Université René Descartes
UFR de mathématiques et informatique

Chapitre 4

Méthodes itératives 1

Sommes de séries

Méthodes numériques 2003/2004 – D.Pastre
licence de mathématiques et licence MASS

Sommes de séries

$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

suite récurrente $S_o = u_o \quad S_n = S_{n-1} + u_n$

On calcule un nombre grand mais fini de termes.

Deux sources d'erreur :

- erreur de méthode, mathématique, le reste $r_n = S - S_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ qui diminue quand n augmente ;

- erreur de calcul due au fait que la valeur de chaque terme n'est qu'approchée, qui augmente quand n augmente.

Exemple :

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

dans ce cas particulier, on peut facilement majorer le reste par $\frac{1}{n!\ n} = \frac{u_n}{n}$

Calcul :

i = 0	u = 1.	S = 1.
i = 1	u = 1.	S = 2.
i = 2	u = 0.5	S = 2.5
i = 3	u = 0.16666667	S = 2.6666667
i = 4	u = 0.041666667	S = 2.7083334
i = 5	u = 0.0083333333	S = 2.7166667
i = 6	u = 0.0013888889	S = 2.7180556
i = 7	u = 0.00019841270	S = 2.718254
i = 8	u = 0.000024801587	S = 2.7182788
i = 9	u = 0.000002755732	S = 2.7182816
i = 10	u = 2.7557319E-07	S = 2.7182818
i = 11	u = 2.5052108E-08	S = 2.7182818

erreur de calcul : $0.5\times10^{-7}\times8 = 4\times10^{-7}$
d'où $2.7182814 \le S_{10} \le 2.7182822$
erreur de méthode : $0 < r_{10} < u_{10}/10 < 0.3\times10^{-7}$
D'où $2.7182814 \le e < 2.7182823$

i	u	S
0	1.0000000000E+00	1.0000000000E+00
1	1.0000000000E+00	2.0000000000E+00
2	5.0000000000E-01	2.5000000000E+00
3	1.6666666667E-01	2.6666666667E+00
4	4.1666666667E-02	2.7083333333E+00
5	8.3333333333E-03	2.7166666667E+00
6	1.3888888889E-03	2.7180555556E+00
7	1.9841269841E-04	2.7182539683E+00
8	2.4801587302E-05	2.7182787698E+00
9	2.7557319224E-06	2.7182815256E+00
10	2.7557319224E-07	2.7182818011E+00
11	2.5052108385E-08	2.7182818262E+00
12	2.0876756988E-09	2.7182818283E+00
13	1.6059043837E-10	2.7182818284E+00
14	1.1470745598E-11	2.7182818285E+00
15	7.6471637318E-13	2.7182818285E+00

erreur de calcul : $0.5\times10^{-10}\times12 = 6\times10^{-10}$
d'où $2.7182818279 \le S_{14} \le 2.7182818291$
erreur de méthode : $0 < r_{14} < u_{14}/14 < 10^{-12}$
d'où $2.7182818279 \le e < 2.7182818291_{01}$

i	u	S
0	0.1000000000000000E+01	1.000000000000000
1	0.1000000000000000E+01	2.000000000000000
2	0.5000000000000000E+00	2.500000000000000
3	0.1666666666666667E+00	2.666666666666667
4	0.4166666666666666E-01	2.708333333333333
5	0.8333333333333333E-02	2.716666666666666
6	0.1388888888888889E-02	2.718055555555555
7	0.1984126984126984E-03	2.718253968253968
8	0.2480158730158730E-04	2.718278769841270
9	0.2755731922398589E-05	2.718281525573192
10	0.2755731922398589E-06	2.718281801146385
11	0.2505210838544172E-07	2.718281826198493
12	0.2087675698786810E-08	2.718281828286169
13	0.1605904383682162E-09	2.718281828446759
14	0.1147074559772973E-10	2.718281828458230
15	0.7647163731819817E-12	2.718281828458995
16	0.4779477332387386E-13	2.718281828459043
17	0.2811457254345521E-14	2.718281828459046
18	0.1561920696858623E-15	2.718281828459046

erreur de calcul : $0.5\times10^{-15}\times15 = 7.5\times10^{-15}$ d'où

$2.718281828459038 \leq S_{17} \leq 2.718281828459054$

erreur de méthode : $0 < r_{17} < u_{17}/17 < 0.2\times10^{-15}$

d'où

$2.718281828459038 \leq e < 2.718281828459054_2$

Remarque : sachant que 2<e<3, on peut calculer plutôt e-2, compris entre 0 et 1 et on gagnera ainsi un chiffre.

Autre exemple (série divergente) :

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

est divergente, mais, à partir d'une certaine valeur de n (grande) la somme sera stationnaire !

Attention, en machine, toute suite dont le terme général tend vers 0 en décroissant, devient stationnaire.

Autres exemples (calcul de π):

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ permet de calculer une valeur approchée de π car elle est égale à $\pi^2/6$

En calculant S-1 avec une machine travaillant avec p chiffres significatifs jusqu'à $n=E\left(\sqrt{2\times10^p}\right)\approx4500$ si p=7, on a une erreur de calcul majorée par $0.5\times10^{-p}\times n\approx1/n \approx 2.2\times10^{-4}$ si p=7, une erreur de méthode majorée par $1/n \approx 2.3\times10^{-4}$ d'où une erreur totale majorée par 5×10^{-4}

Même si l'on peut améliorer la précision en remarquant que l'on peut encadrer le reste ($1/(n+1)<r_n<1/n$), il vaut mieux utiliser des séries dont la convergence est plus rapide pour calculer π, par exemple

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}\ldots+\frac{n!}{3\times5\times\ldots(2n+1)}+\ldots$$

$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ avec $u_o=1$ et $u_n=\frac{n}{2n+1}u_{n-1}$

Convergence plus ou moins rapide et divergence :

1. La série de terme général $\frac{1}{n!}$ converge très vite et on a $0<r_n<\frac{u_n}{n}$, on peut donc s'arrêter dès que $S_{n+1} = S_n$ (en machine)

2. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge très lentement, r_n est relativement grand (de l'ordre de $\frac{1}{n}$). Quand S_n devient stationnaire, on n'est pas encore proche de S, un calcul plus fin s'impose : calculer $S_n + r_n$ dont le nouveau reste est majoré par $\frac{1}{n^2}$.

3. La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge. Pourtant, S_n deviendra stationnaire dès que $n \geq 2\times10^p$ où p est le nombre de chiffres significatifs avec lequel la machine travaille. r_n est alors infini.