Université René Descartes Paris 5 — Licence de mathématiques
UFR de mathématiques et informatique — Licence MASS

Méthodes numériques

Partiel du 5 avril 2002

Durée 3h
Documents autorisés
Calculettes personnelles interdites - Des calculettes sont prêtées.
Les étudiants pourront choisir de traiter les questions a ou les questions b.

I

Calculer l'inverse de la matrice $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ par la méthode de Gauss-Jordan avec pivot maximal. On appliquera l'algorithme vu en cours utilisant en mémoire une seule matrice 3×3.

II

SCILAB exécute les instructions suivantes. Donner l'affichage obtenu à l'écran.
(Attention, certaines instructions sont incorrectes et donnent des messages d'erreur, dont la syntaxe exacte n'est pas demandée.)

```
a=1:10
u=a;
u(3)=u(8); u(8)=u(3); u
u([2,5])=u([5,2])
u=a;
u=u([6:10,1:5])
u=u([6:10,1:5])
u=a;
for i=1:5, u(i)=u(6-i); end, u
u(6:10)=u(10:-1:6)
for i=1:5, u(i)=u(6-i); end, u
u(6:10)=u(10:-1:6)
```

```
u=a;
for i=1:3, v(i)=sum(u(1:i));end, v
for i=1:3, u(i)=sum(u(1:i));end, u
a=1:3, u=2*a
v=a^2, v=a.^2
u*v,
u*v',
u'*v
u.*v,
u.*v',
u'.*v
```

III

On rappelle l'algorithme de décomposition LU par la méthode de Gauss vu en cours.

```
function [L,U] = LU(A)
n=size(A,'c')
if ~ size(A,'r')==n  then U='matrice non carree', U=L, return, end
for k = 1:n ,   // etape k
    if A(k,k)==0 then L='pivot nul on s arrete', U=L, return, end,
    A(k,k+1:n) = A(k,k+1:n)/A(k,k), // nouvelle ligne k
    for i = k+1:n ,   // nouvelles ligne i
       A(i,k+1:n) = A(i,k+1:n) - A(i,k)*A(k,k+1:n)
    end,
end,
L=zeros(n,n), for i=1:n,L(i,1:i)=A(i,1:i), end
U=diag(ones(1,n)), for i=1:n,U(i,i+1:n)=A(i,i+1:n), end
```

1. On modifie l'algorithme de la façon suivante.
A l'étape k, on ne divise pas la ligne du pivot par a_{kk}, mais, à la place, on divise la colonne k, de k+1 à n, par a_{kk}.
On définit les matrices L et U de la même façon, excepté que c'est la diagonale de U qui reçoit la diagonale de la matrice A finale, et c'est la diagonale de L qui est composée de 1.
Appliquer ce nouvel algorithme à la matrice A de la question I

2a. Programmer les modifications en SCILAB.
2b. Montrer que les matrices L et U obtenues vérifient encore l'égalité LU=A.

3. Est-ce que le résultat obtenu contredit la propriété d'unicité de la décomposition LU ?

IV

On appelle matrice haute une matrice carrée de dimension 2n dont toutes les éléments des lignes n+1 à 2n sont nuls.
On appelle matrice gauche une matrice carrée de dimension 2n dont toutes les éléments des colonnes n+1 à 2n sont nuls.

1. On considère un algorithme de multiplication de deux matrices hautes qui tient compte de l'existence de 0 (pas de multiplication par 0 ou d'addition de 0).
1a. Programmer cet algorithme en SCILAB.
1b. Calculer la complexité de cet algorithme.

2. Mêmes questions pour la multiplication d'une matrice haute par une matrice gauche.

3. Mêmes questions pour la multiplication d'une matrice gauche par une matrice haute.

V

Calcul de la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^5}$

1a. Calculer une valeur approchée de la somme de cette série en utilisant une machine fictive qui travaille avec 5 chiffres significatifs en base 10 et arrondi. On calculera des valeurs approchées de u_n jusqu'à ce que sa valeur ne puisse plus être ajoutée à la somme.
2a. Evaluer l'erreur de calcul.
3a. Evaluer l'erreur de méthode en admettant le résultat de la question 3b.
4a. En déduire un encadrement de la somme de la série.

1b. Les calculs étant faits avec une machine qui travaille avec p chiffres significatifs, à partir de quelle valeur de n les u_n ne peuvent plus être ajoutés au calcul de la somme de cette série ? Soit n_0 cette valeur.
2b. Evaluer l'erreur de calcul en fonction de p et n_0, puis en fonction de p ou n_0.
3b. Montrer que le reste de cette série $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_n$ est majoré par $\frac{n}{4} u_n$. En déduire l'erreur de méthode.
Aide : encadrer la valeur de l'intégrale $\int_{i-1}^{i} \frac{dx}{(x-1)^5}$
4b. En déduire l'erreur totale. Montrer que le calcul de n_0 termes est optimal.