

chapitre 2

Méthode de Gauss-Jordan

Calcul de l'inverse d'une matrice

Méthodes numériques 2003/2004 - D.Pastre
licence de mathématiques et licence MASS

1

Méthode de Gauss-Jordan

Variante de la méthode de Gauss (gauss1):
à la $k^{\text{ème}}$ étape, on combine toutes les lignes
(sauf la ligne k) avec la ligne k (au lieu de ne
le faire que pour les lignes d'indice supérieur à
 k)

On fait ainsi apparaître des 0 sur toute la colonne
sauf au niveau du pivot $a_{kk}^{(k)}$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

2

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ligne 1} / 2 \\ \text{ligne 2} - 3 * \text{ligne 1} \\ \text{ligne 3} - 4 * \text{ligne 1} \end{array}$$

ligne 2 / $\frac{3}{2}$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ligne 1} - \frac{1}{2} * \text{ligne 2} \\ \text{ligne 3} - 3 * \text{ligne 2} \end{array}$$

ligne 3 / 4

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ligne 1} + \frac{7}{3} * \text{ligne 3} \\ \text{ligne 2} - \frac{2}{3} * \text{ligne 3} \end{array}$$

On a directement les racines dans la 4^e colonne.

3

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right]$$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \end{array} \right]$$

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & a_{24}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \end{array} \right]$$

$$A^{(4)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_{14}^{(4)} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24}^{(4)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(4)} \end{array} \right]$$

Les solutions sont dans $A^{(n+1)}(:, n+1) = B^{(n+1)}$.
Il n'y a donc pas de phase de remontée.
Mais on fait plus d'opérations.

4

Algorithme

Comme précédemment pour :

- recherche du pivot (non nul ou max)

- nouvelle ligne k

différent pour :

- nouvelles lignes i

pour $k = 1$ à n

recherche du pivot (non nul ou max)

échange éventuel de lignes

{le pivot $a_{kk} \neq 0$ }

division de la ligne k par a_{kk}

pour $i = 1$ à n sauf k ,

retrancher à la ligne i

la nouvelle ligne k multipliée par a_{ik}

(pour les colonnes de k (ou $k + 1$) à n)

les solutions sont dans la $(n + 1)^{\text{ème}}$ colonne

$$(x_i = a_{i,n+1})$$

5

Complexité

Le nombre d'opérations est de l'ordre de n^3 au lieu de $\frac{2n^3}{3}$

A vérifier en exercice.

Donc moins intéressant que l'algorithme de Gauss.

Mais application intéressante pour le calcul de l'inverse d'une matrice.

6

Calcul de l'inverse d'une matrice

La formule théorique $(A^{-1})_{ij} = \frac{\text{cofacteur}(a_{ij})}{\det(A)}$ est inutilisable pratiquement.

On utilise la propriété suivante :

le j^{e} vecteur colonne de A^{-1} est $X_j = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

et est donc solution du système $AX_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

On va résoudre les n systèmes en même temps par la méthode de Gauss-Jordan

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ conduira à $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right]$

et $A^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}$

7

Calcul

A

Exemple

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_{11}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_{21}^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & b_{31}^{(2)} & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} & b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & b_{31}^{(3)} & b_{32}^{(3)} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11}^{(4)} & b_{12}^{(4)} & b_{13}^{(4)} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21}^{(4)} & b_{22}^{(4)} & b_{23}^{(4)} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31}^{(4)} & b_{32}^{(4)} & b_{33}^{(4)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19/12 & -3/2 & 7/12 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array} \right]$$

A^{-1}

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 19 & -18 & 7 \\ -14 & 12 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Vérifier que $A * A^{-1} = I$

La vérification est plus facile que le calcul !

Elle permet de trouver une erreur éventuelle ou d'être sûr que le calcul est correct.

8

La moitié de l'espace utilisé est inutile. On n'utilisera qu'une matrice et on rangera au fur et à mesure les nouvelles colonnes de B à la place des colonnes de A devenues inutiles.

A	Exemple	
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} b_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ b_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc ccc} 1/2 & 1/2 & -2 & & & \\ -3/2 & 3/2 & 1 & & & \\ -2 & 3 & 6 & & & \end{array} \right]$	
$\begin{bmatrix} b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} \\ b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} \\ b_{31}^{(3)} & b_{32}^{(3)} & a_{33}^{(3)} \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc ccc} 1 & -1/3 & -7/3 & & & \\ -1 & 2/3 & 2/3 & & & \\ 1 & -2 & 4 & & & \end{array} \right]$	
$\begin{bmatrix} b_{11}^{(4)} & b_{12}^{(4)} & b_{13}^{(4)} \\ b_{21}^{(4)} & b_{22}^{(4)} & b_{23}^{(4)} \\ b_{31}^{(4)} & b_{32}^{(4)} & b_{33}^{(4)} \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc ccc} 19/12 & -3/2 & 7/12 & & & \\ -7/6 & 1 & -1/6 & & & \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 & & & \end{array} \right]$	
A^{-1}	$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 19 & -18 & 7 \\ -14 & 12 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$	

9

Premier algorithme

Calcul de l'inverse de la matrice A.

A devient la matrice identité.

Le résultat est dans A(:, n + 1 : 2n).

$A(n + 1 : 2n, :) = \text{diag}(\text{ones}(1, n))$ {identité}
ou $A = [A, \text{diag}(\text{ones}(1, n))]$
 $\text{perm} = 1 : n$ {pour tout i $\text{perm}(i) = i$ }
{ perm servira à mémoriser les permutations}
{ $\text{perm}(i) = l$ signifie qu'il y a eu permutation des lignes i et l }

pour $k = 1$ à n

recherche du pivot maximal

$a_{max} = 0; l = k;$

pour $i = k$ à n , si $\text{abs}(A(i, k)) > a_{max}$

alors $l = i$

$a_{max} = \text{abs}(A(i, k))$

si $a_{max} = 0$ alors (matrice singulière, pas d'inverse, retour)

si $l \neq k$ alors

| permuter les lignes l et k entre k et $n + k - 1$
| permuter $\text{perm}(l)$ et $\text{perm}(k)$

10

$p = A(k, k)$ {c'est le pivot}

{nouvelle ligne k }

$A(k, [k : n + k]) = A(k, [k : n + k])/p$

{pour $k : n$, c'est $A^{(k)}$ }

{pour $n + 1 : n + k$ c'est les "seconds membres"}

{nouvelles lignes i }

pour $i = 1$ à n sauf k

$A(i, [k : n + k]) = A(i, [k : n + k]) - A(i, k) * A(k, [k : n + k])$

{permutations éventuelles des colonnes}

pour $j = 1$ à n

si $\text{perm}(j) \neq j$ alors

{Attention, permuter une seule fois}

| soit k tel que $\text{perm}(k) = j$

| permuter colonnes $n + k$ et $n + j$

| $\text{perm}(k) = \text{perm}(j)$

11

Meilleur algorithme

Calcul de l'inverse de la matrice A.

Le résultat est dans A.

(Pour conserver la valeur initiale de A on fera une sauvegarde avant les calculs ou on écrira une fonction inverse(A) qui renvoie l'inverse.)

$\text{perm} = 1 : n$ { $\text{perm}(i) = i$ }

{ perm servira à mémoriser les permutations}

{ $\text{perm}(i) = l$ signifie qu'il y a eu permutation des lignes i et l }

pour $k = 1$ à n

recherche du pivot maximal

$a_{max} = 0; l = k;$

pour $i = k$ à n , si $\text{abs}(A(i, k)) > a_{max}$

alors $l = i$

$a_{max} = \text{abs}(A(i, k))$

si $a_{max} = 0$ alors (matrice singulière, pas d'inverse, retour)

si $l \neq k$ alors | permuter les lignes l et k
| permuter $\text{perm}(l)$ et $\text{perm}(k)$

12

$p = A(k, k)$ {c'est le pivot}

{nouvelle ligne k }

$$A(k, [1 : k - 1, k + 1 : n]) = A(k, [1 : k - 1, k + 1 : n]) / p$$

{pour $k + 1 : n$, c'est $A^{(k)}$,
pour $1 : k - 1$ c'est les "seconds membres" }

{nouvelles lignes i }

pour $i = 1$ à n sauf k

$$A(i, [1 : k - 1, k + 1 : n]) = A(i, [1 : k - 1, k + 1 : n]) - A(i, k) * A(k, [1 : k - 1, k + 1 : n])$$

{colonne k ("seconds membres")}

$$A([1 : k - 1, k + 1 : n], k) = -A([1 : k - 1, k + 1 : n], k) / p \quad \{0 - a_{ik} / p\}$$

$$A(k, k) = 1 / p$$

{permutations éventuelles des colonnes}

pour $j = 1$ à n

si $perm(j) \neq j$ alors

{Attention, permuter une seule fois}

soit k tel que $perm(k) = j$

permuter colonnes k et j

$perm(k) = perm(j)$