Université René Descartes
UFR de mathématiques et informatique

Chapitre 5

# Méthodes itératives 2

# Suites récurrentes - Point fixe
# Résolution d'équations

Méthodes numériques 2003/2004 – D.Pastre
licence de mathématiques et licence MASS



## Suites récurrentes - Point fixe

Il existe de nombreux problèmes dont la solution peut être définie comme la limite d'une suite de nombres ou de vecteurs.
Des méthodes de calcul *itératives* consistent alors à déterminer un nombre fini, suffisamment grand, d'éléments d'une suite, de telle sorte que le dernier élément calculé soit une valeur approchée de la solution cherchée.
Les suites considérées sont souvent des *suites récurrentes*. Les sommes de séries sont des exemples de telles suites.

Une *suite récurrente* est une suite dont les valeurs sont définies à partie de valeurs précédentes.

$\left| \begin{array}{l} x_o, x_1, \dots x_n \text{ donnés} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}, \dots x_{n-k+1}) \end{array} \right.$ définit une suite récurrente d'ordre k

$\left| \begin{array}{l} x_o \text{ donné} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{array} \right.$ définit une suite récurrente d'ordre 1



Soit une suite récurrente $x_o, x_1, \dots x_n$ qui a une limite $\lambda$.
On calcule les valeurs successives de $x_n$ jusqu'à une valeur suffisamment grande de n, déterminée par un critère d'arrêt qui peut être basé
- soit sur l'erreur absolue ( $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ )
- soit sur l'erreur relative ( $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon\, |x_n|$ )

avec $\varepsilon$ fixé à l'avance.
*Remarque* : on n'est pas assuré que $|x_n - \lambda| \le \varepsilon$ ou $|x_n - \lambda| \le \varepsilon\, |\lambda|$



**Point fixe**
Un point fixe d'une suite récurrente définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ est un nombre $\xi$ tel que $\xi = \varphi(\xi)$

**Théorème**

Si $\varphi$ est continue et si la suite récurrente $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ est convergente, alors sa limite est un point fixe.

*Exemple* : $x_{n+1} = \frac{3}{2} x_n (1 - x_n)$ a deux points fixes, 0 et 1/3. Si la limite existe, elle ne peut être que 0 ou 1/3. On vérifie que 1/3 est la limite.

**Interprétation géométrique**
On dessine des cheminements "en escalier" ou "en colimaçon", parfois "en boucle", qui convergent vers la limite, ou qui divergent (infini ou bouclage).
*Exemples :*
$\varphi(x) = \frac{3}{2} x\,(1 - x)$; $\varphi(x) = e^{-x}$; $\varphi(x) = e^{1-x}$;
$\varphi(x) = \frac{1}{x}$; $\varphi(x) = \frac{1}{x} + 2$

**Convergence** Soient :

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et $x_n$ a une limite $\lambda$ quand $n \to \infty$

$e_n = x_n - \lambda$ = écart à la solution à l'itération n

*Définition :*

La formule itérative *récurrente est d'ordre k* si

$$\begin{cases} \varphi'(\lambda) = \varphi''(\lambda) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(\lambda) = 0 \\ \varphi^{(k)}(\lambda) \neq 0 \end{cases}$$

*Propriété :* On a $e_{n+1} = \frac{e_n^k}{k!} \varphi^{(k)} (1 + \theta e_n)$

Donc, plus l'ordre est élevé, plus la convergence est rapide.

*Exemples* : $\varphi(x) = \frac{3}{2} x\ (1 - x)$ et $\psi(x) = x\ (2 - 3x)$

*Définitions :*

On dit qu'il y a *convergence monotone* à partir de $n_o$ si à partir de $n_o$, $|e_n|$ décroît et tend vers 0.

On distingue alors une *phase de recherche* jusqu'à $n_o$ et une *phase de convergence* monotone à partir de $n_o$

La *zone de convergence* est le plus grand intervalle contenant $\lambda$ tel que, quelque soit $x_o$ choisi dans cet intervalle, la convergence est monotone à partir de 0.



**Condition suffisante de convergence des suites du premier ordre**

Soit $D = [\lambda - e_o, \lambda + e_o]$
*Si* $\varphi$ est dérivable, $\varphi'$ continue sur D, et si pour tout $\xi \in D$, on a $|\varphi'(\xi)| < 1$,
*alors* il y a convergence monotone.
La convergence est dite *(pseudo-)linéaire* si $\varphi'(\xi)$ est (sensiblement) constant dans D. L'écart est alors réduit dans un rapport (sensiblement) constant à chaque itération.

**Condition suffisante de convergence des suites du deuxième ordre**

Soit $D = [\lambda - e_o, \lambda + e_o]$
*Si* $\varphi$ et $\varphi'$ sont dérivable, $\varphi''$ continue D, et si pour tout $\xi \in D$, on a $\left|\frac{e_o}{2} \varphi''(\xi)\right| < 1$,
*alors* il y a convergence monotone.
La convergence est dite *(pseudo-)quadratique* si $\varphi''(\xi)$ est (sensiblement) constant dans D.
$e_n$ est alors (sensiblement) proportionnel au carré de $e_{n-1}$.



**Remarques**

Les *méthodes quadratiques* sont plus intéressantes que les méthodes linéaires car convergent plus vite.
Des méthodes d'ordre plus élevé seraient encore plus rapides mais plus lourdes à mettre en place et sont peu utilisées dans la pratique.

Il n'est pas souvent possible de choisir avec certitude un $x_o$ de départ dans la zone de convergence.
Il pourra alors y avoir, même si la suite converge, une phase de recherche dans laquelle il n'y a pas réduction progressive de l'erreur.
Il pourra y avoir divergence.



**Application à la résolution d'une équation f(x)=0**

On cherche une fonction $\varphi$ telle que

$$\boxed{f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)}$$

*Remarques* :on verra que
- il n'y a pas unicité ;
- les différentes fonctions $\varphi$ possible sont plus ou moins bonnes
- il peut y avoir convergence, lente ou rapide ou divergence

*Exemples :*

$x - \cos x = 0$

immédiat : $\varphi(x) = \cos x$

$x^2 - a = 0$ (c'est-à-dire $x = \pm\sqrt{a}$)

plusieurs $\varphi$ possibles

# Résolution d'équations

Soit à trouver une (ou les) solution(s) d'une équation de la forme f(x)=0 où f est une fonction continue sur R ou sur un intervalle.

Si on ne connaît pas de formule directe donnant la réponse, ou si celle-ci est trop compliquée à calculer, on peut chercher des suites récurrentes dont les limites donnent des solutions.

On présente dans la suite trois méthodes classiques :
- la *dichotomie* (principe également utilisé dans d'autres problèmes), la plus simple, la plus sûre, mais lente
- la *méthode de Newton*
- les *méthodes de point fixe* (la méthode de Newton en est un cas particulier)



## Dichotomie

On suppose que f(a) et f(b) sont de signes différents. On sait qu'il y a au moins une racine entre a et b.

**Principe** : en fonction du signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on sait dans quel demi-intervalle se trouve nécessairement une racine, on recommence donc avec ce demi-intervalle, jusqu'à obtenir un intervalle de longueur égale à la précision souhaitée ($\frac{b-a}{2^n}$ après n itérations).

On définit ainsi une suite d'intervalles :

$$[a\ b] = [a_o\ b_o] \supset [a_1\ b_1] \supset [a_2\ b_2] \supset \ldots \supset [a_n\ b_n] \supset \ldots$$

si $f(\frac{a_n+b_n}{2})=0$, alors $\frac{a_n+b_n}{2}$ est racine

sinon, si $f(a_n)$ et $f(\frac{a_n+b_n}{2})$ ont le même signe

alors $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$

sinon $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$



**Algorithme**

$n=o$, $a_o=a$, $b_o=b$, $x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$

si $f(x_n)=0$ alors $x_n$ est solution

si $f(x_n)$ a le même signe que $f(a_n)$

alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$

si $f(x_n)$ a le même signe que $f(b_n)$

alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$

s'arrêter quand $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ (ou $\varepsilon\ |x_n|$) où $\varepsilon$ donné est la précision absolue (ou relative) demandée

**Programmation**

Les valeurs des extrémités des intervalles emboîtés seront rangés dans deux variables (pas deux tableaux !). Une boucle "tant que" calculera les intervalles successifs jusqu'à ce que sa longueur soit inférieure à la précision demandée.

**Exemple**

On trouve une solution à $10^{-10}$ près de l'équation $x\ e^x - 1 = 0$ en 34 itérations, soit $x = 0.5671432904$



**Avantages de cette méthode :**
- elle converge toujours
- pour $\varepsilon$ donné, on connaît le nombre d'itérations nécessaires (qui est égal à $\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$)
- elle est simple (ne demande que le calcul du signe de f(x))

**Inconvénients :**
- convergence lente (seulement linéaire)
- on ne tient compte que du signe de f(x) donc on perd beaucoup d'informations
- s'il y a plusieurs racines, on n'en obtient qu'une et on ne sait pas laquelle
- on doit trouver a et b tels que f(a) et f(b) soient de signes différents
- f doit être continue

Que se passe-t-il si f est discontinue ?

*Exemple* $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ avec a=-2 et b=3

## Méthode de Newton

**Principe**

On suppose que f est continue dérivable. On choisit $x_o$ et on définit une suite récurrente de la façon suivante :

$x_{n+1}$ est l'abscisse de l'intersection avec l'axe des x de la tangente à la courbe au point $(x_n, f(x_n))$

On a $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Sous certaines conditions, la suite a une limite r qui vérifie f(r)=0 et est un point fixe de la fonction $\varphi(x)=x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

*Exemple* : $f(x) = x^2 - a$

On a $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2\,x_n} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$ qui converge vers $\sqrt{a}$

Avec $x_o$=1, on obtient $\sqrt{2}$ à $10^{-8}$ près en 4 itérations.



**Etude de la convergence**

On suppose f définie, continue et dérivable jusqu'à l'ordre 3.

$$\varphi(x)=x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$\varphi''(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)\,f'''(x)}{f'(x)^2} - 2\,\frac{f(x)\,f''(x)^2}{f'(x)^3}$$

si f'(r) et f''(r) ≠ 0 on a $\varphi'(r)=0$ et $\varphi''(r) \neq 0$, la méthode est de 2[nd] ordre, convergence quadratique dans la zone de convergence.

si f'(r) ≠ 0 et f''(r) = 0, il y a un point d'inflexion, la méthode est d'ordre >2

si f'(r) = 0, il y a une racine multiple, la convergence est linéaire

La présence d'une racine multiple ralentit donc la convergence.



**Condition suffisante de convergence**

Si r est une racine et si f et f' sont continues sur $[r,x_o]$ (ou $[x_o,r]$), et si $f(x_o)$ et $f''(x_o)$ sont de même signe sur $[r,x_o]$ (ou $[x_o,r]$), alors il y a convergence monotone.

**Avantages de cette méthode**

- s'il y a convergence celle-ci est rapide (en général quadratique, linéaire si la racine r est multiple)
- elle nécessite un seul point de départ

**Inconvénients**

- f doit être continue dérivable et il faut calculer la dérivée
- la convergence n'est pas assurée dans tous les cas.
  Exemples :
  $f(x) = x^{1/3}$
  $f(x) = \sqrt{x}$ si x>0, $-\sqrt{-x}$ si x<0, 0 sinon
- s'il y a plusieurs racines, elle ne converge pas forcément vers la plus proche de $x_o$.



**Critère d'arrêt**

On s'arrête si $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon_a$ (erreur absolue tolérée) ou $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon_r |x_n|$ (erreur relative) mais on n'est pas assuré d'avoir une racine avec cette précision.

**Contrôle**

Il suffit de vérifier que f(x) s'annule ou change de signe dans l'intervalle $[x_n - \varepsilon_a, x_n + \varepsilon_a]$

Dans la pratique, on se contente d'examiner les signes de $f(x_{n-1})$ et $f(x_n)$ et éventuellement de $f(x_n + \varepsilon_a)$

De plus, on limite a priori le nombre d'itérations et on s'arrête bien sûr si $f'(x_n)=0$ ou si $f(x_n)$ ou $f'(x_n)$ n'est pas défini.

**Algorithme** de calcul d'une racine de $f(x)=0$ à partir de $x_o$, à une précision relative $\varepsilon$, en un nombre maximal nmax d'itérations.

```
x = xo
pour n=1 à nmax
   calculer y=f(x) et renvoyer x si y= 0
   calculer y1=f'(x) et renvoyer "échec"si y=0
                                       ou n'est pas défini
   D = - y/y1
   x=x+D
   si |D|<|ε x|alors
      si signe(y) ≠ signe(f(x)
      ou si signe(y) ≠ signe (f(x(1+ε))
      alors "solution correcte"
      sinon "solution incertaine"
      renvoyer(x)
"abandon après nmax itérations"
```

Exemples :

$f(x) = x e^x - 1$, $x_o=0$, solution à $10^{-10}$ en 7 itérations

$f(x)= x - \cos x$, $x_o = 1$, solution à $10^{-10}$ en 5 itérations



## Méthode de résolution de f(x)=0 par recherche de point fixe

On cherche $\varphi$ tel que $f(x)=0$ si et seulement si $x=\varphi(x)$

Il y a plusieurs possibilités (et même une infinité : pour n'importe quelle fonction $\psi$ qui s'annule en même temps que f, $\varphi(x)=x \pm \psi(x)$ convient !), mais on n'est pas assuré de la convergence, ni de la rapidité de convergence.

***Exemple*** **: résoudre l'équation** $\boxed{x^2 - a = 0}$ (avec $a\neq0$)

**Première fonction $\varphi$**

$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x - \frac{a}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{x}$ conduit à $\psi(x)= x - \frac{a}{x}$ et $\boxed{\varphi(x)= \frac{a}{x}}$, mais $x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$ $\boxed{\text{diverge}}$ quels que soient les valeurs de a et $x_o \neq \sqrt{a}$



**Autre fonction $\varphi$**

$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = 2x - \frac{a}{x}$ conduit à $\boxed{\varphi(x)=2x - \frac{a}{x}}$,

$x_{n+1} = 2x_n - \frac{a}{x_n}$ $\boxed{\text{diverge}}$ aussi quels que soient les valeurs de a et $x_o \neq \sqrt{a}$

**Une bonne fonction $\varphi$**

$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x})$ conduit à $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x})}$,

$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n})$ $\boxed{\text{converge linéairement}}$ vers $\pm\sqrt{a}$

**Une meilleure fonction $\varphi$**

$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ conduit à $\boxed{\varphi(x)= \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})}$,

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ $\boxed{\text{converge quadratiquement}}$ vers $\pm\sqrt{a}$. (C'est la méthode de Newton.)