintenant que $\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ alors $\|A^{-1}\ \delta A\| < \|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1$ donc la matrice $I + A^{-1}\ \delta A$ est inversible et

$$\|(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A^{-1}\delta A\|}$$

on a $\delta X = -A^{-1}\,\delta A\ (X+\delta X)$ et

$X+\delta X = (I + A^{-1}\ \delta A)^{-1} X$

d'où, en posant $\|A^{-1}\ \delta A\| = t$

$\|\delta X\| \le t\,\|X+\delta X\| \le t\,\|(I + A^{-1}\ \delta A)^{-1}\|\,\|X\|$

$\le \frac{t}{1-t}\|X\| \le \frac{t'}{1-t'}\|X\|$

avec $t' = \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|$ car la fonction $t \to \frac{t}{1-t}$ est une fonction croissante

d'où

Théorème :

si $\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ alors

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\left(\frac{1}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\right)$$

Propriétés

Pour toute matrice A inversible

1. $\mathrm{cond}(A) \ge 1$

$\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1})$

$\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$ pour tout $\alpha \ge 0$

2. Si A est une matrice normale ($A\,A^* = A^*\,A$), en particulier réelle symétrique ($A\,{}^tA = {}^tA\,A$), alors $\mathrm{cond}_2(A)$ est égal au rapport de la plus grande à la plus petite valeur propre de A en valeurs absolues.

3. Si A est une matrice unitaire ($AA^*=A^*A=I$) ou orthogonale (réelle et $AA^t=A^tA=I$) alors $\mathrm{cond}_2(A)$ est égal = 1

Remarque : cette propriété montre que les systèmes linéaires à matrice orthogonale ou unitaire sont bien conditionnés.