Université René Descartes Paris 5
UFR de mathématiques et informatique

Licence de mathématiques
Licence MASS

Méthodes numériques

Examen du 12 juin 2003

Durée 3h

Autorisés *: documents distribués, notes personnelles de cours, calculettes prêtées*
Interdits *: téléphones portables, calculettes personnelles*

I

On appelle matrice en étoile une matrice carrée de dimension impaire dont tous les éléments sont nuls sauf ceux des deux diagonales, de la colonne du milieu et de la ligne du milieu.

Exemple : $\begin{bmatrix} 2 & & & 4 & & & 2 \\ & 8 & & 5 & & 8 & \\ & & 7 & 2 & 2 & & \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 9 & 1 \\ & & 6 & 3 & 7 & & \\ & 1 & & 7 & & 6 & \\ 3 & & & 8 & & & 1 \end{bmatrix}$ (où les zéros ne sont pas affichés).

1. Ecrire un programme SCILAB qui remplit une matrice en étoile par des 1.
On donnera trois versions de ce programme :

a) remplir les deux diagonales puis la colonne du milieu, puis la ligne du milieu

b) remplir ligne par ligne ;

c) remplir le contour extérieur, c'est-à-dire premières et dernières lignes et colonnes, puis deuxièmes et avant dernières lignes et colonnes, etc ;

soit $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & X & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & 1 & & 1 \end{bmatrix}$, etc.

Le X dans la case du milieu signifie qu'on pourra ne pas se préoccuper de la valeur de cette case jusqu'au dernier contour réduit à cette case.

On évitera à chaque fois autant que possible les boucles `for` *explicites en utilisant des instructions vectorielles* SCILAB.

2. La fonction SCILAB `rand(x)` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, si `x` est un nombre quelconque. Que fait-elle si `x` est un vecteur ?

3. Modifier les programmes de l'exercice 1 pour remplir les matrices en étoile par des nombres aléatoires.

4. Le produit de deux matrices en étoile est-il une matrice en étoile ?

5. On considère un algorithme de multiplication de deux matrices en étoile qui tient compte de l'existence de 0 (pas de multiplication par 0 ou d'addition de 0).

a) Programmer cet algorithme en SCILAB.

b) Calculer la complexité de cet algorithme.

II

*Les calculs dans cette question seront effectués comme ils le seraient avec une machine fictive travaillant avec **2** chiffres significatifs en base 10.*

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ par la méthode de la puissance itérée et l'algorithme de déflation.

On prendra comme premier vecteur v = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

III

*Les calculs dans cette question seront effectués comme ils le seraient avec une machine fictive travaillant avec **4** chiffres significatifs en base 10.*

Calcul de l'intégrale définie $d = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

Soit $y(x)$ la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ telle que $y(0)=0$; d est égale à $y(1)$.

Calculer d,

1. avec la méthode d'Euler, en prenant un maillage de 4 points.

2. avec la méthode de Runger-Kutta à un point intermédiaire et α=1, en prenant un maillage tel que le nombre de calculs de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ soit le même que dans la question 1.

3. avec la méthode de Runger-Kutta à un trois points intermédiaires, en prenant un maillage tel que le nombre de calculs numériques de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ soit encore le même..