Université René Descartes - Paris5 licence de mathématiques
UFR de mathématiques et informatique licence MASS

Méthodes numériques

Examen du 14 juin 2002

Durée 3h

Autorisés : documents distribués en cours, notes personnelles, calculettes prêtées
Interdits : téléphones portables, calculettes personnelles

I

Donner les valeurs finales de u, v, w, a, b, c, d, e, f, g, h après l'exécution par Scilab des instructions suivantes :

```
n=4
u=1:n
v=-1:-1:-n
w(1:2:2*n)=u
w(2:2:2*n)=v
a=[u, v; w; ones(1,2*n); zeros(1,2*n)]
b=a
b([1,4],[2,4,6])=b([4,1],[2,4,6])
c=u'*u
d=eye(3,3)
e=b(2,[3,5,7])
f=diag(c)
g=diag(f)
h=[b ; [c , [d ; e] , f]]
```

II

Diagonaliser la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ par la méthode de la puissance itérée et l'algorithme de déflation.
On fera les calculs avec une machine fictive travaillant avec 3 chiffres significatifs et arrondi en base 10.
Donner la matrice de passage.

III

1. Soit A une matrice carrée dont toutes les valeurs propres sont réelles et qui a n vecteurs propres indépendants $v_1, v_2, ..., v_n$. Pour montrer quil existe une matrice W orthogonale telle que $W^{-1}AW$ soit triangulaire, et la construire, on utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Les vecteurs colonnes de W sont les vecteurs w_i obtenus itérativement de la façon suivante :

w_1 est collinéaire à v_1; pour $i = 2$ à n, w_i est une combinaison linéaire, que l'on précisera, du vecteur propre v_i et des vecteurs $w_1, w_2, ..., w_{i-1}$

2a. Montrer que $W^{-1}AW$ est bien triangulaire et que les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de A.

3. Ecrire l'algorithme de calcul des w_i en fonction des v_i.

4b. Ecrire un programme SCILAB qui, à partir de la matrice V des vecteurs propres, construit la matrice W des vecteurs w_i. On essaiera d'écrire le moins possible de boucles "for".

5. Application à la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
(Les étudiants n'ayant pas fait la question II pourront utiliser les méthodes usuelles en mathématiques de calcul de vecteurs propres.)

IV

Résoudre le système linéaire $AX = B$ avec $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ par la méthode de Gauss-Seidel en utilisant une machine fictive travaillant avec 3 chiffres significatifs en base 10 avec arrondi.

V

On définit une méthode itérative de résolution de système linéaire $AX = B$ en décomposant A de la façon suivante : $A = G - H$ avec $G = I/\alpha$ où I est la matrice identité et α un réel quelconque non nul et en définissant la suite récurrente $X^{(k+1)} = MX^{(k)} + N$ avec $M = G^{-1}H$ et $N = G^{-1}B$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de cette suite.
Montrer que, si elle existe, sa limite est solution du système.
Exprimer la relation de récurrence en fonction de α, A et B, puis en fonction de α et du résidu $r^{(k)} = AX^{(k)} - B$

2b. Résoudre le système de la question IV en choisissant $\alpha = \frac{1}{3}$ et en utilisant une machine fictive travaillant avec 2 chiffres significatifs en base 10 avec arrondi

3a. Soient λ_1, λ_2, ..., λ_n les valeurs propres de A, avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$.
Exprimer les valeurs propres de M en fonction des λ_i.
Encadrer les valeurs de α pour lesquelles la suite converge, en fonction des λ_i puis en fonction de λ_n seul, après avoir démontré que toutes les valeurs propres de A doivent nécessairement être de même signe.
Montrer que le rayon spectral de M est égal à $max(\mid 1 - \alpha\lambda_1 \mid, \mid 1 - \alpha\lambda_n \mid)$.
Déterminer la valeur de α pour laquelle le rayon spectral est minimal.
Pour quelle valeur de α la convergence est-elle la plus rapide ?