Université René Descartes Paris 5
UFR de mathématiques et informatique

Licence de mathématiques
Licence MASS

Méthodes numériques
Examen du 8 juin 2001

Durée 3h

Autorisés *: - documents distribués en cours - notes personnelles - calculettes prêtées*	***Interdits*** *: - téléphones portables - calculettes personnelles*

Les étudiants doivent impérativement rédiger la question I *sur la première page de la copie double, la question* II *à partir de la deuxième page de la copie double, prendre une nouvelle feuille intercalaire pour chacune des autres questions en écrivant le numéro de la question en haut de la feuille. Les notations du texte doivent être respectées.*

I

1. Ecrire un programme SCILAB qui trace la courbe y=sin(x)+cos(x) pour x compris entre –5 et 5 dans une fenêtre correspondant à x compris entre –6 et 6 et y compris entre –2 et 2, avec affichage des abscisses et ordonnées entières et 4 subdivisions par unité. On fera également tracer les axes Ox et Oy.
2. Ecrire un programme SCILAB qui trace, dans la fenêtre précédente, les courbes y=sin(kx)+cos(kx) pour k prenant les valeurs entières de 1 à 5.

II

Les calculs dans cette question seront effectués comme ils le seraient avec une machine fictive travaillant avec 4 chiffres significatifs en base 10.

1. On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{y}$ et la courbe intégrale y(x) qui passe par (0,2).

On définit un maillage régulier $\{x_o, x_1, x_2, \dots, x_6\}$ de l'intervalle $[x_o, x_6] = [0, 1.2]$.
1.1. Avec les notations du cours, N=6, que vaut le pas h ?
1.2. Evaluer par la méthode d'Euler la valeurs de y(1.2).
1.3. Combien d'appels à la fonction $f(x,y) = -\frac{x}{y}$ ont été effectués ?
1.4. Choisir parmi les méthodes de Runge-Kutta données dans le cours celle qui permet de calculer y(1.2) avec le même nombre d'appels à la fonction f(x,y)) et faire ce calcul.

2. au choix

2a. Ecrire un programme SCILAB qui calcule $y(x_N)$ avec la méthode de Runge-Kutta de la question 1.4, pour des valeurs initiales x_o, y_o et un maillage de N points.

2b.1. Le problème de Cauchy pour l'équation $y' = -\frac{x}{y}$ a-t-il une solution unique en tout point du plan ?
2b.2. Intégrer directement l'équation différentielle et donner l'expression de la fonction y(x).
2b.3. Retrouver la réponse à la question 2b.1.
2b.4. Calculer y(1.2) et comparer aux valeurs trouvées dans la question 1.

III

Effectuer une décomposition QR de la matrice $A = \begin{bmatrix} 23 & 0 & 1 \\ 24 & 31 & 1 \\ 36 & 12 & 1 \end{bmatrix}$ par la méthode de Householder.

Aide :

- Pour cette donnée particulière, tous les calculs intermédiaires donnent des valeurs rationnelles.
- On pourra faire les calculs en valeurs approchées avec quatre chiffres significatifs ou en valeurs exactes. Dans ce dernier cas, un seul et même dénominateur apparaît dans les valeurs intermédiaires des matrices.

IV – au choix

IVa

On considère les suites récurrentes de vecteurs $X^{(k)}$ et $Y^{(k)}$ dont les coordonnées $x_i^{(k)}$ et $y_i^{(k)}$ sont données par les formules suivantes :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

$$y_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j^{(k+1)}}{a_{ii}}$$

où les a_{ij} sont les éléments d'une matrice A et les b_i les éléments d'un vecteur B donnés, ainsi que les vecteurs initiaux $X^{(0)}$ et $Y^{(0)}$.

Ecrire un programme SCILAB qui fait ce calcul.

(On aura reconnu la suite récurrente $X^{(k)}$ de la méthode de Gauss-Seidel, mais la connaissance de la méthode n'est pas nécessaire pour cet exercice).

IVb

On appelle pseudo-inverse d'une matrice A à n lignes et m colonnes toute matrice G vérifiant

$AGA=A$, $GAG=G$, ${}^t(AG)=AG$, ${}^t(GA)=GA$

1. Montrer que si A est une matrice carrée inversible, A^{-1} est l'unique pseudo-inverse de A.

2. Montrer qu'une matrice possède au plus une pseudo-inverse.

Aide : on montrera d'abord, en utilisant les matrices AGAG' et GAG'A, que si G et G' sont deux pseudo-inverses de A alors AG=AG' et GA=G'A

3. Montrer que si A^g est la pseudo-inverse de A, alors A^gB est solution du système ${}^tAAX = {}^tAB$

4. Montrer que le minimum de $\|AX-B\|$ est atteint pour $X=A^g B$ c'est-à-dire, pour tout X, $\|AX-B\| \geq \|A(A^gB)-B\|$

Aide : on pourra écrire $X=A^gB+v$ et comparer les valeurs pour v quelconque et v=vecteur nul.