Université René Descartes
UFR de mathématiques et informatique

Chapitre 6

Méthodes itératives 3

Equations différentielles

Méthodes numériques 2003/2004 – D.Pastre
licence de mathématiques et licence MASS

Problème de Cauchy

Si f est une fonction continue d'un domaine $D \subset R^2$ dans R, le problème de Cauchy consiste à trouver les fonctions y(x) telles que

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_o) = y_o \end{array} \right.$$

Définition

On dit que f(x,y) satisfait une condition de Lipschitz dans un domaine $D \subset R^2$ s'il existe une constante L telle que

$$\forall x \in [a,b]\ \forall y,z \in R\ \ |f(x,y)-f(x,z)| \leq L\,|y-z|$$

Théorème

Si dans le domaine $D \subset R^2$ la fonction f(x,y) est définie continue et vérifie une condition de Lipschitz, alors, pour tous $(x_o,y_o) \in D$ il existe un voisinage dans lequel le problème de Cauchy a une solution unique

Exemples

$y'=y-x$; $y' = y/x$; $y' = y^2$; $y' = \sqrt{1-y^2}$

Méthodes d'intégration à pas séparés

Méthode d'Euler

On définit un maillage d'un intervalle [a,b] c'est-à-dire une suite $\{x_o, x_1, \ldots, x_N\}$ telle que

$$\left| \begin{array}{l} x_o=a \\ x_N=b \\ h=(b-a)/N \\ x_{k+1}=x_k+h \end{array} \right.$$

puis, si y(x) est une solution du problème de Cauchy passant par (x_o,y_o), on calcule des valeurs approchées $y_o, y_1, \ldots, y_N$ en les points du maillage par la suite récurrente suivante

$$\left| \, y_{k+1}=y_k+h\,f(x_k,y_k) \right.$$

Cela revient à remplacer, entre x_k et x_{k+1}, la courbe passant par (x_k,y_k) par la tangente en (x_k,y_k).

Bien sûr, des erreurs vont s'accumuler de (x_o,y_o) à (x_k,y_k).

Généralisation

A f(x,y) on associe $\varphi(x,y,h)$ et on définit la suite des valeurs approchées

$$\left| \, y_{k+1}=y_k+h\,\varphi(x_k,y_k,h) \right.$$

La méthode d'Euler correspond à $\varphi(x,y,h)=f(x,y)$

Autre exemple : méthode de la tangente améliorée avec $\varphi(x,y,h)=f(x+\frac{h}{2},y+\frac{h}{2}\,f(x,y))$

Définition 1
Une méthode à pas séparés h est **consistante** avec l'équation y'=f(x,y) si

$$\max_k \left| \frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h} - \varphi(x_k,y_k,h) \right| \underset{h\to 0}{\rightarrow} 0$$

où y(x) est la solution de y'=f(x,y) qui vérifie $y_o=y(x_o)$

Définition 2
Une méthode à pas séparés est **d'ordre r** s'il existe une constante K indépendante de h telle que

$$\max_k \left| \frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h} - \varphi(x_k,y_k,h) \right| \le Kh^r$$

où y(x) est la solution de y'=f(x,y) qui vérifie $y_o=y(x_o)$

Propriétés
- Toute méthode d'ordre ≥ 1 est consistante
- La méthode d'Euler est d'ordre 1 (donc consistante) dans tout intervalle où y" est bornée.

Définition 3

L'erreur de méthode ou erreur de discrétisation est égale à $e_k = y_k - y(x_k)$

Propriété

Si une méthode à pas séparés est d'ordre r, soit

$$\max_k \left| \frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h} - \varphi(x_k,y_k,h) \right| \le Kh^r$$

et si φ vérifie une condition de Lipschitz

$\forall x \in [a,b]\ \forall y,z \in R\ |\varphi(x,y,h) - \varphi(x,z,h)| \le L|y-z|$

alors l'erreur de méthode est majorée par

$$|e_k| < \frac{k}{M}\left(e^{M(x_k-x_o)}-1\right) h^r$$

Définition 4
On considère les deux méthodes d'intégration

$$\left| \begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + h\ \varphi(x_k, y_k, h),\ y_o \text{ donné} \\ \quad \text{et} \\ z_{k+1} = z_k + h\ [\varphi(x_k, z_k, h) + \varepsilon_k],\ z_o \text{ donné} \end{array} \right.$$

La méthode définie par φ est **stable** s'il existe deux constantes M1 et M2 telles que

$$\max_k \|y_k - z_k\| < M1\ \|y_o - z_o\| + M2\ \max_k \|\varepsilon_k\|$$

Définition 5
La méthode définie par φ est **convergente** si

$$\max_k \|\ y_k - y(x_k)\ \| \underset{h\to 0}{\rightarrow} 0$$

Théorème

Si la méthode définie par φ est stable et consistante, alors elle est convergente.

Méthode de Runge-Kutta
On fait plusieurs calculs de f(x,y) en différents points à chaque pas.

Méthode à 1 point intermédiaire
(2 évaluations)

$$\left| \begin{array}{l} a_k = f(x_k, y_k) \\ b_k = f(x_k + \frac{h}{2\alpha},\ y_k + \frac{h}{2\alpha} a_k) \\ y_{k+1} = y_k + h[(1-\alpha)\ a_k + \alpha\ b_k] \end{array} \right.$$

(méthode d'ordre 2)

on prend habituellement

$\underline{\alpha=1}$ (et on retrouve la méthode de la tangente améliorée)

$$\left| \begin{array}{l} a_k = f(x_k, y_k) \\ b_k = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} a_k) \\ y_{k+1} = y_k + h\ b_k \end{array} \right.$$

ou $\underline{\alpha=1/2}$, soit

$$\left| \begin{array}{l} a_k = f(x_k, y_k) \\ b_k = f(x_k + h,\ y_k + h\ a_k) = f(x_{k+1},\ y_k + h\ a_k) \\ y_{k+1} = y_k + h\ (a_k + b_k)/2 \quad \text{(méthode d'ordre 2)} \end{array} \right.$$

ou $\underline{\alpha=3/4}$

Méthode à 2 points intermédiaires (3 évaluations)

$$\begin{cases} a_k = f(x_k, y_k) \\ b_k = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} a_k) \\ c_k = f(x_k + h, y_k + h\, b_k) = f(x_{k+1}, y_k + h\, b_k) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[(a_k + 4\, b_k + c_k] \end{cases}$$

(méthode d'ordre 3)

Méthode à 3 points intermédiaires (4 évaluations)

la plus classique et la plus utilisée

$$\begin{cases} a_k = f(x_k, y_k) \\ b_k = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} a_k) \\ c_k = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} b_k) \\ d_k = f(x_k + h, y_k + h\, c_k) = f(x_{k+1}, y_k + h\, c_k) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[(a_k + 2\, b_k + 2\, c_k + d_k] \end{cases}$$

(méthode d'ordre 4)

Généralisation - Systèmes différentiels - Equations d'ordre supérieur

Soit $y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)})$

En posant $y_1 = y$, $y_2 = y'$, …, $y_p = y^{(p-1)}$, on obtient un système différentiel

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{p-1}' = y_p \\ y_p' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \end{cases}$$

qui peut s'écrire

$Y' = F(x, Y)$ où Y et un vecteur.

Toutes les notions précédentes se généralisent.