

# Automatisation du raisonnement Mathématiques et Démonstration automatique de théorèmes

*Dominique Pastre*

Université René Descartes - Paris 5  
UFR de mathématiques et informatique  
Crip5  
Cours DEA MIASH - 2002

Chapitre 3 : Raisonnement automatique en géométrie

## Raisonnement automatique en géométrie

*Dominique Pastre - DEA MISAH - Université René Descartes (Paris 5) - 2002*

Des *démonstrateurs automatiques de théorèmes en géométrie* ont été réalisés en géométrie dès les débuts de l'intelligence artificielle. On verra en section 1 quelques aspects du premier d'entre eux qui présente deux originalités : avoir trouvé une démonstration meilleure que la démonstration classiquement enseignée d'un théorème classique et utiliser, provisoirement pour faire des choix, un raisonnement non rigoureux.

Un autre type de problème à résoudre en géométrie est la *construction de figures avec règle et compas*. Le programme décrit en section 2 simule automatiquement de telles constructions.

L'enseignement de la géométrie a motivé de nombreux auteurs pour réaliser des démonstrateurs utilisables dans un contexte pédagogique, ainsi que des tutoriels et des logiciels de visualisation et déformation de figures. Certains d'entre eux seront mentionnés en section 3.

Quant à l'axiomatisation, on s'y intéresse depuis ... Euclide. Les axiomatiques du début du 20<sup>ème</sup> siècle données en section 4 intéresseront plutôt les logiciens, ainsi que les démonstrations, par le principe de résolution, de théorèmes qui sembleront bien triviaux.

À côté de raisonnement purement géométrique, la géométrie analytique consiste à travailler, non plus sur des figures mais sur les coordonnées des points et les équations des courbes et à résoudre des systèmes d'équations et inéquations. On verra en section 5 un logiciel très efficace utilisant ces techniques

### 1 Un premier programme

Un des premiers programmes d'intelligence artificielle, en 1959, est un programme de géométrie élémentaire [Gelertner 1963a, 1963b, Gilmore 1970].

Le raisonnement général est un raisonnement *en arrière*. Il part du théorème ou sous-théorème à démontrer et émet des conjectures à partir de propriétés connues : axiomes, lemmes ou théorèmes déjà démontrés.

*Exemple* de propriété connue : si dans les triangles ABC et DEF, on a les égalités d'angles  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  et  $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$  et l'égalité de segments  $AB = DE$ , alors les triangles ABC et DEF sont égaux.

Le programme manipule effectivement une figure définie analytiquement, c'est-à-dire des points (couples de réels), des droites et des segments (couples de deux points), des triangles (trois points), des angles (trois points), des parallélogrammes.

Il construit une figure générale en choisissant des points quelconques, c'est-à-dire en évitant autant que possible des propriétés particulières qui ne sont pas des hypothèses. Il utilise cette figure pour faire des *choix* (de sous-but à considérer d'abord par exemple), mais aussi pour *vérifier* certaines propriétés simples (points alignés, points du même côté ou de part et d'autre d'une droite, être un segment ou un triangle non dégénéré, ...) au lieu de les démontrer à partir des axiomes. Une preuve formelle est faite plus tard, si le raisonnement a abouti à un résultat utile. De plus des conjectures non vérifiées sur la figure sont abandonnées.

Il détecte et utilise des symétries syntaxiques, par exemple des permutations circulaires des trois sommets d'un triangle ou côtés égaux d'un triangle isocèle, permettant de déduire un ou plusieurs résultat(s) à partir d'un autre.

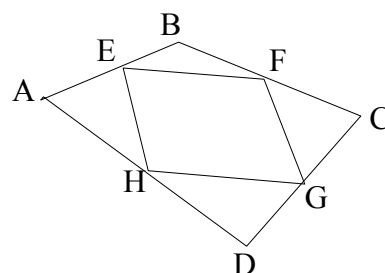
Il peut créer des objets non spécifiés dans l'énoncé, par exemple en créant un segment joignant deux points ou en prolongeant deux droites non parallèles jusqu'à leur intersection.

Les solutions sont analytiques. On obtient des systèmes d'équations qui ne sont pas toutes linéaires et nécessitent du calcul formel

Exemples de théorèmes démontrés :

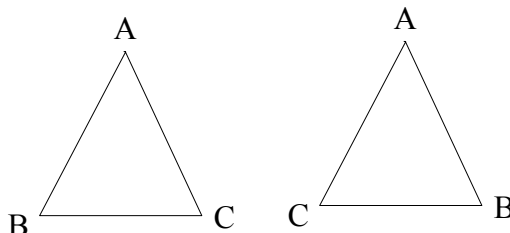
- si ABCD est un parallélogramme (c'est-à-dire AB parallèle à CD et BC parallèle à AD), alors  $AB = CD$ .

- si dans le quadrilatère ABCD, E, F, G et H sont les milieux respectivement de AB, BC, CD et DA, alors EFGH est un parallélogramme



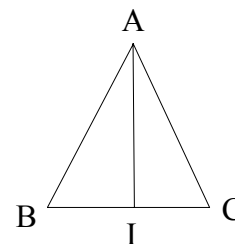
- si  $AB = AC$  alors  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Le programme considère les triangles ABC et ACB, ils ont deux couples de côtés égaux encadrant deux angles égaux ( $AB=AC$ ,  $AC=AB$  et  $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$ ), ils sont donc égaux et les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$  aussi.



L'historique de cette démonstration est intéressant. En effet, dans la démonstration classique et enseignée, on trace la médiane AI du triangle ABC, les deux triangles AIB et AIC sont égaux car il ont leurs trois côtés égaux, donc leurs angles  $\widehat{ABI}$  et  $\widehat{ACI}$  sont égaux.

La démonstration du programme est plus simple et plus élégante donc meilleure ! On peut voir deux raisons pour expliquer cela. D'abord l'être humain est trop savant, dès qu'on lui parle de côtés égaux il pense *isocèle* et voit tout de suite la *hauteur-médiane-médiatrice*. D'autre part il ne pense pas à considérer le triangle ACB car, contrairement au programme, il le *voit* identique au triangle ABC.



Il serait illusoire d'y voir une supériorité de la machine sur l'être humain, mais cela montre que la machine peut être une aide pour l'être humain. Et il semble que la démonstration la plus simple soit maintenant enseignée (?).

## 2 Constructions géométriques avec la règle et le compas

GEOM3 [Buthion 1975, 1979] et PROGÉ [Schreck 1993, 1994] résolvent automatiquement des problèmes de constructions géométriques avec la règle et le compas. Le premier est un programme écrit en Fortran et utilise une syntaxe assez lourde comme c'était le cas à l'époque. Le second, plus moderne, est un système à base de connaissances qui s'appuie en partie sur les idées du premier et incorpore d'autres fonctionnalités ainsi qu'un langage et une interface plus modernes (énoncés et solutions graphiques).

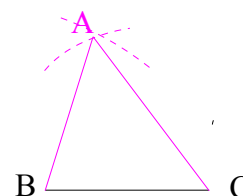
Les descriptions qui suivent correspondent à GEOM3, sauf mention contraire.

On ne mentionnera que les fonctionnalités qui font l'originalité de ce programme et non les méthodes devenues classiques en intelligence artificielle comme par exemple les techniques de recherche arborescente ou l'unification (bien que celle-ci ait du être adaptée au domaine particulier de la description de figures géométriques).

*Exemples de problèmes résolus par GEOM3*

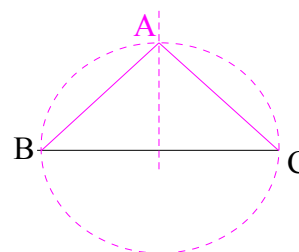
1 - Construire un triangle ABC connaissant les points B et C, et les longueurs AB et AC

*Solution:* le point A est à l'intersection des cercles de centres B et C et de rayons longueur de AB et longueur de AC.



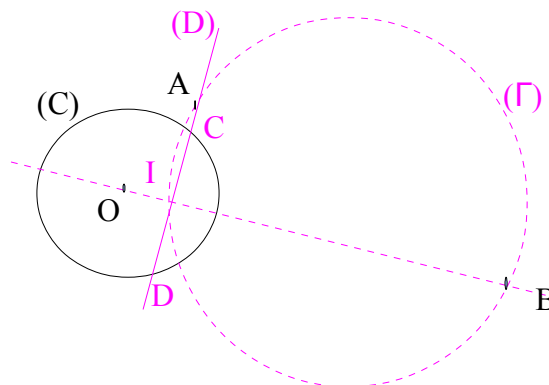
2 - Construire un triangle ABC rectangle et isocèle en A connaissant B et C

*Solution:* le point A est à l'intersection du cercle de diamètre BC et de la médiatrice de BC.



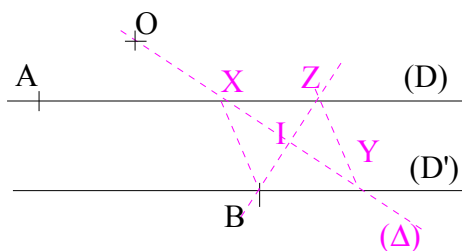
3 - On donne un cercle (C) et deux points A et B hors du cercle. Construire une droite (D) contenant A et dont les intersections C et D avec le cercle soient équidistants de B.

*Solution:* soit I l'intersection de la droite OB et du cercle (Γ) de diamètre AB. Les points C et D cherchés sont à l'intersection de (Γ) et AI.

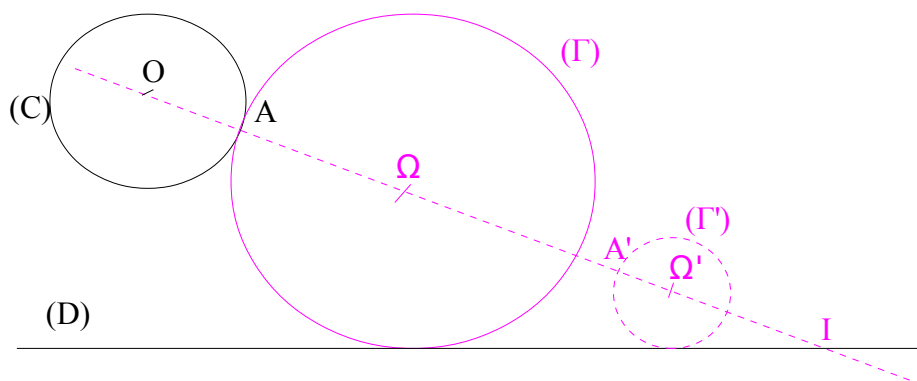


4 - On donne deux droites parallèles (D) et (D') et trois points A sur (D), B sur (D') et O en dehors d'elles. Construire une droite ( $\Delta$ ) contenant O et coupant (D) et (D') en X et Y de manière que  $AX + BY$  ait une longueur donnée.

*Solution:* soit Z sur (D) tel que AZ soit égal à la longueur donnée et I le milieu de BZ. La droite OI coupe (D) et (D') en X et Y (car XZYB est un parallélogramme).



5 - On donne une droite (D), un cercle (C) et un point A de (C). Construire un cercle ( $\Gamma$ ) tangent à (C) en A et à (D).



*Solution:* Soit I l'intersection de la droite OA et de (D). et OA, ( $\Gamma'$ ) un cercle centré sur OA et tangent à (D), et A' une des deux intersections de OA et ( $\Gamma'$ ). Le cercle ( $\Gamma$ ) homothétique de ( $\Gamma'$ ) dans l'homothétie de centre I qui transforme A' en A est solution du problème.

### Méthodes employées dans ces exemples

- méthode des lieux géométriques (exemples 1 à 3)
- raisonnement sur la longueur des segments (exemple 4)
- transformation (homothétie dans l'exemple 5)

### Intérêt de la figure

- guider le recherche
- consigner d'une façon très compacte une grande quantité d'informations

### Représentation de la figure

Le programme nomme et construit les éléments de la figure.

Pour chaque objet, on donne

- sa nature (point, cercle, longueur, ...)
- son degré de liberté
  - 0 pour un objet donné ou construit
  - 1 pour un point dont on connaît déjà un lieu ou pour une droite dont on sait qu'elle passe par un point de degré de liberté nul ou si sa direction est de degré de liberté nul
  - 2 dans les autres cas
- ses représentants

On a de plus la liste des objets dont la construction est demandée.

Pour l'exemple 3, on a au début la *figure* suivante:

nom	nature	degré de liberté
A	point	0 (donné)
B	point	0 (donné)
O	point	0 (donné)
R	longueur	0 (donné)
(D)	droite	2
C	point	2
D	point	2

au cours de la construction, on aura la *figure* suivante:

nom	nature	degré de liberté	représentants
A	point	0 (donné)	
B	point	0 (donné)	
O	point	0 (donné)	
R	longueur	0 (donné)	OC, OD
(D)	droite	1 (passe pas A)	A C I D
C	point	1 (sur $(\Gamma)$ )	
D	point	1 (sur $(\Gamma)$ )	
(C)	cercle	0 (donné)	(O,R)
l	longueur	2	BC, BD
l'	longueur	2	DB
a	longueur	0	OC
a'	longueur	0	OD
(D')	droite	0	B, O
(D'')	droite	1	O, I
I	point	1	milieu de CD
( $\Gamma$ )	cercle	0	cercle de diamètre AB

étape à laquelle  
on ne sait pas encore  
que  $l=l'$ ,  
 $a=a'$   
et  
 $(D')=(D'')$

Le problème sera résolu quand les éléments cherchés C et D auront un degré de liberté égal à 0. GEOM3 s'arrête alors.

PROGÉ considère aussi les solutions multiples. De plus, PROGÉ traite aussi les cas dégénérés et les différents cas de figure avec des règles disjonctives.

### Règles

Les connaissances sont exprimées dans GEOM3 sous forme de règles passives ou actives (dans PROGÉ on parlera de niveau bas ou haut)

- les règles passives traduisent des propriétés à appliquer systématiquement, par exemple
  - si XYZ est isocèle de base XY alors  $ZX = ZY$
  - si Z milieu de XY alors  $Z \in$  droite XY
  - si  $X \in$  cercle(O, R) alors  $OX = R$
  - si le triangle XYZ est rectangle en X alors droite XY  $\perp$  droite XZ
  - si XYZT est un parallélogramme alors  $XY = ZT, XT = YZ$
  - direction(droite XY)=direction(droite ZT)
  - milieu XZ = milieu YT

- les règles actives traduisent des propriétés conduisant à des constructions, par exemple
  - si  $ZX = L$  alors  $Z \in \text{cercle}(X, L)$
  - si le triangle  $XYZ$  est rectangle en  $X$  alors  $X \in \text{cercle de diamètre } YZ$
  - si  $ZX = ZY$  alors  $Z \in \text{médiatrice de } XY$
  - si  $ZY^2 \pm ZX^2 = a$  alors  $Z \in \text{cercle lieu des points } M \text{ tels que } MX^2 \pm MY^2 = a$
  - si  $ZY/ZX = a$  alors  $Z \in \text{cercle lieu des points } M \text{ tels que } MX/MY = a$  (cercle d'Apollonius)

### Introduction d'éléments nouveaux

ces introductions peuvent être

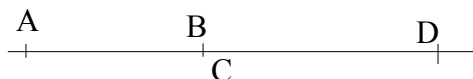
- systématiques, souvent indispensables, jamais pénalisantes, par exemple centres de cercles ou points de contact, ils seront toujours nommés, même si l'énoncé ne le fait pas ;
- *naturelles*, souvent utiles, rarement pénalisantes, par exemple des cercles, des médiatrices (voir exemples plus haut) ou le milieu de la base d'un triangle isocèle ainsi que son axe de symétrie, médiane-hauteur-médiatrice ;
- *artificielles*, à ne faire apparaître qu'à bon escient, par exemple si une somme ou une différence de longueurs de segments est connue, la faire apparaître.

### Heuristique « somme de segments »

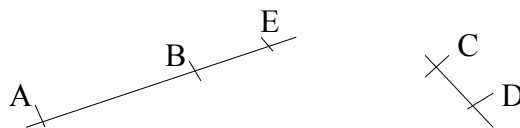
Cette heuristique est utilisée pour créer des points faisant apparaître une somme  $a + b$  de segments (exemple 4).

GEOM3 cherche un élément dont un représentant soit de la forme  $a + b$  avec  $a = AB^1$  et  $b = BC$

- si  $B = C$  et  $A, B, D$  sont alignés, la somme est matérialisée par  $AD$



- sinon on reporte une longueur dans le prolongement de l'autre
  - si un seul des quatre points est donné ou construit, par exemple  $A$ , on le prend comme origine de la somme, on porte  $E$  sur la droite  $AB$ , du côté de  $B$ , avec  $BE=CD$  et la somme est matérialisée par  $AE$



- si plusieurs points ont leur degré de liberté nul, on choisit si possible pour origine l'extrémité d'un segment de support donné ou déjà construit.

Il y a une heuristique analogue pour la différence de segments.

Ces heuristiques sont appliquées en fin de recherche, quand le problème n'a pas été résolu.

<sup>1</sup>  $AB$  désigne ici la longueur de  $AB$

## Transformations géométriques

Il y a plusieurs façons d'utiliser des transformations géométriques, rotation, homothétie ou inversion.

1. Une transformation  $\mathcal{T}$ , complètement définie, peut apparaître, qui permet de distinguer trois parties dans la figure. Deux d'entre elles sont en correspondance biunivoque par  $\mathcal{T}$ , la troisième est constituée du reste. L'application de  $\mathcal{T}$  à celle-ci fournit alors la construction demandée.
2. La figure suggère seulement le type de la transformation  $\mathcal{T}$  et un sous-ensemble des éléments qui la définissent.  $\mathcal{T}$ , appliquée à toute la figure, substitue au problème initial un problème dual plus facile ou déjà connu. On résout le nouveau problème et on revient à la figure initiale par la transformation  $\mathcal{T}^{-1}$ .

Buthion analyse ces deux types d'applications et donne des exemples utilisant une rotation, une inversion et une homothétie. Seul le deuxième type, pour une homothétie, a été programmé.

Voici un exemple résolu par GEOM3.

Dans un triangle ABC, inscrire un triangle XYZ connaissant la direction de YZ, l'angle  $\widehat{YXZ}$  et le rapport des côtés XY et XZ.

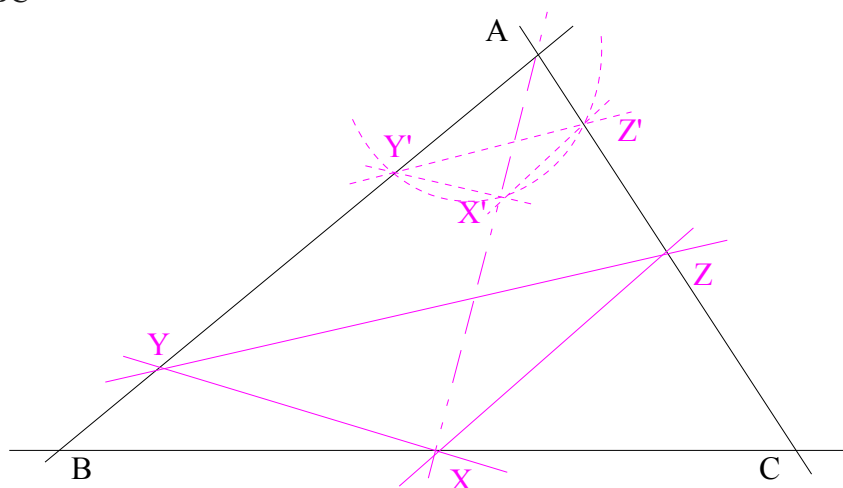
La liste des contraintes peut s'écrire

- (1)  $X \in BC$
- (2)  $Y \in AB$
- (3)  $Z \in AC$
- (4) YZ a une direction donnée
- (5)  $\widehat{YXZ}$  est donné
- (6)  $XY / XZ$  est donné

Si on fait subir au triangle XYZ une homothétie  $\mathcal{T}$  de centre A et de rapport quelconque, le triangle obtenu  $X'Y'Z'$  vérifiera toutes les contraintes sauf une

- (2')  $Y' \in AB$
- (3')  $Z' \in AC$
- (4')  $Y'Z'$  a même direction que YZ
- (5')  $\widehat{Y'X'Z'}$  est donné
- (6')  $X'Y' / X'Z' = XY / XZ$  est donné

mais (1')  $X' \notin BC$





On fixe arbitrairement  $Y'$  sur  $AB$  et on construit  $X'$  et  $Z'$  en fonction des contraintes (2') à (6') : la droite  $Y'Z'$  est définie par sa direction et le point  $Y'$ ,  $Z'$  est à l'intersection des deux droites  $Y'Z'$  et  $AC$ ,  $X'$  est à l'intersection de deux cercles par les relations (5') et (6'). Quel que soit l'homothétie  $\mathcal{T}$  de centre  $O$ , l'image  $X'Y'Z'$  par  $\mathcal{T}$  du triangle  $XYZ$  vérifiera les relations (2) à (6). On choisit alors l'homothétie  $\mathcal{T}$  qui transforme  $X$  en  $X'$ , de rapport  $AX' / AX$ .

L'application de l'homothétie  $\mathcal{T}^{-1}$  aux points  $X'$ ,  $Y'$  et  $Z'$  achève la construction du triangle  $XYZ$ .

#### Choix du centre d'homothétie (heuristique)

GEOM3 cherche les droites de degré de liberté nul qui contiennent un point demandé pour la construction ( $AB$ ,  $BC$  et  $CA$  dans l'exemple) et leurs point d'intersection ( $A$ ,  $B$  et  $C$ ).  $A$  est choisi car  $B$  et  $C$  ont un rôle symétrique. (En pratique on compte le nombre d'occurrences des points, qui est le même pour  $B$  et  $C$  et est différent pour  $A$ ).

#### Transposition de la figure (algorithmique)

La figure  $F$  est en cours de construction. Son image  $F'$  par  $T$  n'est pas encore connue puisque le rapport d'homothétie n'est pas fixé, mais il y a des invariants et des représentants conservés par homothétie.

On a alors la *figure* suivante, où les éléments invariants sont soulignés.

F				F'			
nom	nature	degré de liberté	représentants	nom	nature	degré de liberté	représentants
<u>A</u>	point	0					
B	point	0		B'	point	1	
C	point	0		C'	point	1	
X	point	1		X'	point	2	
Y	point	1		Y'	point	1	
Z	point	1		Z'	point	1	
(D1)	droite	0	B, C, X	(D'1)	droite	2	B', C', X'
<u>(D2)</u>	droite	0	B,A,Y,B',Y'				
<u>(D3)</u>	droite	0	A,C,Z,C',Z'				
(Δ1)	droite	1	Y, Z ; $\vec{u}$	(Δ'1)	droite	1	Y', Z' ; $\vec{u}$
(Δ2)	droite	2	Z, X	(Δ'2)	droite	2	Z', X'
(Δ3)	droite	2	X, Y	(Δ'3)	droite	2	X', Y'
$\vec{u}$	direction	0	dir(Δ1);dir(Δ'1)				
$\alpha$	angle	0	angle(Δ2,Δ3); angle(Δ'2,Δ'3)				
y	longueur	2	XZ	y'	longueur	2	X'Z'
z	longueur	2	XY	z'	longueur	2	X'Y'
$\rho$	sans	0	y/z ; y'/z'				

#### Suppression arbitraire d'un degré de liberté dans la figure $F'$ et résolution du problème dual

Puis GEOM3 fixe arbitrairement un point de  $F'$ , ce sera un des points contenus dans une droite donnée passant par le centre d'homothétie, soit  $Y'$ , puis continue la construction de  $F'$ , met à jour les degrés de liberté de  $(\Delta'1)$  et  $Z'$ , puis celui de  $X'$  (propriété de l'angle donné  $\alpha$ . (Il a aussi introduit quelques objets inutiles.)

*Retour à la figure initiale*

GEOM3 crée toutes les propriétés du type  $T' \in \text{droite } AT$  où A est le centre d'homothétie et (T,T') un couple de points homologues. Pour le couple (X,X') la propriété  $X' \in \text{droite } AX$  donne le point X, ce qui donne le couple (X,X') cherché donc l'homothétie cherchée, le problème est résolu.

**3 EIAO**

L'enseignement de la géométrie a motivé de nombreux auteurs pour réaliser des démonstrateurs utilisables dans un contexte pédagogique, ou intégrés dans des Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur (EIAO). Quelques uns vont être mentionnés ci-après.

3.1 GEOMUS [Bazin 1993a, 1993b, 1994] est un résolveur de problèmes conçu dans une optique EIAO avec les connaissances de l'élève. Il utilise le démonstrateur MUSCADET [Pastre 2001] et des bases de connaissances ont été écrites pour exprimer le raisonnement géométrique et aussi les connaissances de l'élève selon les programmes de 4<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup>.

En voici succinctement quelques caractéristiques.

*Représentation des objets mathématiques*

droite : nom, direction, points

segment : nom, extrémités, direction, éventuellement mesure

triangle : nom, sommets

*Traitement de l'égalité*

Dès que deux objets sont égaux, ils sont fusionnés (un seul nom, avec toutes les propriétés) et on propage partout où ils apparaissent. La transitivité de l'égalité est ainsi intégrée dans ce traitement (*built-in*).

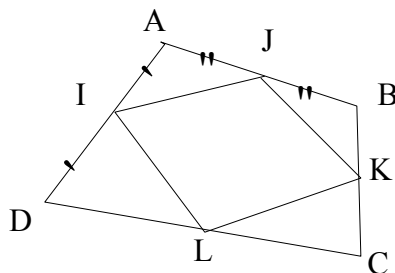
Pour exprimer que deux droites sont parallèles, on exprime que leurs directions sont égales. La transitivité du parallélisme provient donc de la transitivité (*built-in*) de l'égalité.

L'alignement de points est représenté par l'égalité des droites qui les contiennent et il n'y a alors plus qu'une seule droite.

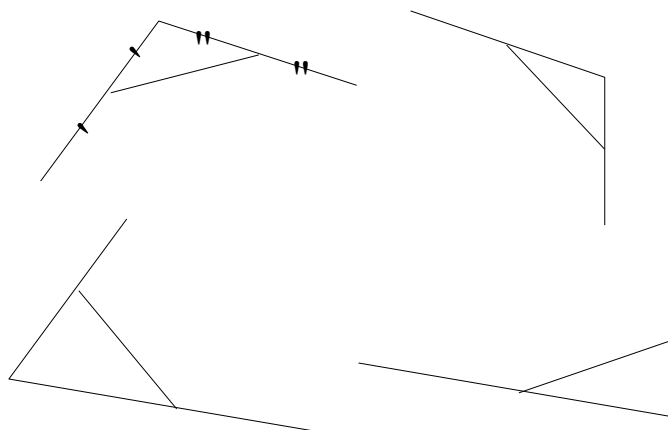
*Représentation des figures*

Celle-ci est non formelle et on peut en extraire des sous-figures caractéristiques.

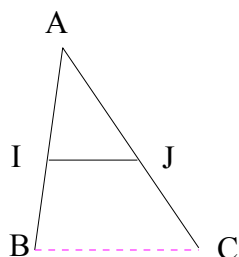
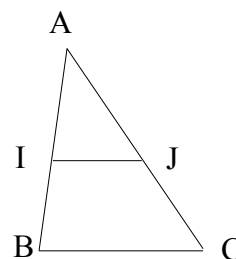
*Exemple* : du quadrilatère ABCD avec les milieux des côtés I, J, K, L



on extrait les sous-figures suivantes

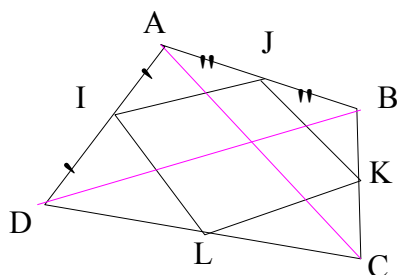


*Exemple de connaissance* : Dans un triangle ABC la droite qui joint les milieux I et J de AB et AC est parallèle à BC



*Autre forme de la connaissance* (dite « droite des milieux ») :  
si I et J sont les milieux de AB et AC alors introduire le segment BC et on a  $IJ \parallel BC$

On peut ainsi compléter les sous-figures du quadrilatère précédent ... et recoller !



### *Etiquetage*

C'est une classification selon les chapitres d'un cours d'une classe donnée auxquels sont associées des connaissances qui vont permettre de déduire des propriétés et/ou d'introduire de nouveaux objets.

### *Introduction de nouveaux objets*

Il s'agit par exemple de l'intersection de deux droites, du segment joignant deux points, du cercle de diamètre donné, qui ne doivent pas être créés systématiquement car ils seraient trop nombreux. Ces introductions sont faites selon des savoir-faire adaptés au niveau concerné.

### Propriétés visuelles

Une des retombées intéressantes de ce travail a été la mise en évidence de l'utilisation, en 4<sup>ème</sup>, de propriétés visuelles *constatées* mais jamais *démontrées*, par exemple l'ordre des points sur une droite ou le fait qu'un parallélogramme est un quadrilatère *non croisé*. Or on ne peut conclure qu'un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles et égaux est un parallélogramme que s'il n'est pas croisé. Cette propriété doit être donnée à GEOMUS explicitement avec l'énoncé. On pourrait aussi envisager une version interactive où le démonstrateur poserait la question à l'utilisateur.

Cette difficulté n'existe plus dans les classes suivantes dès que l'élève connaît les vecteurs.

3.2 ARGOS [Spagnol 2001a, 2001b, 2002] est un démonstrateur de théorème en géométrie élémentaire de niveau collège ou lycée qui de plus produit une preuve en français. Il peut être utilisé par un élève ou un enseignant. Les explications données dans cette preuve dépendent de paramètres comme le niveau scolaire ou le contrat didactique en cours. ARGOS utilise le système MUSCADET [Pastre 2001] dans le langage duquel toutes les connaissances sont exprimées, les connaissances pour résoudre les problèmes géométriques mais aussi les connaissances pour rédiger une preuve agréable à lire et adaptée au niveau de la classe considérée et aux desiderata de l'utilisateur, élève ou enseignant, par exemple une explication complète (mais néanmoins dépourvue de répétitions ou de considérations triviales) ou simplement une indication au premier niveau de la méthode de résolution.

### Représentation des objets géométriques

Tous les éléments de la figure sont nommés, que ce soient les droites, segments, triangles, parallélogrammes, mais aussi les longueurs qui peuvent n'être que des paramètres ou bien leur mesure dans le cas de valeurs numériques connues.

D'autre part, des règles d'introductions d'objets sont appliquées à la lecture de l'énoncé. Par exemple, pour un triangle  $abc$  équilatéral, ARGOS crée

- les segments correspondant aux côtés et les droites qui les portent :  
 $\text{segment}(a,b) : \text{seg1}, \text{segment}(b,c) : \text{seg2}, \text{segment}(c,a) : \text{seg3},$   
 $\text{droite}(a,b) : \text{dr1}, \text{droite}(b,c) : \text{dr2}, \text{droite}(c,a) : \text{dr3}$
- l'appartenance de  $a, b$  et  $c$  à ces droites :  
 $a \in \text{dr1}, b \in \text{dr1}, b \in \text{dr2}, c \in \text{dr2}, c \in \text{dr3}, a \in \text{dr3}$
- les longueurs des segments qui ont toutes le même nom pour exprimer qu'elles sont égales (elles n'ont pas, ou pas encore de mesures numériques) :  
 $\text{longueur}(\text{seg1}) : \text{long}, \text{longueur}(\text{seg2}) : \text{long}, \text{longueur}(\text{seg3}) : \text{long}$
- les trois angles qui ont, aussi, une même mesure et de plus cette mesure a la valeur numérique 60 :  
 $\text{angleGeom}(a,b,c, \text{angleGeom}), \text{mes}(\text{angleGeom}) : \text{mes}, \text{valeurExacte}(\text{mes}, 60),$   
 $\text{angleGeom}(b,c,a, \text{angleGeom1}), \text{mes}(\text{angleGeom1}) : \text{mes},$   
 $\text{angleGeom}(c,a,b, \text{angleGeom2}), \text{mes}(\text{angleGeom2}) : \text{mes}$

Les termes  $\text{droite}(a,b)$ ,  $\text{segment}(a,b)$ ,  $\text{triangle}(a,b,c)$  subsistent car ARGOS en aura besoin plus tard pour rédiger une preuve. Ils seront toujours nommés de la façon par laquelle ils ont été introduits (les deux premiers points pour une droite). Par contre, pour la manipulation, et en particulier la reconnaissance des objets identiques, des procédures rapides énumèrent rapidement toutes les façons possibles de reconnaître un parallélogramme (il y a huit façons de nommer un parallélogramme par permutations des sommets et d'autre part un rectangle ou un carré est un parallélogramme particulier).

3.3 UBL [Pintado] est un démonstrateur qui résout des problèmes de géométrie (et aussi de théorie des groupes et de théorie des ensembles) enrichi d'un mécanisme d'apprentissage.

Pour améliorer ses capacités le système apprend deux types de connaissances en analysant ses propres solutions :

- Il construit de nouveaux théorèmes correspondant à des situations « prototypiques », ce qui lui permettra de déduire plus rapidement des faits importants dans d'autres exercices.
- Il mémorise des méthodes de résolution adaptées à un but donné. Celles-ci consistent à proposer un ensemble de sous-buts qui se sont avérés utiles pour la résolution de l'exercice analysé

### 3.4 Tutoriels

Je citerai, parmi d'autres, deux réalisations dans le cadre du projet MENTONIEZH [Py 1990]

3.4.1 Le système TALC [Desmoulin 1994] est un système d'aide à l'enseignement de la géométrie. Son objectif est de diagnostiquer la correction de la construction d'un apprenant vis-à-vis de la spécification d'une figure donnée par un enseignant. Une sémantique précise a été donnée aux langages manipulés par le système (le langage logique à partir duquel est déterminé le diagnostic, les langages d'interface et les connaissances des élèves).

La vérification de la figure constitue la fonctionnalité principale de TALC tandis que la partie construction est une des fonctionnalités de CABRI-GÉOMÈTRE [Baulac & al 1990] qui est un logiciel de construction de figure permettant une évolution graphique de la figure dont les propriétés logiques sont conservées, ce qui permet, d'une part de détecter les invariants intéressants et d'autre part d'observer l'impact de la suppression d'une hypothèse.

3.4.2 Puis Py [Py 1996a, 1996b] s'est plus spécialement intéressée à l'apprentissage par les élèves de la démonstration.

Un premier aspect concerne la représentation des connaissances et la manipulation des objets mathématiques (les droites en particulier) et des propriétés mathématiques (égalité, parallélisme) et l'introduction d'objets non cités dans l'énoncé.

Les segments, triangles, parallélogrammes, etc, ont une *forme canonique* (basée sur l'ordre alphabétique). Ainsi le triangle BAC est immédiatement réécrit ABC. Pour les droites, la propriété d'*alignement* a d'abord été privilégiée par rapport à la notion de droite. Il a ensuite été nécessaire de manipuler explicitement les droites, par exemple pour pouvoir exprimer le parallélisme. Celles-ci ont donc également une forme canonique.

Non seulement un tuteur doit être capable de produire lui-même une démonstration, mais le tuteur MentoniezH produit, dans une certaine limite, toutes les démonstrations, plausibles et raisonnables, susceptibles d'être produites par les élèves. Cela permet l'évaluation du travail de l'élève. Enfin un travail d'explication par le système de son raisonnement a été fait.

Un autre aspect du travail concerne l'interaction avec l'élève et une aide éventuelle.

## 4 Axiomatiques [Balbiani & al 1994, Hilbert 1971, Tarski 1959]

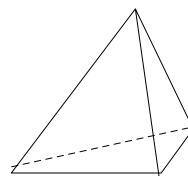
### 4.1 Axiomatique de Hilbert

Les « postulats » de Hilbert formalisent l'approche d'Euclide. Les "êtres" sont les points, les droites et les plans.

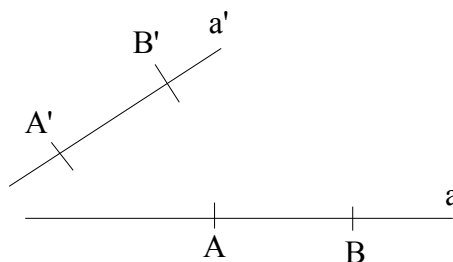
Les relations primitives sont l'appartenance d'un point à une droite, ou d'un point à un plan, l'ordre des points sur une droite (prédicat "entre") puis après qu'ils aient été définis la congruence des segments et des angles.

- Axiomes d'incidence
  - Par deux points distincts, il passe exactement une droite.
  - Chaque droite passe par au moins deux points. Il existe trois points non alignés.
  - Par trois points non alignés, il passe exactement un plan.
  - Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, tous les points de la droite appartiennent à ce plan.
  - Si deux plans ont un point commun, ils en ont encore au moins un autre.
  - Il existe quatre points non coplanaires

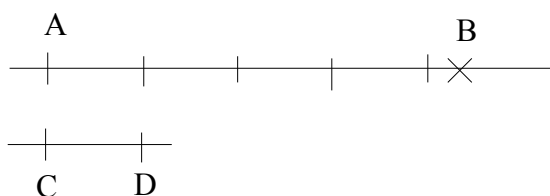
Le plus petit modèle fini de ces axiomes est un tétraèdre.



- Axiomes d'ordre
  - Si un point B « est entre » un point A et un point C, les points A, B et C appartiennent à une même droite et B « est entre » C et A.
  - Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC et tel que C soit entre A et B
  - De trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres
  - On peut alors définir la notion de segment (ensemble des points situés entre deux points).
  - Soient A, B et C trois points non alignés et a une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B et C ; si la droite a passe par l'un des points du segment [AB], elle passe par un point du segment [BC] ou par un point du segment AC.
  - On peut définir les notions de demi-droite et de demi-plan
- Axiomes de congruence
  - Soient A et B deux points d'une droite a, A' un point d'une autre droite a' distincte de a, alors sur a', d'un côté donné de A', on peut trouver B' tel que les segments [AB] et [A'B'] soient égaux.



- Si un segment  $[A'B']$  et un segment  $[A''B'']$  sont congruents à un même segment  $[AB]$ , alors le segment  $[A'B']$  est congruent au segment  $[A''B'']$ .
- Soit une droite  $a$  contenant les segments adjacents  $[AB]$  et  $[BC]$ , et soit une droite  $a'$  contenant les segments adjacents  $[A'B']$  et  $[B'C']$ . Si  $[AB]$  est congru à  $[A'B']$  et  $[BC]$  est congru à  $[B'C']$  alors  $[AC]$  est congru à  $[A'C']$ .  
→ On peut alors définir la notion d'angle (portion de plan limitée par deux demi-droites) et de triangle.
- Soit un angle  $ABC$  et une demi-droite  $B'C'$ , il existe demi-droite  $B'D$  telle que l'angle  $DB'C'$  est congru à l'angle  $ABC$
- Soit deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  tel que  $AB$  est congru à  $A'B'$ ,  $AC$  est congru à  $A'C'$ , et l'angle  $BAC$  est congru à l'angle  $B'A'C'$ , alors le triangle  $ABC$  est congru au triangle  $A'B'C'$ .  
→ On définit la notion d'angles supplémentaires (opposés par le sommet) et d'angle droit (égal à un de ses suppléments).
- Axiomes des parallèles
  - (Axiome d'Euclide) Soient une droite  $a$  et un point  $A$  extérieur à  $a$ , dans le plan déterminé par  $a$  et  $A$ , il existe au plus une droite qui passe par  $A$  et qui ne coupe pas  $a$ .
  - (variante, équivalente) Si deux droites font avec une sécante des angles internes, d'un même côté de la sécante, dont la somme est inférieure à deux droits, alors les deux droites se coupent du même côté de la sécante.
- Axiomes de continuité
  - (Axiome d'Archimède) : Soient deux segments  $[AB]$  et  $[CD]$ , il existe un entier  $n$  tel que le report du segment  $[CD]$  répété  $n$  fois à partir de  $A$  sur la demi-droite déterminée par  $B$  conduit à un point au delà de  $B$ .



- (Axiome de complétude ou d'intégrité linéaire) L'ensemble des points d'une droite soumis aux relations d'ordre et de congruence, n'est susceptible d'aucune extension dans laquelle sont valables les relations précédentes et les propriétés fondamentales d'ordre linéaire et de congruence déduites des axiomes précédents.
- (variante) Au système des points, droites et plans, il est impossible d'adjoindre d'autres êtres de manière que le système ainsi généralisé forme une nouvelle géométrie ou les axiomes précédents soient tous vérifiés ; en d'autres termes, les éléments de la géométrie forment un système d'êtres qui, si l'on conserve tous les axiomes, n'est susceptible d'aucune extension.  
→ Cet axiome permet d'introduire la continuité dans la géométrie et rend possible la correspondance bi-univoque entre les points d'une droite et l'ensemble des réels.

4.2 Axiomatique de Tarski

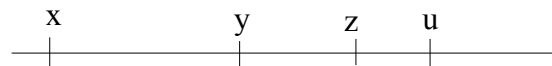
Tarski donne une axiomatisation du premier ordre de la géométrie élémentaire (la partie de la géométrie d'Euclide qui peut être formalisée sans utiliser la théorie des ensembles).

On a des ensembles finis de points et deux prédicats :

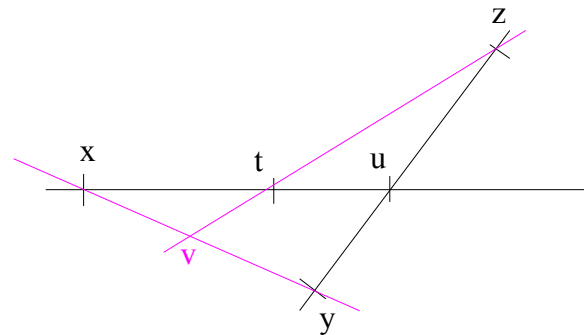
- $B(x,y,z)$  qui signifie  $y$  se trouve entre  $x$  et  $z$
- $Eq(x,y,z,t)$  qui signifie que les segments  $xy$  et  $zt$  sont congruents ( $[xy] = [zt]$ )

Elle comporte douze axiomes et un schéma d'axiomes

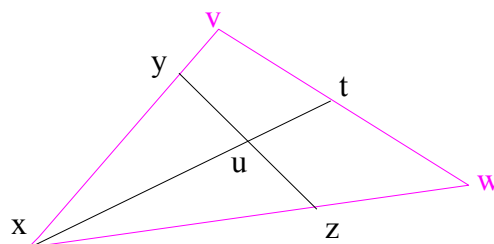
- A1 :  $\forall x y (B(x, y, x) \rightarrow x = y)$
- A2 :  $\forall x y z u (B(x y u) \wedge B(y z u) \rightarrow B(x y z))$



- A3  $\forall x y z u (B(x, y, z) \wedge B(x, y, u) \wedge x \neq y \rightarrow B(x, z, u) \vee B(x, u, z))$
- A4 :  $\forall x y Eq(x, y, y, x)$
- A5 :  $\forall x y z (Eq(x, y, z, z) \rightarrow x = y)$
- A6 :  $\forall x y z u v w [Eq(x, y, z, u) \wedge Eq(x, y, v, w) \rightarrow Eq(z, u, v, w)]$
- A7 :  $\forall x y z t u [B(x, t, u) \wedge B(y, u, z) \rightarrow \exists v (B(x, v, y) \wedge B(z, t, v))]$

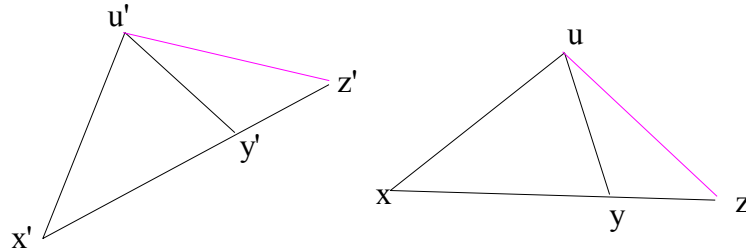


- A8 :  $\forall x y z t u [B(x, u, t) \wedge B(y, u, z) \wedge x \neq u \rightarrow \exists v w B(x, y, v) \wedge B(x, z, w) \wedge B(v, t, w)]$

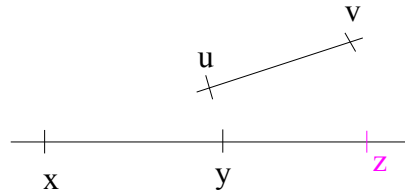




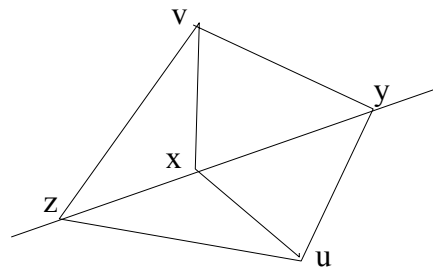
- A9 :  $\forall x x' y y' z z' u u' [Eq(x, y, x', y') \wedge Eq(y, z, y', z') \wedge Eq(x, u, x', u') \wedge Eq(y, y', u, u') \wedge B(x, y, z) \wedge B(x', y', z') \wedge x \neq y \rightarrow Eq(z, u, z', u')]$



- A10  $\forall x y u v \exists z [B(x, y, z) \wedge Eq(y, z, u, v)]$



- A11 :  $\exists x y z \{ \neg B(x, y, z) \wedge \neg B(y, z, x) \wedge \neg B(z, x, y) \}$
- A12 :  $\forall x y z u v [Eq(x, u, x, v) \wedge Eq(y, u, y, v) \wedge Eq(z, u, z, v) \wedge u \neq v \rightarrow B(x, y, z) \vee B(y, z, x) \vee B(z, x, y)]$

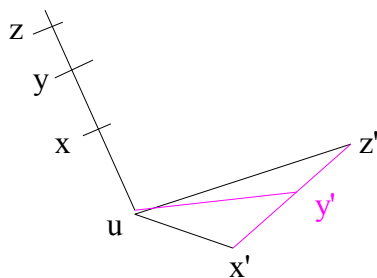


- A13 : schéma d'axiomes (c'est-à-dire une infinité d'axiomes)  
 $\forall v w \dots \{ \exists z \forall x y [\phi \wedge \psi \rightarrow B(z, x, y)] \rightarrow \exists u \forall x y [\phi \wedge \psi \rightarrow B(x, u, y)] \}$   
 où  $\phi$  a comme variables libres  $x, v, w, \dots$ , mais pas  $y, z, u$   
 et  $\psi$  a comme variables libres  $y, v, w, \dots$ , mais pas  $x, z, u$ .

Avec cette axiomatique, la géométrie élémentaire est décidable et complète. Tarski a aussi démontré que la géométrie élémentaire n'est pas finiment axiomatisable.

Si on remplace le schéma d'axiomes A13 par l'axiome suivant

- A13' :  $\forall x y z x' z' u [ \text{Eq}(u, x, u, x') \wedge \text{Eq}(u, z, u, z') \wedge \text{B}(u, x, z) \wedge \text{B}(x, y, z) \rightarrow \exists y' (\text{Eq}(u, y, u, y') \wedge \text{B}(x', y', z')) ]$



la géométrie n'est plus complète et elle est indécidable. Néanmoins le sous-ensemble des formules universellement quantifiées est décidable.

### Exemples de preuves

*Théorème à démontrer*  $\forall x \forall y \text{B}(x, y, y)$

*Négation* :  $\exists x \exists y \neg \text{B}(x, y, y)$

*clauses* :

à partir des axiomes A5 et A10, avec  $f$  fonction de Skolem

$$\text{B}(x, y, z, z) \rightarrow x = y$$

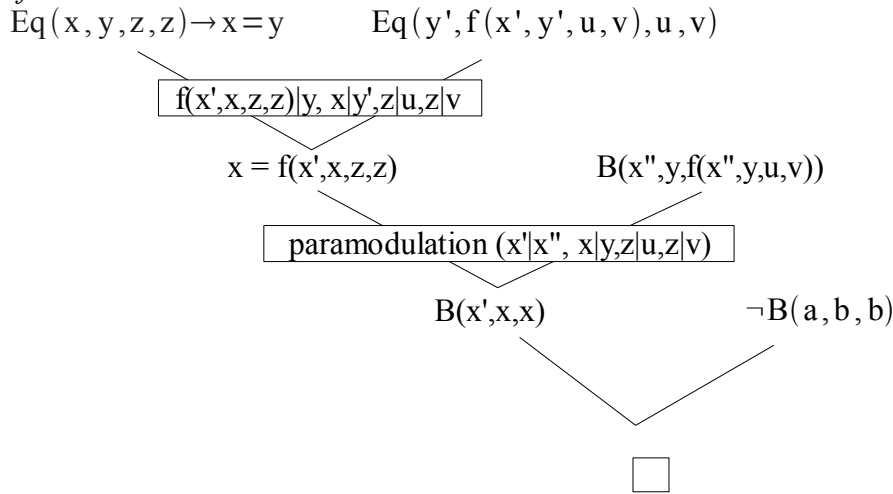
$$\text{B}(x, y, f(x, y, u, v))$$

$$\text{Eq}(y, f(x, y, u, v), u, v)$$

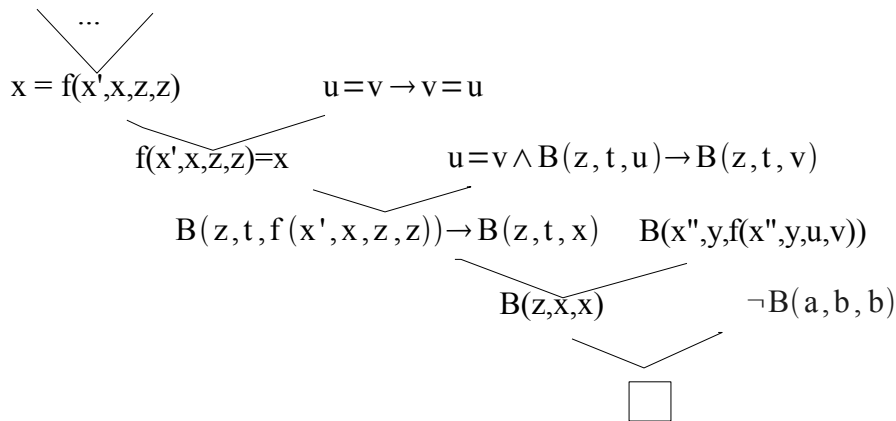
à partir de la négation du théorème à démontrer,  $a$  et  $b$  sont des constantes de Skolem

$$\neg \text{B}(a, b, b)$$

Réfutation



Réfutation n'utilisant pas la paramodulation, mais un axiome d'égalité



Deuxième exemple

*Théorème à démontrer*  $\forall x y z [B(x, y, z) \rightarrow B(z, y, x)]$

*Négation* :  $\exists x y z [\neg B(x, y, z) \wedge B(z, y, x)]$

*clauses* :

comme précédemment et à partir des axiomes A1 et A7, avec g deuxième fonction de Skolem

$$B(x, y, x) \rightarrow x = y$$

$$B(x, t, u) \wedge B(y, u, z) \rightarrow B(x, g(x, y, z, t, u), y)$$

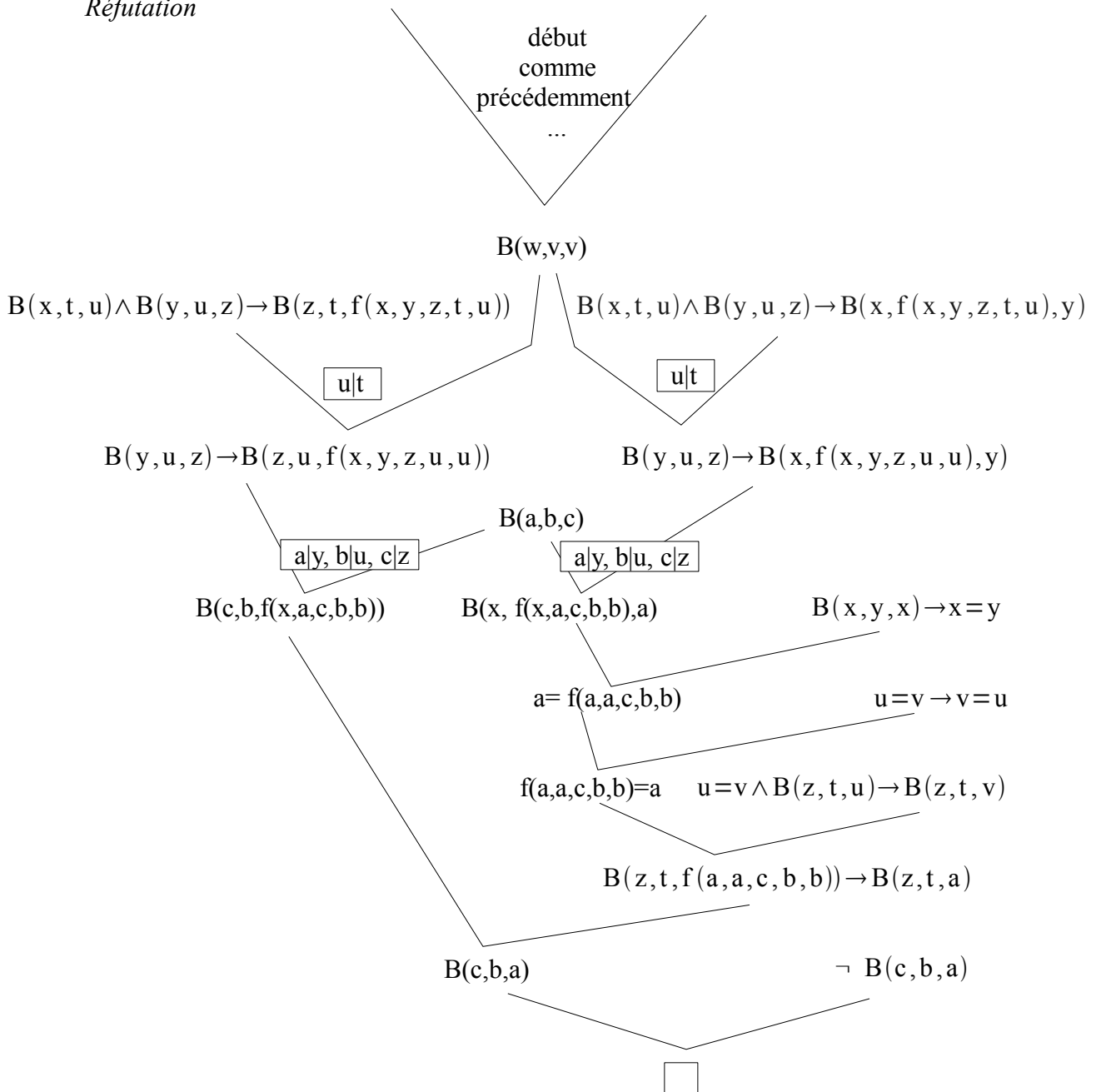
$$B(x, t, u) \wedge B(y, u, z) \rightarrow B(z, t, g(x, y, z, t, u))$$

à partir de la négation du théorème à démontrer, a et b sont des constantes de Skolem

$$B(a, b, c)$$

$$\neg B(c, b, a)$$

Réfutation



4.3 Il existe d'autres axiomatiques avec d'autres primitives, par exemple

- segments colinéaires
- 3 points sur une même droite
- droites parallèles
- triangle équilatéral
- rectangle
- ...

## 5. Géométrie algébrique ou analytique

Un point est représenté par ses coordonnées. Une figure est un ensemble de points vérifiant certaines propriétés traduites par des équations polynomiales. Diverses méthodes ont été proposées [Tarski 1951, Buchberger 1985]. On donnera ici un aperçu de la méthode de Wu [Chou 1985, 1988, Wu 1986, 1994].

Les hypothèses et la conclusion à démontrer sont sous forme d'équations polynomiales.

*hypothèses :*

$$h_1(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_t) = 0$$

$$h_2(\dots) = 0$$

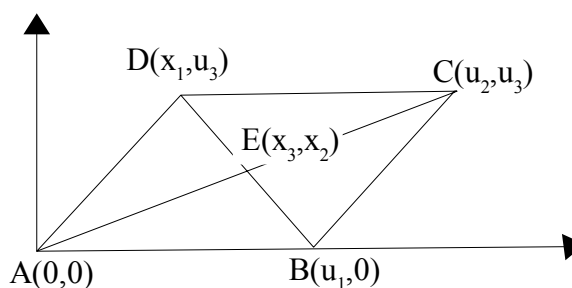
*conclusion à démontrer :*

$$g(\dots) = 0$$

les  $u_i$  sont des paramètres du problème (constantes ou variables indépendantes), les  $x_i$  sont des variables, correspondant aux points construits, qui dépendent des  $u_i$ .

*Exemple 1*

ABCD est un parallélogramme, E l'intersection de ses diagonales, montrer que  $AE = CE$ .



*hypothèses :*

$$DA \parallel CB \quad h_1 = \begin{vmatrix} x_1 & u_2 - u_1 \\ u_3 & u_3 \end{vmatrix} = u_3 x_1 - (u_2 - u_1) u_3 = 0$$

$$E, B, D \text{ colinéaires} \quad h_2 = \begin{vmatrix} x_3 - u_1 & x_1 - u_1 \\ x_2 & u_3 \end{vmatrix} = u_3 x_3 - (x_1 - u_1) x_2 - u_1 u_3 = 0$$

$$E, A, C \text{ colinéaires} \quad h_3 = \begin{vmatrix} x_3 & u_2 \\ x_2 & u_3 \end{vmatrix} = u_3 x_3 - u_2 x_2 = 0$$

*conclusion :*

$$AE = CE \quad x_3^2 + x_2^2 = (u_2 - x_3)^2 + (u_3 - x_2)^2 \quad g = 2 u_2 x_3 + 2 u_3 x_2 - u_3^2 - u_2^2 = 0$$

Il faut démontrer que la conjonction de  $h_1=0$ ,  $h_2=0$  et  $h_3=0$ , auxquels il faut rajouter des conditions de non dégénérescence (à trouver pendant la résolution), implique  $g=0$ .

Dans ce cas particulièrement simple, il suffit de résoudre le système.

On trouve en effet

$$x_1 = u_2 - u_1 \quad \text{si} \quad u_3 \neq 0 \quad (\text{sinon } C \text{ est sur la droite } AB \text{ et } x_1 \text{ est indéterminé})$$

$$\text{puis} \quad x_2 = \frac{u_3}{2} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{u_2}{2} \quad \text{si} \quad u_1 \neq 0 \quad (A \text{ et } B \text{ distincts})$$

En reportant dans  $g$  on trouve bien  $g=0$

Pour illustrer la méthode de *triangulation et divisions successives de Wu*, plus générale, voici la résolution obtenue par celle-ci.

Des *pseudo-divisions* conduisent à une forme triangulaire :

$$\begin{aligned} f_1 &= h_1 = u_3 x_1 - (u_2 - u_1) u_3 = 0 \\ f_2 &= \text{pseudo-reste}(h_3, h_2, x_3) = h_3 - h_2 = [x_1 - (u_2 + u_1)] x_2 + u_1 u_3 = 0 \\ f_3 &= h_3 = u_3 x_3 - u_2 x_2 = 0 \\ \text{puis } R_2 &= \text{pseudo-reste}(g, f_3, x_3) = u_3 g - 2 u_2 f_3 = 2 (u_3^2 + u_2^2) x_2 - (u_3^2 + u_2^2) u_3 \\ R_1 &= \text{pseudo-reste}(R_2, f_2, x_2) = [x_1 - (u_2 + u_1)] R_2 - 2 (u_3^2 + u_2^2) f_2 \\ &= - (u_3^2 + u_2^2) u_3 x_1 + (u_3^2 + u_2^2) u_3 (u_2 - u_1) \\ R_0 &= \text{pseudo-reste}(R_1, f_1, x_1) = R_1 + (u_3^2 + u_2^2) f_1 \equiv 0 \end{aligned}$$

On a alors  $[x_1 - (u_2 + u_1)] u_3 g = Q_1 f_1 + \dots + Q_r f_r + R_0$

Puisque  $R_0=0$  on peut conclure que  $g=0$  si on a  $u_3 \neq 0$  et  $x_1 - (u_2 + u_1) \neq 0$  qui sont des conditions de non-dégénérescence.

On a  $u_3 \neq 0$  si C n'appartient pas à la droite AB

$x_1 - (u_2 + u_1) \neq 0$  si AC et BD ne sont pas parallèles, ce qui ne serait possible que si  $u_1=0$  c'est-à-dire  $A=B$

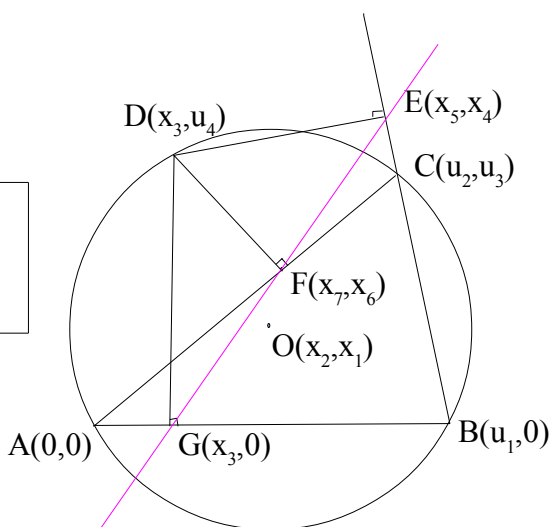
D'une manière générale, on a à la fin du calcul une expression de la forme

$$I_1^{s_1} \dots I_r^{s_r} g = Q_1 f_1 + \dots + Q_r f_r + R_0$$

Si  $R_0 \equiv 0$  et si les conditions  $I_k \neq 0$  alors on peut conclure que  $g=0$ .

Exemple 2 - Théorème de Simpson

D est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, E, F et G sont les pieds des perpendiculaires à BC, CA et AB passant par D alors E, F et G sont colinéaires.



On prend A comme origine et AB comme axe des abscisses.

hypothèses :

$$\begin{aligned} OA=OC & \quad x_1^2 + x_2^2 = (u_2 - x_2)^2 + (u_3 - x_1)^2 & \quad h_1 = 2 u_2 x_2 + 2 u_3 x_1 - u_3^2 - u_2^2 = 0 \\ OA=OB & \quad x_1^2 + x_2^2 = (u_1 - x_2)^2 + x_1^2 & \quad h_2 = 2 u_1 x_2 - u_1^2 = 0 \\ OA=OD & \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_3 - x_2)^2 + (u_4 - x_1)^2 & \quad h_3 = -x_3^2 + 2 x_2 x_3 + 2 u_4 x_1 - u_4^2 = 0 \\ E, B, C \text{ alignés} & \quad \begin{vmatrix} x_5 - u_1 & u_2 - u_1 \\ x_4 & u_3 \end{vmatrix} = 0 & \quad h_4 = u_3 x_5 + (u_1 - u_2) x_4 - u_3 u_1 = 0 \\ DE \perp BC & \quad \begin{pmatrix} x_5 - x_3 \\ x_4 - u_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 & \quad h_5 = (u_2 - u_1) x_5 + u_3 x_4 + (u_1 - u_2) x_3 - u_3 u_4 = 0 \\ F, A, C \text{ alignés} & \quad \begin{vmatrix} x_7 & u_2 \\ x_6 & u_3 \end{vmatrix} = 0 & \quad h_6 = u_3 x_7 - u_2 x_6 = 0 \end{aligned}$$

$$AC \perp DF \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_7 \\ u_4 - x_6 \end{pmatrix} = 0 \quad h_7 = u_2 x_7 + u_3 x_6 - u_2 x_3 - u_3 u_4 = 0$$

conclusion:

$$E, F, G \text{ alignés} \quad \begin{vmatrix} x_7 - x_3 & x_5 - x_3 \\ x_6 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \quad g = x_4 x_7 - (x_5 - x_3) x_6 - x_3 x_4 = 0$$

Ici le système ne se résout pas simplement car  $h_3$  est de degré 3 en  $x_3$ . La méthode de Wu résout le problème.

*Triangulation des polynômes (pseudo-divisions)*

$$f_1 = u_1 h_1 - u_2 h_2 = 2 u_1 u_3 x_1 - u_1 u_3^2 - u_1 u_2^2 + u_1^2 u_2 = 0$$

$$f_2 = h_2 = 2 u_1 x_2 - u_1^2 = 0$$

$$f_3 = h_3 = -x_3^2 + 2 x_2 x_3 + 2 u_4 x_1 - u_4^2 = 0$$

$$f_4 = (u_2 - u_1) h_4 - u_3 h_5 \\ = (-u_3^2 - u_2^2 + 2 u_1 u_2 - u_1^2) x_4 + (u_2 - u_1) u_3 x_3 + u_3^2 u_4 + u_1(-u_2 + u_1) u_3 = 0$$

$$f_5 = h_4 = u_3 x_5 + (u_1 - u_2) x_4 - u_3 u_1 = 0$$

$$f_6 = u_2 h_6 - u_3 h_7 = (-u_2^2 - u_3^2) x_6 + u_2 u_3 x_3 + u_3^2 u_4 = 0$$

$$f_7 = h_7 = u_2 x_7 + u_3 x_6 - u_2 x_3 - u_3 u_4 = 0$$

*Restes successifs des pseudo-divisions de g par  $f_7, f_6, \dots$  par rapport à  $x_7, x_6, \dots$*

$$R_6 = \text{pseudo-reste}(g, f_7, x_7) = u_2 g - x_4 f_7 = (-u_2 x_5 - u_3 x_4 + u_2 x_3) x_6 + u_3 u_4 x_4$$

$$R_5 = \text{pseudo-reste}(R_6, f_6, x_6) = (-u_2^2 - u_3^2) R_6 - (-u_2 x_5 - u_3 x_4 + u_2 x_3) f_6 = \\ (u_2^2 u_3 x_3 + u_2 u_3^2 u_4) x_5 + (u_2 u_3^2 x_3 - u_2^2 x_3 - u_2^2 u_3 u_4) x_4 - u_2^2 u_3 x_3^2 - u_2 u_3^2 u_4 x_3$$

$$R_4 = \text{pseudo-reste}(R_5, f_5, x_5) = \\ ((u_2 u_3^3 + (u_2^2 - u_1 u_2^2) u_3) x_3 - u_1 u_2 u_3^3 u_4) x_4 - u_2^2 u_3^2 x_3^2 + (-u_2 u_3^3 u_4 + u_1 u_2^2 u_3^2) x_3 + u_1 u_2 u_3^3 u_4$$

$$R_3 = \text{pseudo-reste}(R_4, f_4, x_4) \\ = u_1 u_2 u_3^4 x_3^2 - u_1^2 u_2 u_3^4 x_3 + u_1 u_2 u_3^4 u_4^2 + (-u_1 u_2 u_3^5 + (-u_1 u_2^3 + u_1^2 u_2^2) u_3^3) u_4$$

$$R_2 = \text{pseudo-reste}(R_3, f_3, x_3) = \\ -2 u_1 u_2 u_3^4 x_3 x_2 + u_1^2 u_2 u_3^4 x_3 - 2 u_1 u_2 u_3^4 u_4 x_1 + (u_1 u_2 u_3^5 + (u_1 u_2^3 - u_1^2 u_2^2) u_3^3) u_4$$

$$R_1 = \text{pseudo-reste}(R_2, f_2, x_2) \\ = -2 u_1^2 u_2 u_3^4 u_4 x_1 + [u_1^2 u_2 u_3^5 + (u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2) u_3^3] u_4$$

$$R_0 = \text{pseudo-reste}(R_1, f_1, x_1) = 0$$

$$\text{On a } I_1 I_2 I_4 I_5 I_6 I_7 g = Q_1 f_1 + \dots + Q_7 f_7 + R_0$$

avec  $I_1 = u_1 u_3 \neq 0$  ( $2 u_1 u_3$  est le coefficient principal de  $f_1$ )

$$I_2 = u_1 \quad (2 u_1 \text{ est le coefficient principal de } f_2)$$

$$I_4 = -u_3^2 - u_2^2 + 2 u_1 u_2 - u_1^2$$

$$I_5 = u_3$$

$$I_6 = -u_3^2 - u_2^2$$

$$I_7 = u_2$$

Puisque  $R_0 = 0$ , on déduit  $g=0$  sous les conditions suivantes

$$u_1 u_3 \neq 0$$

$$u_1 \neq 0$$

$$-u_3^2 - u_2^2 + 2 u_1 u_2 - u_1^2 \neq 0$$

$$u_3 \neq 0$$

$$-u_3^2 - u_2^2 \neq 0$$

$$u_2 \neq 0$$

Le théorème est donc démontré à condition que  $u_1 u_2 u_3 \neq 0$  c'est-à-dire

$B \neq A$

$C \notin AB$  (A, B, C non alignés)

$CA \text{ non } \perp AB$

## BIBLIOGRAPHIE

### *Section 1 Un premier programme*

H.Gelertner, Realization of a geometry-theorem proving machine, *Computers and Thoughts*, MacGraw Hill, 1963, 134-152

H.Gelertner, J.R.Hansen, D.W.Loveland, Empirical explorations of the geometry theorem proving machine, *Computers and Thoughts*, MacGraw Hill, 1963, 153-163

P.C.Gilmore, An examination of the geometry theorem proving machine, *Artificial Intelligence Journal*, 1(3), 1970, 171-187

### *Section 2 Constructions géométriques avec la règle et le compas*

M.Buthion, Un programme qui résout formellement des problèmes de constructions géométriques, thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Paris VI, 1975

M.Buthion, Un programme qui résout formellement des problèmes de constructions géométriques, *RAIRO Informatique*, vol. 13 n° 1, 1979

P.Schreck, Automatisation des constructions géométriques à la règle et au compas, thèse d'université, Strasbourg, 1993

J.F.Dufour, P.Schreck, Un système à base de connaissances pour les constructions géométriques, 9<sup>ème</sup> congrès RFIA (1994), 351-360

### *Section 3 EIAO*

Y.Baulac, Un micromonde de géométrie, Cabri-géomètre, thèse Grenoble, 1990

J.M.Bazin, GEOMUS, un résolveur de problèmes de géométrie qui mobilise ses connaissances en fonction du problème posé, thèse Paris 6, 1993

J.M.Bazin, Un modèle d'expert en résolution de problèmes de géométrie, 3<sup>ème</sup> Colloque Francophone EIAO du PRC-IA et GR-Didactique, 1993, Cachan, M.Baron, R. Gras & J-F Nicaud (eds), Eyrolles, Paris, 1993, 27-39.

J.M.Bazin, Représentation des connaissances et des objets dans un résolveur de problèmes de géométrie : le système GEOMUS, 9<sup>ème</sup> congrès RFIA (1994), 657-662

C.Desmoulin, Etude et réalisation d'un système tuteur pour la construction de figures géométriques, thèse Grenoble I (1994)

D.Pastre, Muscadet version 2.3, Manuel de l'utilisateur, <http://www.math-info.univ-paris5.fr/~pastre/muscadet/manuel-fr.ps>, 2001



- M.Pintado, Une approche pour un tuteur informatique d'entraînement à la résolution d'exercices de géométrie élémentaire, 2<sup>ème</sup> Journées EIAO de Cachan, 1991, 45-61
- M.Pintado, Apprentissage et démonstration automatique de théorèmes, thèse Paris 6, 1994
- D.Py, Mentoniez, a geometry ITS for figure drawing and proof setting, Journal of Artificial Intelligence in Education, vol. 1(3), 1990, 41-56
- D.Py, Aide à la démonstration en géométrie : le projet Mentoniez, Science et Techniques Educatives, vol. 3(2), 1996, p. 227-256
- D.Py, Démonstration et implicites dans le tuteur Mentoniez, RFIA, 1996, p. 358-376
- J-P.Spagnol, Automatisation du raisonnement et de la rédaction de preuves en géométrie de l'enseignement secondaire, thèse de l'Université René Descartes - Paris 5, 2001
- J-P.Spagnol, ARGOS, un démonstrateur de théorèmes en géométrie, *Sciences et techniques éducatives*, vol. 8 (1-2), 2001, 113-125
- J-P.Spagnol, Modélisation et automatisation du raisonnement en géométrie, le système ARGOS, Treizième Congrès Francophone AFRIF-AFIA de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA), 2002, 1073-1082

#### Section 4 Axiomatiques

- P.B.Balbiani, V.Dugat, L.Farinas del Cerro, A.Lopez, Eléments de géométrie mécanique, Hermès, 1994
- D.Hilbert, Les fondements de la géométrie, Dunod, 1971
- A.Tarski, A decision method for elementary algebra and geometry, University of California Press, 1951 &&& retirer ?
- A.Tarski, What is elementary geometry, in The axiomatic method, with special reference to geometry and physics, ed. L.Henkin, P.Suppes, A.Tarski, North-Holland, 1959, 16-29 &&& retire ?
- A. Tarski, Logique, sémantique, métamathématique, Colin, 1974
- L.Wos, Automated Reasoning, 33 basic research problems, Prentice Hall, 1988

#### Section 5 Géométrie algébrique

- P.B.Balbiani, V.Dugat, L.Farinas del Cerro, A.Lopez,, Eléments de Géométrie mécanique, Hermès, 1994
- B.Buchberger, Gröbner bases : an algorithmic method in polynomial ideal theory, in Recent trends in multidimensional systems theory, ed. N.Bose, Pays Bas, 1985
- S.C.Chou, Proving and discovering theorems en elementary geometries using Wu's method, Ph D Thesis, Dept pf mathematics, U. of Texas at Austin, 1985
- S.C.Chou, An introduction to Wu's method for mechanical theorem proving in geometry, Journal of Automated Reasoning 4(3), 1988, 237-267
- S.C.Chou, X.S.Gao, Automated reasoning in differential geometry and mechanics using the characteristic set method, Journal of Automated Reasoning 10(2), 1993, Part I: An improved version of Ritt-Wu's decomposition algorithm, 151-172, Part II: Mechanical theorem proving, 173-190
- W.T.Wu, Basic principles of mechanical theorem proving in geometries, Journal of automated reasoning, vol. 2, 1986, 221-252
- W.T.Wu, Basic principles of mechanical theorem proving in geometry, Springer-Verlag, 1994