Université René Descartes
UFR de mathématiques et informatique

chapitre 3

Décompositions LU

Méthodes numériques 2003/2004 – D.Pastre
licence de mathématiques et licence MASS

Décompositions LU

On cherche à décomposer une matrice A en deux matrices L (Left, triangulaire inférieure) et U (Up, triangulaire supérieure) telles que le produit LU soit égal à A

1. **Motivations**

calculs plus rapides, par exemple

- Résolution du système AX=B, pour plusieurs "seconds membres" successifs B en le remplaçant par la résolution de deux systèmes triangulaires

LY=B	résolu de haut en bas
UX=Y	résolu de bas en haut

Exercice : quelle est la complexité de ce calcul ?

- Calcul de l'inverse de A par $A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$

Exercice : quelle est la complexité de ce calcul ?

- Calcul de valeurs et vecteurs propres

2. Décomposition par la méthode de Gauss A = LU ou A = PLU (théorie)

Si A est régulière et qu'il n'y a pas d'échanges de lignes, on a la dernière matrice

$$A^{(n)} = (\prod G_k)\, A$$

où $A^{(n)}$ est triangulaire supérieure et $(\prod G_k)$ est triangulaire inférieure.
On prend alors

$$L = (\prod G_k)^{-1}$$
$$U = A^{(n)}$$

S'il y a eu des échanges de lignes, on a

$$A^{(n)} = (\prod G_k\, P(k,i_k))\, A = (\prod G'_k)\,(\prod P(k,i_k))\, A$$

On a alors A = P L U
avec $P = \prod P(k,i_k)$
$L = (\prod G'_k)^{-1}$
$U = A^{(n)}$

3. Décomposition par l'algorithme de Gauss 2ème version (gauss1) A=LU ou A=PLU

Soit A la matrice finale obtenue par la variante de l'algorithme (2ème version).
Soit L la partie inférieure gauche de A, diagonale comprise.
Soit U la partie supérieure droite de A dont les éléments de la diagonale sont mis à 1.

En utilisant les formules définissant $A^{(k)}$

$$A^{(k+1)}_{k,j} = A^{(k)}_{k,j} / A^{(k)}_{k,k} \quad \text{pour } j>k$$
$$A^{(k+1)}_{i,j} = A^{(k)}_{i,j} - A^{(k)}_{i,k} * A^{(k+1)}_{k,j} \quad \text{pour } j>k \text{ et } i > k$$

puis en exprimant les $L_{i,j}$ et $U_{i,j}$ en fonction des $A^{(i+1)}_{i,j}$ et $A^{(j)}_{i,j}$ on vérifie le résultat annoncé.

Exercice : calculer la complexité de la résolution du système AX = B

1. En calculant L et U puis en résolvant les systèmes LY=B et UX=Y
2. En résolvant les systèmes LY=B et UX=Y, connaissant déjà L et U
3. Comparer avec la méthode de Gauss

4. Condition de décomposition A = LU (théorie)

Propriétés : A inversible admet une décomposition LU si et seulement si tous ses mineurs principaux sont inversibles.
Si l'on impose les valeurs, non nulles, de la diagonale de L (ou de U), cette décomposition est unique.

Unicité
Si A = L U = L' U', $L_{i,i} = L'_{i,i}$ imposés non nuls, on déduit facilement que $L^{-1}L'$ et $U\,U'^{-1}$ sont égales et égales à la matrice identité, donc L=L' et U=U'

Existence par récurrence sur n
- si n=1, évident
- si n>1, $A = \left(\begin{array}{c|c} A' & b \\ \hline b' & a \end{array}\right)$ avec A' d'ordre n-1.

A' est inversible ainsi que tous ses mineurs principaux donc est égale à un produit L' U'
on cherche $L = \left(\begin{array}{c|c} L' & 0 \\ \hline v & 1 \end{array}\right)$, $U = \left(\begin{array}{c|c} U' & w \\ \hline 0 & u \end{array}\right)$ avec 1 imposé non nul vérifiant A=LU, c'est-à-dire

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L'U' & L'w \\ \hline vU' & vw + 1\,u \end{array}\right), \text{ soit } \begin{cases} L'w = b \\ v\,U' = b' \\ vw + lu = a \end{cases}$$

d'où l'on déduit w, v et u d'une manière unique.

Réciproquement, si A inversible a une décomposition LU, alors tous ses mineurs principaux sont non nuls.
Considérer la décomposition par blocs
$L = \begin{pmatrix} L' & 0 \\ X & L'' \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} U' & Y \\ 0 & U'' \end{pmatrix}$ où L' et U' sont d'ordre k, alors L'U' =A' d'ordre k a un déterminant non nul

Remarque 1 : si A n'est pas inversible, il peut exister des décompositions LU, mais il n'y a pas unicité.
Exemple :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Remarque 2 : Toute matrice inversible peut être, par des permutations de lignes, transformée en une matrice dont tous les mineurs principaux sont inversibles. (pivots de Gauss non nuls sans échanges)

5. Calcul direct de L et U

Avec tous les éléments de la diagonale de L donnés non nuls.

On a $\quad a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj}$

D'où
$$u_{i,j} = (a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} u_{k,j}) / l_{ii \text{ (donné)}} \quad \text{pour } j \geq i$$
$$l_{i,j} = (a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} u_{k,j}) / u_{j,j} \quad \text{pour } j < i$$

On calculera alternativement, les lignes de U et les colonnes de L.
On retrouve comme condition nécessaire le fait que tous les mineurs principaux de A doivent être non nuls.

Exemple : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$ si a≠0

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d - be \end{bmatrix}$ si a=c=0

n'a pas de décomposition LU si a=0 et c≠0

Avec tous les éléments de la diagonale de L donnés non nuls.

1^ère^ ligne de U :
pour j=1 à n $a_{1j} = l_{11}\, u_{1j}$
soit, en notation Scilab
U(1, :) = A(1,:) /L(1,1)
Remarque : L(1,1) est donné

1^ère^ colonne de L :
pour i=1 à n $a_{i1} = l_{i1}\, u_{11}$
soit, en notation Scilab
L(: ,1) = A(:, 1) /U(1,1)
Remarque : U(1,1) vient d'être calculé

On suppose qu'on a calculé les p premières lignes de U et les p premières colonnes de L

(p+1)$^{\text{ème}}$ ligne de U : pour j=p+1 à n

$$a_{p+1,j} = \sum_{k=1}^{p} l_{p+1,k}\, u_{k,j} + l_{p+1,p+1}\, u_{p+1,j}$$

soit U(p+1,p+1:n) =
[A(p+1,p+1:n) –
L(p+1, 1:p)*U(1:p, p+1:n)] / L(p+1,p+1)
U(p+1, 1:p)=0
Remarque : L(p+1,p+1) est donné

(p+1)$^{\text{ème}}$ colonne de L : pour i=p+1 à n

$$a_{i,p+1} = \sum_{k=1}^{p} l_{i,k}\, u_{k,p+1} + l_{i,p+1}\, u_{p+1,p+1}$$

soit L(p+1:n, p+1) =
[A(p+1:n,p+1) –
L(p+1:n,1:p)*U(1:p,p+1)] /U(p+1,p+1)
L(1:p, p+1)=0
Remarque : U(p+1,p+1) vient d'être calculé

Exemple :

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-4\\3&3&-5\\4&5&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&0&0\\&\mathbf{1}&0\\&&\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{-4}\\0&&\\0&0&\end{bmatrix} \text{ (1}^{\text{ère}}\text{ ligne de U)}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{3/2}&1&0\\\mathbf{2}&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-4\\0&&\\0&0&\end{bmatrix} \text{ (1}^{\text{ère}}\text{ colonne de L)}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\3/2&1&0\\2&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-4\\0&\mathbf{3/2}&\mathbf{1}\\0&0&\end{bmatrix} \text{ (2}^{\text{ème}}\text{ ligne de U)}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\3/2&1&0\\2&\mathbf{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-4\\0&3/2&1\\0&0&\end{bmatrix} \text{ (2}^{\text{ème}}\text{ colonne de L)}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\3/2&1&0\\2&\mathbf{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-4\\0&3/2&1\\0&0&\mathbf{4}\end{bmatrix} \text{ (3}^{\text{ème}}\text{ ligne de U)}$$

A comparer avec la décomposition obtenue par la méthode de Gauss

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\3&3/2&0\\4&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1/2&-2\\0&1&2/3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Rappel : les pivots étaient 2, 3/2 et 4

Autres exemples :

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-4\\4&2&1\\2&1&\end{bmatrix}$$ plusieurs solutions

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-4\\4&2&1\\2&2&\end{bmatrix}$$ impossible

6. Condition pour que la décomposition LU soit possible

On a A(1:p, 1:p) = L(1:p, 1:p) U(1:p, 1:p)
Notation $A_p = L_p\ U_p$
d'où l'égalité des déterminants
$|A_p| = |L_p| * |U_p| = l_{pp} * |L_{p-1}| * |U_p|$

Soient $A_{(i)p}$ et $L_{(i)p}$ les matrices obtenues en remplaçant la p$^{\text{ème}}$ ligne de A_p et L_p par la i$^{\text{ème}}$ ligne de A et L réduites aux p premières colonnes, cad $A_{(i)p}$ = A([1:p-1,i], 1:p)
et $L_{(i)p}$ = L([1:p-1,i], 1:p)
On a $A_{(i)p} = L_{(i)p}\ U_p$
$|A_{(i)p}| = |L_{(i)p}| * |U_p| = l_{ip} * |L_{p-1}| * |U_p|$
d'où :

si $|A_p| \neq 0$, $l_{ip} = l_{pp} * \frac{|A_{(i)p}|}{|A_p|}$

si $|A_p| = 0$ et si pour tout i $|A_{(i)p}| = 0$, l_{ip} est indéterminé et peut être pris quelconque
sinon la décomposition est impossible

Un raisonnement analogue sur les colonnes donne, avec la notation $A_{p(j)} = A(1:p,[1:p-1,j])$

$A_{p(j)} = L_p \, U_{p(j)}$

$|A_{p(j)}| = |L_p| * |U_{p(j)}| = |L_p| * |U_{p-1}| * u_{pj}$

$= |L_{p-1}| * l_{pp} * |U_{p-1}| * u_{pj} = |A_{p-1}| * l_{pp} * u_{pp}$

si $|A_{p-1}| \neq 0,\quad u_{pj} = \frac{1}{l_{pp}} * \frac{|A_{p(j)}|}{|A_{p-1}|}$

en particulier $u_{pp} = \frac{1}{l_{pp}} * \frac{|A_p|}{|A_{p-1}|}$ (=0 si $|A_p| = 0$)

si $|A_{p-1}| = 0$ et si pour tout j $|A_{p(j)}| = 0$, u_{pj} est indéterminé et peut être pris quelconque
sinon la décomposition est impossible.

Remarque : pour le premier p tel que $|A_p| = 0$ on a $u_{pp} = 0$

Théorème :

Si **A est une matrice régulière**, sa décomposition LU est possible si et seulement si tous ses mineurs principaux A_p sont réguliers.
Si on impose les valeurs, non nulles, de la diagonale de L, la décomposition est unique.

Si **A est singulière**, la décomposition est possible si et seulement si pour chaque mineur principal A_p singulier, pour tous i et j supérieurs à p, tous les $A_{(i)p}$ et $A_{p(j)}$ sont singuliers. Tous les A_q sont alors singuliers pour q supérieur à p.
La décomposition n'est pas unique sauf si n est le premier p tel que A_p soit singulier