Chemins détournés, idées fausses et bonnes idées

Dominique Pastre
Crip5 - Université René Descartes

Cet article est dédié à la mémoire de Jean-Marc Fouet

Résumé : Dans le but d'améliorer les systèmes d'intelligence artificielle, il peut être intéressant d'imiter le raisonnement humain. Pour essayer de comprendre comment l'être humain raisonne, il peut être utile de l'observer. Après une auto-observation de quelques mois pendant la résolution d'une vingtaine de problèmes, cet article décrit et analyse les recherches effectuées, essaie de comprendre ce qui a conduit aux bonnes idées et essaie de montrer comment même ce qui était faux ou pourrait sembler inintéressant a pu aider à progresser vers les solutions.

Mots-clés : auto-observation, résolution de problèmes, logique, jeux mathématiques, puzzles

1. Introduction

Les méthodes utilisées en Intelligence artificielle dans la résolution automatique de problèmes peuvent être très différentes de celles utilisées par l'être humain et sont parfois beaucoup plus efficaces. On peut aussi choisir au contraire de définir des méthodes imitant le comportement de l'être humain, par exemple pour faire de la simulation, ou si la machine doit dialoguer avec l'être humain ou lui expliquer sa résolution. On peut aussi s'inspirer de ce que fait l'être humain, en particulier de ses heuristiques et de son expertise si l'on ne connaît pas de méthodes pour résoudre certains problèmes. Néanmoins, ceci est également difficile car on ne connaît pas bien ces heuristiques et cette expertise qui sont en grande partie inconscientes. Un expert n'est souvent pas capable de communiquer sa propre expertise « à froid ». Pour cela, il doit, sans que cela soit toujours suffisant, être mis en situation et être observé en train de résoudre des problèmes. De nombreux chercheurs ont effectué de telles observations [Pastre 78, Chi 81, Schoenfeld 85]. A défaut de pouvoir observer quelqu'un d'autre, il est aussi possible de s'auto-observer. Ces observations sont nécessairement un peu biaisées car il est difficile d'être à la fois l'observé et l'observateur, et d'effectuer, en plus de la tâche de résolution de problèmes la tâche d'observation. Néanmoins, ces observations peuvent être très utiles pour l'Intelligence Artificielle car, même si elles ne donnent pas exactement ce qui s'est passé dans la tête de l'observé, elle montre des cheminements plausibles dont il est raisonnable de s’inspirer pour résoudre automatiquement, expliquer, dialoguer. Il est même possible, et utile !, de s’observer en train de s’observer [Pitrat 99].

Les problèmes dont la résolution est analysée dans cet article sont des problèmes de logique ou de mathématiques ne nécessitant pas en général de connaissances mathématiques très approfondies, mais nécessitant parfois une recherche assez longue. Si certains ont été résolus en quelques heures, ou même en quelques minutes, d’autres ont nécessité plusieurs jours, voire plusieurs semaines. Dans ces cas-là, il y a, bien sûr, en plus, maturation entre deux périodes de réflexion. Dans ces conditions, seule une auto-observation était envisageable. Il m’était aussi, même pour une auto-observation, difficile de trouver le temps de passer toutes ces heures et ces journées, tranquillement assise devant mon bureau avec papier-crayon pour tout noter et magnétophone pour enregistrer une réflexion à voix haute. Je devais au contraire profiter de tout moment où mon esprit n’était pas occupé par une autre tâche pour réfléchir, quelquefois avec la possibilité de griffonner quelques équations[1] ou quelques dessins, d’autres fois purement mentalement[2]. Je faisais néanmoins l’effort, dès que possible et chaque fois que cela était nécessaire, de noter rapidement par écrit ce que j’avais fait ou envisagé et pourquoi, le cheminement de ma pensée, même si les idées ou les techniques employées n’avaient pas abouti, même si ce qui avait été fait ou envisagé ne semblait pas intéressant. Je ne dispose donc pas de protocoles complètement détaillés, mais de résumés qui donnent une bonne idée de mes recherches.

On trouvera dans cet article des résumés de ces résumés dans lesquels j’ai essayé de dégager les points importants de mes recherches, qui m’ont conduit ou ne m’ont pas conduit à des solutions, sans omettre les impasses ni les grosses bêtises. On verra d’ailleurs, et c’est un phénomène qui m’a semblé important et qui a donné le titre de l’article, qu’à côté des stupidités impardonnables et sans intérêt, il y a des erreurs ou des inexactitudes qui n’ont certes pas conduit à la solution, mais à des idées qui, elles, ont conduit à la solution. Il ne s’agit donc pas de rédactions de preuves les plus courtes, les plus simples, les plus élégantes possible qui seraient données s’il ne s’était agi « que » de donner les solutions des problèmes et elles ne doivent pas être considérées comme des modèles de preuves, ce n’était pas le but. Outre l’élagage de tout de qui n’est pas nécessaire directement à la preuve, un travail de simplification et de clarification de notations serait alors à faire.

Après avoir donné l’origine et le contexte des problèmes analysés (section 2), les grosses bêtises dont je suis coupable (section 3), j’analyserai des problèmes pour lesquels de

---

[1] devant une table, ou, plus inconfortablement dans le métro ou pendant une réunion qui traîne en longueur

[2] en marchant ou avant de m’endormir …

premières idées se sont révélées fausses mais ont néanmoins conduit à de bonnes idées (section 4) et des problèmes dans lesquels les bonnes idées sont apparues après des chemins détournés et inutilement compliqués (section 5). On verra également des cas où la mémoire a joué un rôle positif et des cas où elle n'a servi à rien (section 6). Enfin d'autres problèmes seront évoqués rapidement en sections 7 et 8.

2. Sources des problèmes

Les problèmes analysés proviennent des trois origines suivantes.

2.1. Rubrique AFFAIRE DE LOGIQUE du journal Le Monde du lundi (daté mardi)

Ces problèmes sont de difficultés très inégale. Certains se résolvent en quelques minutes. D'autres ont demandé beaucoup d'efforts pour être résolus avant la parution de la solution le lundi suivant. Pour l'un d'eux enfin (section 4.1), seuls le cas particulier facile et la formule dans le cas général étaient trouvés au bout d'une semaine, aussi bien par moi-même que dans la solution du Monde qui, après la formule, ajoutait « Il semblerait qu'on ne puisse pas faire mieux (si des lecteurs peuvent le prouver, qu'ils nous écrivent).» Une deuxième semaine de recherche m'a été nécessaire pour finir de démontrer qu'on ne pouvait pas faire mieux.

2.2. Championnats des jeux mathématiques et logiques (½ finales 1999 et 2000)

La résolution des problèmes de ces jeux est très différente dans un premier temps puisqu'il s'agit de résoudre en trois heures douze problèmes, de difficultés a priori croissantes et qu'il faut donner en guise de réponse, le nombre de solutions pour chaque problème et deux des solutions (éventuellement une seule ou zéro). Il faut donc gérer correctement son temps, non seulement résoudre les problèmes mais aussi évaluer le nombre de solutions, ne pas faire d'étourderies ni dans la résolution, ni dans la recopie des solutions. Dans un deuxième temps, on a tout le loisir de reprendre les problèmes chez soi, de résoudre ceux qu'on avait pas réussi à résoudre, et de découvrir les fautes que l'on a faites dans quelques autres (on est aidé par cela par la différence entre le score obtenu et le nombre de problèmes que l'on croyait avoir résolus correctement …).
Pour les problèmes 2000, je dispose des brouillons complets, que je m'étais imposée, cette année, de faire proprement, sans mélanger les problèmes.

2.3. Page Web de Jean-Marc Fouet
(http://www710.univ-lyon1.fr/~fouet/Dir_lic_mai/TP/puzzles.html)

C'est la source d'un des problèmes (section 6.3) qui est assez classique et que j'avais déjà eu l'occasion de rencontrer. On verra pourquoi la mémoire m'a été de peu de secours et pourquoi je pense qu'elle me sera utile dorénavant.

3. Le bêtisier

Dans cette section, on ne trouvera que des problèmes des Jeux mathématiques où le temps limité m'a permis de ne pas oublier quelques grosses erreurs.
Les problèmes 3.1, 3.3 et 3.4 montrent des étourderies stupides, le problème 3.2 un raisonnement faux car trop rapide. Dans le problème 3.4, une grosse étourderie initiale a été difficile à trouver, c'est souvent le cas des erreurs des plus grossières. Dans ce même problème, on verra comment des simplifications et des vérifications sur des cas particuliers simples ont aidé à la résolution, comment une petite erreur a été trouvée après le résultat, ainsi que quelques petites inexactitudes sans conséquence sur le raisonnement.

3.1 La famille Septime (Jeux mathématiques – ½ finales 1999)

Monsieur et Madame Septime ont sept enfants nés, curieusement, tous les sept un 7 juillet. Chaque année, pour leur anniversaire, Madame Septime offre à chacun un gâteau comportant autant de bougies qu'il a d'années. Jean Septime, le plus jeune, se souvient qu'il y a cinq ans, il y avait, au total, deux fois moins de bougies que cette année.
Combien de bougies seront allumées cette année ?

Réponse : 35. Non ! Il y en avait bien 35 il y a cinq ans, mais on demande combien il y en a cette année (70) …
C'est une erreur qu'une machine ne ferait pas !
Raison de l'erreur : le calcul se fait naturellement à partir du nombre d'il y a cinq ans, plutôt que l'inverse.

Pour qu'une réponse soit correcte, il ne suffit pas de résoudre le problème, il faut aussi répondre exactement à la question posée.

3.2 Embrouille sur la feuille de matches (Jeux mathématiques – ½ finales 2000)

Pendant les derniers matches avant la finale de la coupe de basket, nous avons bien vu dans les tribunes un espion de notre future équipe adverse. Il notait notre technique habituelle. Il nous faut perturber les repères qu'on a pu prendre. Nous avons donc décidé de redistribuer nos cinq maillots numérotés de façon qu'aucun de nous ne porte son numéro habituel.
De combien de manière pouvons nous effectuer cette redistribution ?

Réponse en 4 minutes, le jour des Jeux, il me reste le brouillon suivant :

5 maillots

1	4 possibilités	$4\times3\times2 = 24$
2	3	
3	2	
1		

perm = 5 ! = 120

C'est faux : l'ancien numéro du $2^{\grave{e}me}$ peut être égal à celui qu'on a donné au 1^{er}.

Un raisonnement correct a été fait plus tard :

- d'abord directement : avec des maillots initiaux a b c d e

1^{er} joueur 4 possibilités, par exemple b

$2^{\grave{e}me}$ joueur ou bien a, celui du 1^{er}, il reste c d e à distribuer, soit 2 possibilités

ou bien un autre parmi 3, par exemple c, soit b c … alors

$3^{\grave{e}me}$ joueur ou bien a, il reste d e à distribuer, une seule possibilité

ou bien d ou e (2 possibilités) et le reste est imposé

Finalement on a $4\times(2 + 3\times(1+2)) =$ **44**

Comme je ne suis pas bien sûre, je fais un deuxième raisonnement avec les complémentaires :

Après quelques tâtonnements, soient a_n le nombre de possibilités pour n maillots et c_n le complémentaire, on a

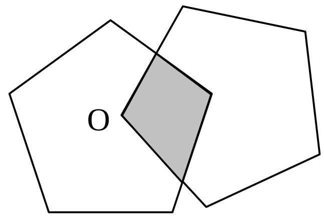
$a_n = n\,! - c_n$

$c_n = n\, a_{n-1} + C_n^2\, a_{n-2} + C_n^3\, a_{n-3} + \ldots + C_n^{n-1}\, a_1 + 1$ (Rem : $a_1 = 0$)

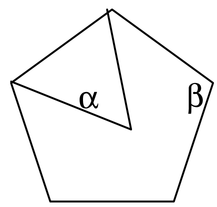
Alors, on retrouve, avec $a_1 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $a_2 = 1$, $c_3 = 4$, $a_3 = 2$, $c_4 = 15$, $a_4 = 9$, $c_5 = 76$, $\mathbf{a_5 = 44}$

3.3. Le radar du Pentagone (Jeux mathématiques – ½ finales 2000)

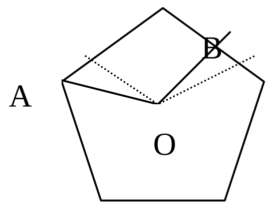
Le siège de l'état-major de l'armée des Etats –Unis est un bâtiment en forme de pentagone régulier, dit le Pentagone. Les services secrets viennent d'y installer un radar révolutionnaire dont la zone de détection, qui couvre également l'extérieur du bâtiment, est un pentagone identique tournant autour d'un sommet situé au centre du Pentagone. Quel est, au maximum le pourcentage de la surface du Pentagone couvert part la zone de détection du radar, en gris sur la figure ? On prendra si besoin est 2,236 pour $\sqrt{5}$, et on arrondira à l'entier le plus proche.



La première des choses à faire est d'évaluer les angles α et β.
On a $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ et $\beta = \frac{3\pi}{5}$

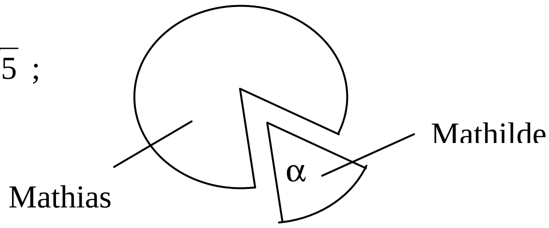


C'est élémentaire mais beaucoup d'erreurs pour ce calcul et un temps déraisonnable pour trouver β le jour des Jeux.
Beaucoup de dessins mais le dessin correct suivant n'a été trouvé que plus tard.
OB est perpendiculaire au côté du Pentagone.
En évaluant la surfaces des petits triangles, on voit
Que la position AOB correspond au maximum et le
pourcentage est donc 1,5/5 =30%



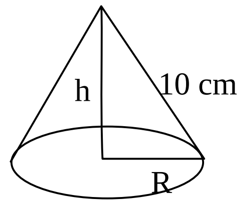
3.4. Les deux cônes (Jeux mathématiques – ½ finales 2000)

Mathilde et Mathias sont au collège. Leur professeur a donné à chaque groupe de deux élèves un disque de papier de 20cm de diamètre. La consigne est de découper le disque en deux secteurs et d'en faire deux cônes en rapprochant les bords coupés.
Chacun s'affaire en suivant son bon plaisir. Ainsi Mathilde a découpé un secteur et elle donne la partie restante à Mathias (voir figure).
Soigneusement, du papier adhésif est collé pour achever la mise en forme des deux cônes. Ils peuvent alors constater que le cône de Mathilde est deux fois plus haut que celui de Mathias !
Quelle est la valeur de l'angle α du secteur découpé par Mathilde, arrondi au degré le plus proche ?
Pour d'éventuels calculs, on prendra 2,236 pour $\sqrt{5}$;
2,646 pour $\sqrt{7}$; 3,317 pour $\sqrt{11}$;
3,306 pour $\sqrt{13}$ et 3,1416 pour π



Recherche

Il s'agit d'évaluer le rapport des hauteurs h et h' des deux cônes, sachant que l'on veut avoir $\frac{h}{h'} = 2$.



Il est immédiat que l'on a $h^2 + R^2 = 100$ et $h'^2 + R'^2 = 100$ où R et R' sont les rayons des cercles de base.
D'autre part, la circonférence du cercle de base est égale à la longueur de l'arc de cercle du secteur d'angle α. Si on exprime α en radians, on a $2\pi R = 10\alpha$ et $2\pi R' = 10(2\pi - \alpha)$
On pourrait peut-être exprimer α autrement qu'en radians, on pourrait peut-être ne pas considérer ce 10 qui n'est pas significatif, mais je crois gagner du temps en fonçant brutalement.
En éliminant α puis R', on arrive facilement à une équation du second degré en R, pas très sympathique

$$R^2 \left[4 \left(\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right)^2 - 1 \right] = 300$$

Connaissant R, on trouverait α.
Je tire un trait et je recommence, je vais plutôt chercher directement une équation en α.
Je fais alors une grosse erreur d'étourderie : de $10\alpha = 2\pi R$, je tire $R = \frac{\pi}{5\alpha}$ *au lieu de* $\frac{5\alpha}{\pi}$.

Cela conduit à une équation du $4^{\text{ème}}$ degré en α.
J'abandonne.

J'ai repris ce problème plus tard, à tête reposée et … de tête

Je fais d'abord quelques simplifications (*c'est un des avantages du travail de tête, on est forcé de simplifier):*

- 1 au lieu de 10 (1 dm si l'on veut mais aucune importance)
- α : pourcentage de la circonférence au lieu de la valeur en radians, pour ne plus avoir de π
  on a tout simplement R = α et R' = 1- α
- rapport k au lieu de 2 pour pouvoir vérifier des valeurs triviales (0, ∞, 1)
- rapport inverse pour avoir un dénominateur plus sympathique que le dénominateur

soit

$$k^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{1-R'^2}{1-R^2} = \frac{1-(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}$$

J'arrive à une équation simple du second degré

$$(k^2-1)\,\alpha^2 + 2\,\alpha - k^2 = 0$$

Une vérification donne bien, pour k = 0, α = 0
pour k = ∞, α = 1
pour k = 1, α = ½

On voit l'intérêt des simplifications :
- erreurs évitées
- vérifications faciles

(*Autre avantage du travail de tête, comme on n'est jamais absolument sûr de son calcul, on fait des vérifications.)*

Il y a une racine positive

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{k^4-k^2+1}}{k^2-1}$$ (de nouveau vérification pour k = 0, ∞, 1)

avec k = 2

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{13}}{3}$$

de tête, encadrement de $\sqrt{13}$ entre 3 et 4, puis entre 3,6 et 3,7, d'où entre 0,87 et 0,9, soit un peu plus d'un dixième de tour pour 1- α

Ayant retrouvé papier-crayon, et avec les données du texte ($\sqrt{13}$ = 3,606)

je trouve α = 0,8687 soit en degrés 313°

Non, le α du texte est aigu, j'ai interverti les deux cônes, la réponse est 1- α = **47°**

Pour faire plus propre, il faudrait prendre k = ½ et trouver directement α

Je reviens alors sur le brouillon et la découverte de l'erreur a été laborieuse, car je vérifiais tout sauf… le passage de $10\alpha = 2\pi R$ à $R = \frac{\pi}{5\alpha}$

Remarque
L'histoire du numérateur plus simple que le dénominateur peut sembler stupide, puisqu'il ne s'agit que de proportions. Ecrire $\frac{1}{k^2} = \frac{1-(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}$ devrait être analogue

Pas tout à fait : il me semble alors que montrer que l'équation a une racine négative, donc une seule racine acceptable, est un peu plus compliqué et je laisse ce fait à vérifier, en me disant que j'ai bien fait de faire le choix inverse …
En fait (quelques mois plus tard) : je suis allée un peu vite, il y a bien une racine à éliminer, mais c'est soit parce qu'elle est négative, soit (cas k<1 dans la version rédigée plus haut) parce qu'elle est supérieure à 1.

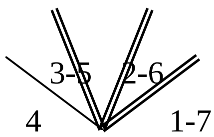
4. Idées fausses et bonnes idées

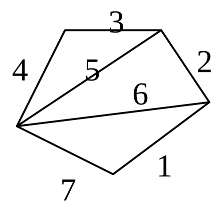
On verra comment des idées fausses ont pu conduire malgré tout à de bonnes idées et comment, dans la recherche de propriétés pertinentes, des raisonnements incomplets ou inexacts ont été repris jusqu'à la mise au point de la bonne propriété. On verra également l'importance des essais, des cas simples et des dessins.

4.1. Potins et commères (Le Monde 14 mars – Affaire de Logique – Problème n° 163)

Chacune de ces cinq commères connaît un potin croustillant qu'elle voudrait bien faire partager à ses quatre complices.
Mais voilà, les cinq commères sont dispersées ce jour-là aux cinq coins de la ville. Heureusement, elles possèdent des téléphones portables.
Combien d'appels téléphoniques, au minimum, seront nécessaires pour que chacune des cinq commères possède chacun des cinq potins ? Et combien d'appels seront nécessaires avec un nombre quelconque de commères ?
N.B. Evidemment, aucune n'a un abonnement permettant la conversation à trois (ou plus) ni même le signal d'appel.

Premiers essais
deux méthodes pour trouver une solution en 7 appels

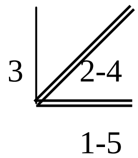


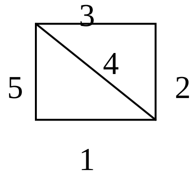


généralisable pour n quelconques (n-1)+(n-2) = 2n-3

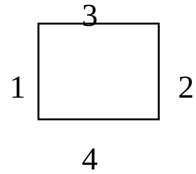
Pour les premières valeurs de n cela donne
n=2, 2 appels

n=3, 3 appels
n=4, 5 appels

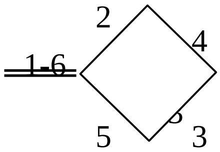




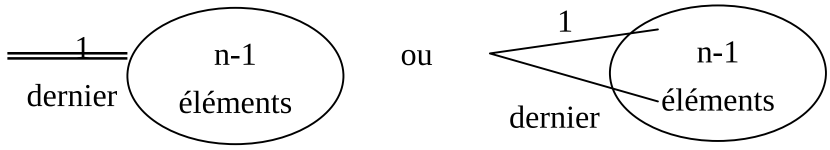
mais on peut faire mieux pour n=4 : 4 appels



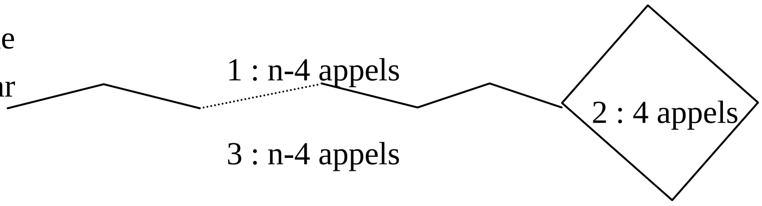
alors pour n=5 :



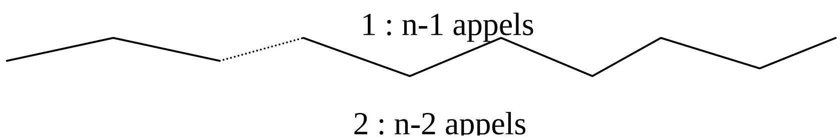
on trouve alors qu'on peut faire 2n-4 pour tout n>=4
1- par récurrence sur n :
$a_n = a_{n-1} + 2$



2- en mettant en évidence un groupe de 4 à la fin (au début ça ne suffirait pas car il faudrait le compléter à la fin) :



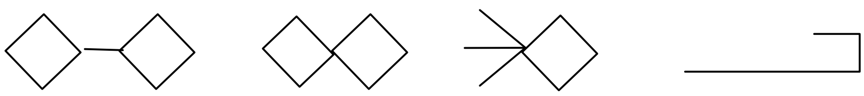
L'aller-retour simple donnant 2 n –3 appels

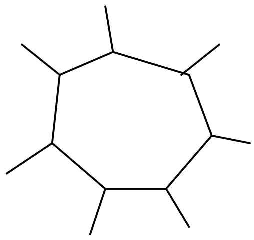
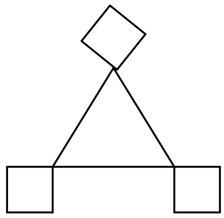
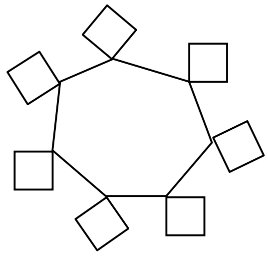


Remarque : on passe de n à n+1 en rajoutant 2 appels sauf pour 1 à 2 et 3 à 4 (et 0 à 1)

Peut-on faire mieux ?

Idée : regrouper 2 par 2 ou par paquets de 4
Travail sur les « aller-retours », sur l'appel qui rend la première commère « savante ».
Importance du sous-ensemble de 2 et importance du dernier morceau de 4
Nombreux essais

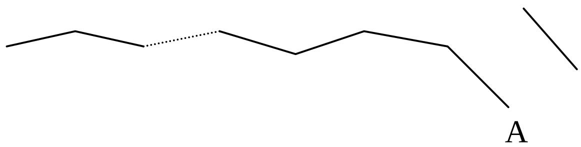


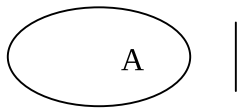
  

Inutile d'essayer de faire apparaître plusieurs morceaux de 4 complets car il faudra recompléter (sauf le dernier). *(C'était une idée fausse, voir plus loin.)*

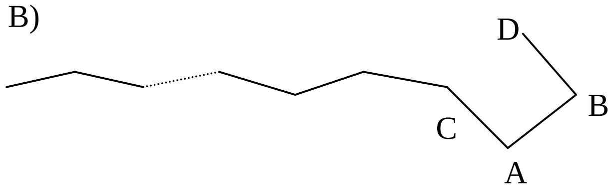
Importance de 2 et 4, en fait 4 est important car = 2+2

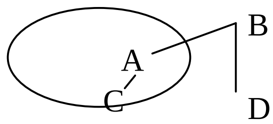
Idée forte le samedi : c'est 2 qui est important, travail avec n-2 d'une part, 2 d'autre part





puis on connecte la commère A des n-2 qui connaît tout des n-2 (au moins n-3 appels) et une des 2 autres, (n-1 appels pour avoir la première commère qui connaît tout, et elles sont deux, A et B)





et on complète le reste, soit n-2 à compléter, soit a priori n-2 mais il y a un couple «complémentaire» qui se complète en un seul appel (C et D), d'où seulement n-3 appels, soit au total (n-3)+1+1+(n-3)= 2n-4

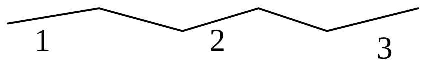
Confusion fréquente dans le raisonnement entre essayer de faire au mieux et montrer qu'on ne peut pas faire mieux.

Pour montrer qu'on ne peut pas faire mieux, il faut montrer qu'on ne peut pas compléter en moins de n-3 appels. J'y arrive si l'appel qui rend la première commère complète est bien le (n-1)$^{\text{ème}}$, car il y a alors un seul couple complémentaire.

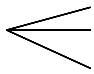
Et si l’appel qui rend la première commère complète était plus tard, soit n-1+p, il pourrait y avoir plusieurs couples complémentaires.
L’idée de couple complémentaire semble importante.
Il faut aussi envisager que l’appel qui rend la première commère complète n'est pas entre un sous-ensemble de n-2 et un de 2.
Raisonnements un peu confus, certitude que ça doit marcher en alternance avec l'idée que cela repose sur un théorème difficile de théorie des graphes.
Puis impression que mon raisonnement doit marcher, j'attends lundi pour voir si, ou bien la solution est celle que j'entrevois et comment elle est expliquée, ou bien la solution repose sur une idée simple que je n'ai pas vue.

Lundi : solution du Monde : « … on parvient à communiquer en 2 N-4 appels. Il semblerait qu’on ne puisse pas faire mieux (si des lecteurs peuvent le prouver, qu’ils nous écrivent).»

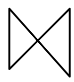
Reprise des raisonnements sur le nombre de couples complémentaires, et sur leur disparition en fonction des appels. Je n'arrive pas à préciser mon raisonnement.
Introduction de la notion de chaîne de couples complémentaires, et de cycle.
Exemples :
5 couples, mais à compter comme 3



3 couples, à compter comme 2



Introduction de la notion de couples isolés, difficiles à compter



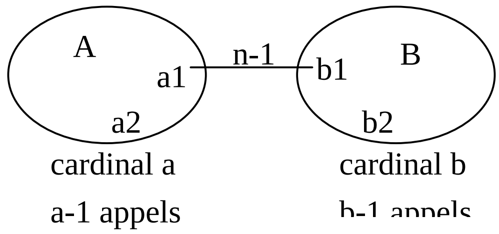
Je m'aperçois que dans la configuration «4» fondamentale,
il n'y a pas 2 couples complémentaires, mais 4 !
Idée d'introduire le nombre de sommets impliqués dans des couples complémentaires et de diviser par 2. On retrouve bien 2 dans le dessin précédent.

C’est toujours aussi confus, abandon proche.

Puis ***idée de la connexité*, obtenue également en au moins n-1 appels, qui peut arriver avant la complétude**. J'abandonne alors l'idée de découper avec un morceau de 2 ou de 4. On considère plutôt deux sous-ensembles A et B de cardinaux a et b éléments connexes reliés par un appel qui rend l'ensemble connexe, a et b étant au moins égaux à 2.

Plusieurs cas sont envisagés :

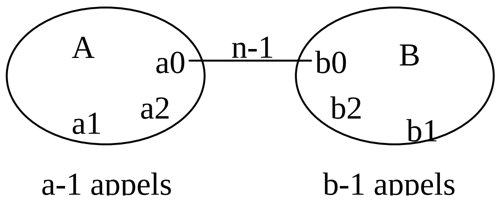
1^er^ cas : la complétude et la connexité sont obtenues au $(n-1)^{\text{ème}}$ appel entre a1 et b1 qui connaissent alors tout. Il y a exactement deux a qui connaissent tout de A. Idem pour B. Le couple a2-b2 est complémentaire. Il faut au moins $(a-2) + (b-2) + 1 = (a-1)+(a-1) - 1 = n-3$ pour compléter.



Quelques remarques importantes se précisent (démonstrations par récurrence) :

- pour qu'une commère connaisse tous les potins, il faut au moins n-1 appels. Il y a alors au moins deux commères connaissant tous les potins. Si cette propriété arrive exactement au $(n-1)^{\text{ème}}$ appel, il y en a exactement deux. Si cette propriété arrive au $(n-1+p)^{\text{ème}}$ appel, il y en a au plus 2p+2.
- si une commère connaît tous les potins, le graphe est connexe. La réciproque n'est pas vraie, la connexité peut arriver avant qu'une seule commère connaisse tous les potins.
- Pour que le graphe soit connexe, il faut au moins n-1 appels.
- $(n-1)^{\text{ème}}$ appel peut conduire à la fois à la connexité et à la complétude. Intuitivement, c'est l'optimal. (Mais ce n'est pas nécessaire, voir plus loin.)

$2^{\text{ème}}$ cas : le $(n-1)^{\text{ème}}$ appel, a0-b0, apporte la connexité mais pas encore la complétude. Il y a au plus deux a (a1 et a2) qui connaissent tous les potins de A. Idem pour B. Il faut au moins $(n-1)+(a-2)+(b-2)+2 = 2n-3$ pour compléter.

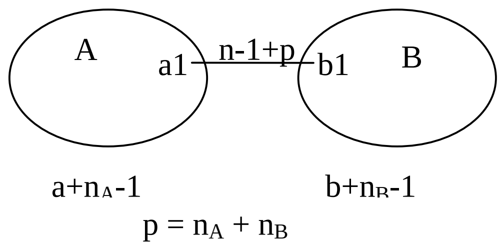


$3^{\text{ème}}$ cas : la connexité n'apparaît qu'au $(n-1+p)^{\text{ème}}$ appel, après n_A appels chez A et n_B chez B. Il y a au plus $2n_A+2$ commères de A connaissant tous les potins de A et au moins $a-2n_A-2$ ne les connaissant pas. Il y a donc, après le $(n-1+ n_A + n_B)^{\text{ème}}$ appel entre a1 et b1 :

X_A : au moins $a-2n_A-2$ commères à qui il manque au moins un potin de A et tous ceux de B (sauf éventuellement a_1 qui connaît des potins de B)

Y_A : au plus $2n_A+2$ commères qui connaissent tous les potins de A et aucun potin de B, sauf éventuellement une (a_1), soit $2n_A+1$ connaissant tous les potins de A et aucun de B et une connaissant tout.

Idem pour B.



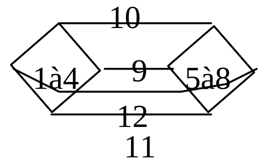
Il faut donc compléter a-1 (ou a) commères de B et b-1 (ou b) commères de B. Un même appel peut compléter à la fois deux commères de Y_A et Y_B (couples complémentaires) mais chaque commère de X_A et X_B nécessite un appel. Il faut donc au moins $(a-2n_A-2)+(a-2n_B-2)+\sup(2n_A+1,2n_B+1) = n-3-2\inf(n_A,n_B)$ pour compléter. Au total, il faut donc $(n-1+n_A+n_B)+(n-3-2\inf(n_A,n_B)) = 2n-4+\sup(n_A,n_B)-\inf(n_A,n_B) \geq 2n - 4$

La rédaction a été laborieuse, mais il m'a semblé tenir la bonne idée.

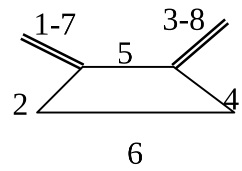
La rédaction définitive, plus concise et plus livresque, ne comporte plus que le 3ème cas, le 1er et le 2ème en étant des cas particuliers.

On voit alors que l'optimal correspond au fait que le $(n-1+ n_A + n_B)$ème appel conduit à la fois à la complétude et à la connexité, comme attendu (sinon aurait pris $2n_A+2$ au lieu de $2n_A+1$) dans le calcul), mais qu'il n'est pas nécessaire que $n_A=n_B=0$, il peut suffire que $n_A=n_B$.

Exemple avec $n_A=n_B=1$, $n=8$, $a=b=4$
(Cet exemple m'avait échappé au début de la recherche, quand je cherchais à recoller des sous-ensembles de 4, je pensais qu'il était en 2n-3)



Autre remarque : le découpage en (n-2)+2 ou (n-4)+4 n'est pas toujours nécessaire pour avoir l'optimal (mais sans doute seulement pour $n \leq 4$) . Exemple $n=6$, $a=b=3$.
J'ai souvent oublié, dans les raisonnements, que si une commère connaît tous les potins d'un sous-ensemble, elles sont deux à tout connaître.



On voit aussi que si a ou b = 1, on n'a pas l'optimal. En effet, si $a=1$, $n_A=0$, il faut, pour compléter après le $(n-1+ n_B)$ème appel, au moins $(b - 2n_B - 2) + (2n_B + 1) = b-1 = n-2$, soit au total au moins $n - 1 + n_B + n - 2 \geq 2n - 3$.
Ceci, par contre, avait été perçu dès le début (la commère isolée – voir récurrence – doit appeler la première et la dernière).

Dernière remarque : si on avait $a-2n_A-2 <0$, on remplacerait $a-2n_A-2$ par 0 et $2n_A+2$ par a et on ne pourrait qu'augmenter la borne.

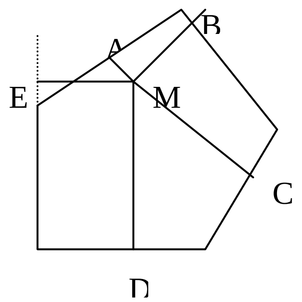
Finalement, le nombre exceptionnel n'est ni 2 ni 4 mais 1, et n=1 à 3 sont particuliers (l'optimal n'est pas 2n-4) car ils ne se décomposent pas en somme de deux nombres >1, cad l'ensemble des commères ne peut pas être partagés en deux sous-ensembles dans lesquels on trouvera deux commères connaissant tout de leur sous-ensemble.

Des idées fausses ont ainsi conduit aux bonnes idées, quelquefois simplement en précisant le raisonnement entrevu.

Idées fausses	→	*Bonnes idées*
2 et 4 particuliers 4 à cause de 2		découpage en deux morceaux
		Mais, ce qui est important (car mauvais), c'est 1
Découpage nécessaire : (n-4)+4 puis (n-2)+2	puis	Découpage a+b a>1, b>1
La complétude est la propriété essentielle		
puis		
La connexité aussi, et elle doit arriver en même temps que la complétude	puis	La connexité est la propriété la plus importante et elle peut arriver avant la complétude

4.2. Invariant pentagonal (Le Monde 15 février - Affaire de Logique- Problème n° 159)

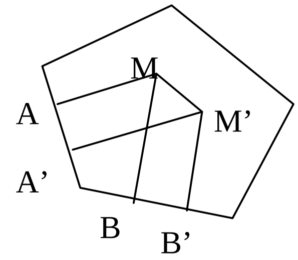
Le pentagone convexe ci-dessous a ses cinq côtés égaux (leur longueur est un même nombre a). A un point M intérieur au pentagone, on associe MA + MB + MC + MD + ME, somme des distances de M aux cinq côtés du pentagone (ou à leurs prolongements).
Sauriez-vous expliquer pourquoi cette valeur ne dépend pas du choix du point M ?
La propriété est-elle conservée si le pentagone a cinq angles égaux sans que les côtés le soient ?



Ce problème a une solution immédiate (voir à la fin) mais je n'en ai pas eu l'idée, ni même aucune autre idée dans un premier temps.

Puis, j'ai l'idée d'observer les conséquences du déplacement du point M.

Pour simplifier, d'abord, le long du segment MA (on pourra ensuite décomposer un déplacement en deux sous-déplacements le long de MA et MB).



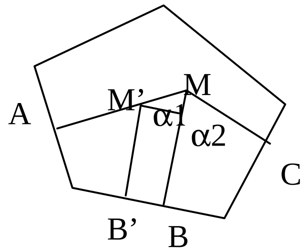
Si MM'=d, MA augmente ou diminue de d, MB augmente ou diminue de d*cos $\alpha 1$, où $\alpha 1$=angle(AMB). MB augmente ou diminue de d*cos(AMC), soit d*cos ($\alpha 1+\alpha 2$), où $\alpha 2$=angle BMC.

On arrive ainsi à une variation de d multiplié par

1 + cos(AMB) + cos(AMC) + cos(AMD) + cos(AME)   ou

1 + cos $\alpha 1$ + cos($\alpha 1+\alpha 2$) + cos($\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3$) + cos($\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3+\alpha 4$)

(Avec petit raisonnement sur les signes selon que les angles sont aigus ou obtus)



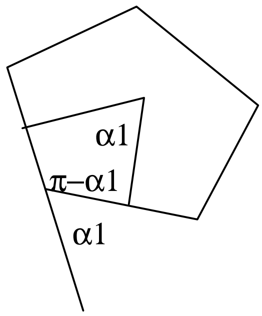
Pour un déplacement quelconque de M, on aura

cos $\alpha 0$ + cos($\alpha 0+\alpha 1$) + cos($\alpha 0+\alpha 1+\alpha 2$) +cos($\alpha 0+\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3$)+cos($\alpha 0+\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3+\alpha 4$)

avec $\alpha 0$ = angle M'MA

Il reste donc à montrer que cette somme est nulle.

Je remarque que ces angles sont à π près les angles du pentagone.

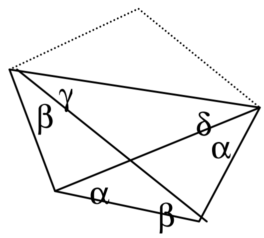


Evaluer cette somme est immédiat mais je n'ai pas eu tout de suite la bonne idée simple.

Ces angles ne sont pas quelconques puisque les côtés sont égaux. En fait, deux angles sont quelconques, et les autres sont fonctions de ces deux angles. On va donc essayer de les calculer.

Une première relation est simple : $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

Il faut une autre équation pour tout connaître en fonction de α et β .



Des calculs compliqués suivent, en utilisant la formule donnant la longueur d'un côté en fonction des angles d'un triangle (retrouvée avec quelque effort). En voici quelques exemples, où les αi désignent maintenant les angles du pentagone

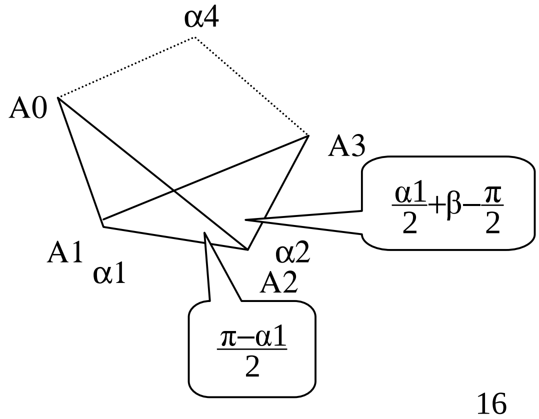
$A_0A_2 = 2 \sin \frac{\alpha 1}{2}$

$(A_0A_2)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha 1}{2} = 2 - 2 \cos \alpha 1$

$(A_0A_3)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha 1}{2} + 1 - 4 \sin \frac{\alpha 1}{2} \sin(\frac{\alpha 1}{2} + \alpha 2)$

On a aussi

$(A_0A_3)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha 4}{2} = 2 - 2 \cos \alpha 4$



En égalant les deux expressions de $(A_0A_3)^2$,
on a la relation qui manque …

D'autres calculs, faux (de tête), m'ont conduit à des expresssions de la forme $\frac{\alpha 1}{4} + \frac{\alpha 2}{2} + \alpha 3$, etc.

J'en conclus que je suis sur une mauvaise voie, même si, théoriquement, le calcul est possible, je n'aurai pas une expression simple que je pourrai calculer. *Il faut absolument faire apparaître les sommes* $\alpha 1+\alpha 2$, $\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3$, *etc.* Il y a confusion avec les αi de tout à l'heure, mais c'est sans importance puisque ce sont les mêmes à π près et leur donner le même nom aide plutôt à y voir clair.

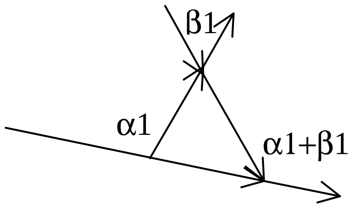
(En fait, contraitrement à ce que je pensais, en reprenant, par curiosité les calculs plus tard, on peut faire apparaître $\alpha 1+\alpha 2$ car $(A_0A_3)^2$ s'écrit aussi $3 - 2\cos\alpha 1 - 2\cos\alpha 2 + 2\cos(\alpha 1+\alpha 2)$, d'où

$\cos\alpha 4 = \cos\alpha 1 + \cos\alpha 2 - \cos(\alpha 1+\alpha 2) - \frac{1}{2}$

Avec la même relation, entre $\alpha 0$, $\alpha 1$ et $\alpha 3$, on a $\cos\alpha 3 - \cos\alpha 1 + \cos(\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3+\alpha 4) - \cos(\alpha 2+\alpha 3+\alpha 4) = \frac{1}{2}$

On n'est pas encore au bout de nos peines …)

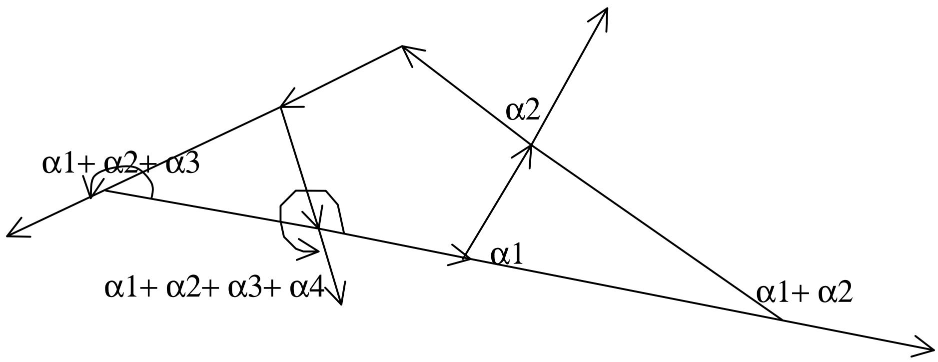
Concentrée sur les sommes des αi *en particulier sur* $\alpha 1+\alpha 2$ *, j'ai enfin la bonne idée* qui consiste à considérer les angles extérieurs, qui sont égaux aux αi de tout à l'heure. $\alpha 1+\alpha 2$ est égal à l'angle, orienté, du 1^er^ côté avec le 3^ème^.



Les sommes des angles considérées sont les angles d'un des côtés avec successivement tous les autres. Les cosinus, multipliés par la longueur commune a, sont les projections des vecteurs-côtés sur l'un d'eux, celui-ci contribuant pour a et la somme

$$1 + \cos\alpha 1 + \cos(\alpha 1+\alpha 2) + \cos(\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3) + \cos(\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3+\alpha 4)$$

est bien nulle puisque la somme des 5 vecteurs-côtés est nulle !



On peut aussi faire directement le cas du déplacement MM’ quelconque en projetant sur une droite perpendiculaire à MM’.

En ce qui concerne la deuxième question, avec des angles égaux, je pensais d’abord que la réponse était non. Mais de ce qui précède, je déduis immédiatement que la réponse est oui, en considérant un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique et en projetant la somme des vecteurs-côtés sur l’axe des x.

La réponse du Monde est d’une simplicité telle que je regrette de ne pas l’avoir trouvée : « L’aire du pentagone est la somme des aires des cinq triangles de sommet M. » La suite est alors triviale. Par contre, la réponse à la deuxième question est moins simple que la mienne : on part du pentagone régulier et on le déforme.

Conclusion : Il est difficile de savoir pourquoi l’idée très simple des aires n’est pas apparue.
En ce qui concerne la solution trouvée, on remarque que c’est l’*idée fausse* « je ne peux pas avoir $\alpha1+ \alpha2$ » qui a conduit à la *bonne idée* : il faut se concentrer sur cette somme $\alpha1+ \alpha2$, la faire apparaître directement.

5. Chemins détournés et bonnes idées

On verra, dans le premier problème un raisonnement géométrique absolument pas nécessaire, mais qui a conduit aux bonnes relations algébriques. Dans le deuxième problème, la bonne idée de la parité n’est apparue qu’à l’occasion d’un sous-problème simple, mais cette idée est bonne pour le problème initial et la décomposition en sous-problèmes est inutile. Enfin dans le troisième, on voit apparaître des configurations plus complexes que nécessaire.

5.1. La grande famille (Le Monde 11 avril – Affaire de Logique – Problème n° 167)

Le patriarche de cette famille a eu des enfants, des petits-enfants, des arrière-petits-enfants et même des arrière- arrière-petits-enfants. Tous sont vivants, en bonne santé, et sont venus souhaiter (sans leurs conjoints) à l’ancêtre son anniversaire. Des chaises ont été installées en carré (il y a autant de chaises dans chaque rangée que de rangées de chaises), et elles sont toutes occupées lorsque ‘ancêtre se rassoit à la fin de son discours.
Chose extraordinaire, toutes les personnes réunies (sauf bien sûr les arrière- arrière-petits-enfants, encore en bas âge) ont eu le même nombre d’enfants.
Combien ?

Soit b le nombre d’enfants et c la longueur du carré, on doit avoir

$$1 + b + b^2 + b^3 + b^4 = c^2$$

1. Je trouve *rapidement une solution à la main* : b=3 et c=11

Je *vérifie à la calculette, qu’il n’y a pas d’autre solution* jusqu’à b=10, ce qui est raisonnable comme maximum pour b.

2. J’essaie des calculs très compliqués avec des *factorisations, des parités, des « descentes »*. Sans succès. Je trouve juste que b doit être impair.

3. Avec des *caculs modulo* 2, 4, 3, 10, je trouve juste que b doit être impair ou multiple de 4 et que c doit être congru à 1 ou 5 modulo 10.

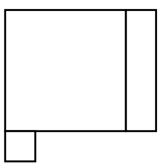
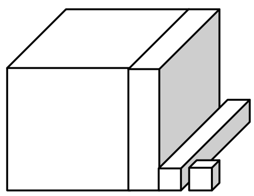
4. *J’essaie des encadrements.*
Ayant en tête que $(b+\frac{1}{2})^2 = b^2 + b+\frac{1}{4}$, c’est-à-dire est compris entre $b^2 + b$ et $b^2 + b+1$ utilisé dans un problème résolu peu de temps auparavant (problème n° 10), et en partant de $b^4 < c^2 < (b+1)^4$ ou mieux de $(b+\frac{1}{4})^4 < c^2 < (b+\frac{1}{2})^4$, et en majorant ou minorant par les entiers les plus proches, on trouve

$$b^2 + \frac{b}{2} + \frac{1}{16} = (b+\frac{1}{4})^2 < c < (b+\frac{1}{2})^2 = b^2 + b+\frac{1}{4}$$

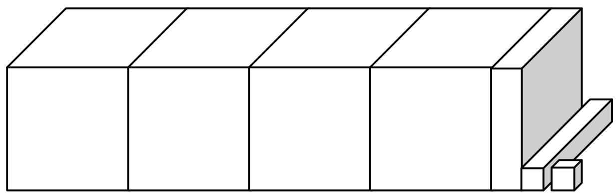
$$b^2 + \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \leq c \leq b^2 + b$$

Je cherche à mieux encadrer, avec quelque chose de la forme $(b+\frac{1}{4} + \ldots)^2$, par exemple $(b+\frac{3}{8})^2$. Ne réussissant pas, j’abandonne cette voie.

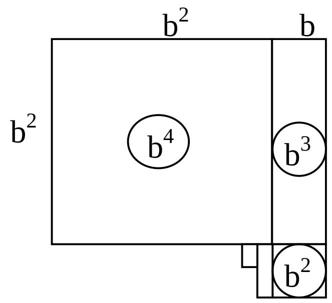
5. *J’ai alors l’idée d’un raisonnement géométrique* (en pensant à la démonstration géométrique de $\sum_{i=1}^{n}(2\,i+1) = \sum_{i=1}^{n}$ $(2i+1) = (n+1)^2$.

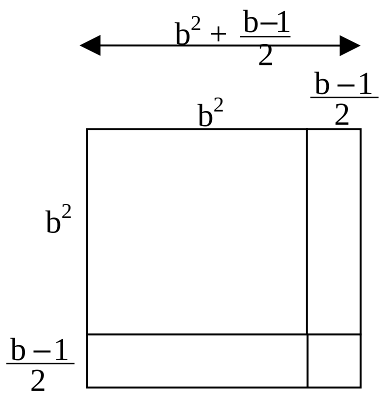
$1 + b + b^2 =$  $1 + b + b^2 + b^3 =$ 

mais pour $1 + b + b^2 + b^3 + b^4$ il faudrait une 4^{ème} dimension, ou alors dupliquer :



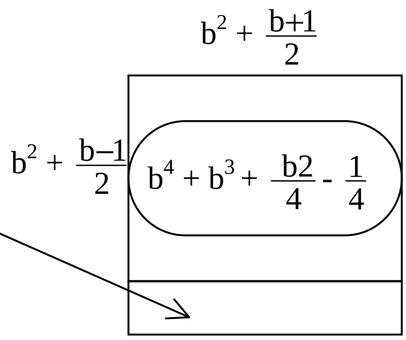
Ou alors considérer un carré de côté b^2 et le compléter.
Le rectangle $b \times b^2$ est trop grand, je le coupe en deux.





Je considère le cas ou b est impair (ce que je sais), et je prends un rectangle de côté $\frac{b-1}{2}$. Je pourrai ainsi, en complétant le carré de $b^2 + \frac{b-1}{2}$ obtenir $b^4 + b^3 - \frac{3b^2}{4} - \frac{b}{2} + \frac{1}{4}$ qui est trop petit.

Je m'intéresse au rectangle juste un peu plus grand de côtés $b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$ et $b^2 + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$. Sa surface est $b^4 + b^3 + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4}$. Il reste $\frac{3b^2}{4} + b + \frac{5}{4}$ à placer pour occuper au moins $b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$.
On en déduit que $\frac{3b^2}{4} + b + \frac{5}{4} \geq b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$
soit $b^2 - 2b - 3 \leq 0$. On trouve alors que b ne peut être que 1 ou 3. Seul 3 convient.
Si on se savait pas que b est impair, on peut faire un raisonnement analogue pour b pair avec $\frac{b}{2}$ au lieu de $\frac{b-1}{2}$ et on trouve que ne peut être que 0.



6. *Raisonnement formel*
Finalement, ce que j'ai fait, c'est simplement comparer $(b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{2})^2$ et $c^2 = b^4 + b^3 + b^2 + b + 1$
On savait dèjà que $b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{2} \leq c$. En élevant au carré, on obtient $\frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} - \frac{3}{4} \leq 0$ qui est la même inéquation que précédemment !!!

On peut même faire encore plus court :

On a $(b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{2})^2 \leq c^2 = b^4 + b^3 + b^2 + b + 1 \leq (b^2+\frac{b}{2}+1)^2$

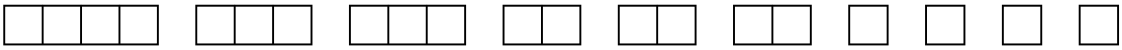
la dernière inégalité est stricte sauf si b=0

On en déduit que, si $b\neq 0$, c ne peut être égal qu'à $b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$, ce qui donne l'équation $b^2 - 2b - 3 = 0$ c'est-à-dire b=3. Sinon, b=0 et c=1, solution trivale non retenue.

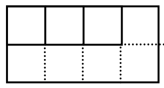
5.2. Touché-coulé (Le Monde 3 juin – Affaire de Logique – Problème n° 175)

Le jeu de bataille navale se joue sur un damier. Une flotte comporte un porte-avions (4 cases), deux cuirassés (3 cases, trois croiseurs (2 cases) et quatre sous-marins (1 case) . deux navires distincts ne peuvent se toucher, même par un coin.

Pouvez-vous, en respectant ces règles, placer deux flottes complètes dans un quadrillage de 10 cases sur 10 ?



Des *premiers essais* montrent qu'un flotte occupe la moitié du quadrillage, mais qu'on ne peut pas mettre la deuxième flotte sans toucher la première.



Rapidement, je remplace les navires de n cases par des blocs de $2\times(n+1)$ cases : La contrainte de ne pas se toucher disparaît et il faut considérer un quadrillage de 11x11.

Un rapide calcul montre que chaque flotte occupe $10+8\times2+6\times3+4\times4 = 60$ cases et qu'il faut donc placer un total de 120 cases dans un quadrillage de121 cases. Il n'y a donc qu'une case en trop !

Première idée : regarder les différentes façons d'obtenir 11 avec les longueurs et les largeurs des blocs :

11 = 5+4+2 = 5+3+3 = 5+2+2+2 = 4+3+2+2 = 3+3+3+2

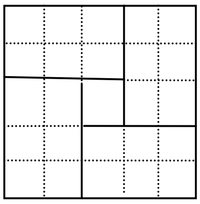
et aussi 10, qui concernera les deux lignes (horizontale et verticale) où se trouve la case vide :

10 = 5+3+2 = 4+4+2 = 3+3+2+2

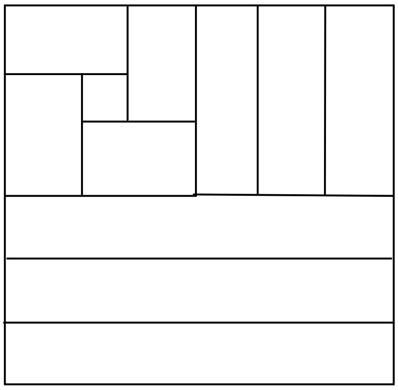
Un décompte des différentes possibilités n'est pas jugé assez contraint.

Je m'intéresse alors à la case vide (qui peut être considéré comme un bloc supplémentaire de une case à placer, il s'agit alors de recouvrir entièrement le quadrillage).

On s’aperçoit facilement qu’elle ne peut se situer ni dans un coin ni sur un bord car on ne pourrait pas l’entourer avec les autres blocs. On la met donc à distance des bords et on regarde comment on peut l’entourer. Il semble nécessaire de procéder de la façon suivante :



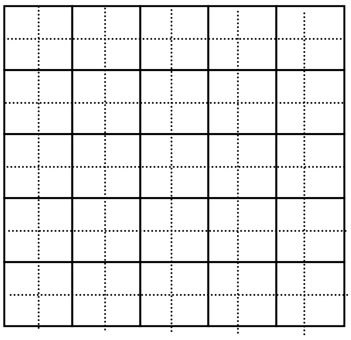
J’essaie alors de compléter ce sous-ensemble 5×5 par un quadrillage 6×6 et par un 6×11, et je m’intéresse aux blocs de 6, c’est-à-dire 4+2 ou 3+3 ou 2+2+2. J’en mets 3 dans le 6×6 et essaie de remplir des 11×2 dans le 11×6.
Je n’y arrive pas et m’aperçois que c’est impossible car je n’ai plus assez de 3. I manque toujours 1 pour obtenir 11. En effet, il faut un impair, il y a un seul 5, et je n’ai plus de 3.
Ceci est vrai quel que soit l’endroit où l’on place le 5x5, étant donné le nombre de lignes horizontales et verticales à compléter.



J’exploite alors l’idée de la parité *pour résoudre le problème de départ de la façon suivante :*
En considérant la case vide comme un bloc 1x1 à placer, il faut obtenir 22 fois la somme 11.
Les seuls impairs sont un 5 (largeur 2, 2 flottes), trois 3 (largeur 2, 2 flottes), un 1 (largeur 1, 2 sens). On ne pourra alors obtenir que 1×2×2 + 3×2×2 + 1×2 = 18 sommes impaires.
Le problème est donc impossible.

L’idée, simple et puissante, de la parité n’est pas venue tout de suite, mais en travaillant sur un sous-ensemble de blocs à placer, celui-ci étant un sous-problème du problème initial, issu d’un premier raisonnement finalement inutile.

La solution du Monde est beaucoup plus élégante :
Elle est également plus simple en un certain sens puisqu’on reste sur une grille 10×10 et qu’on raisonne sur les bateaux de n cases et non sur des blocs de 2×(n+1) cases.
« Si on divise la grille en 25 carrés de deux cases sur deux, on remarque qu’aucun de ces carrés ne peut abriter d’éléments provenant de deux navires différents. Les porte-avions et les cuirassés des deux flottes occupent chacun, dans le meilleur des cas, deux de ces carrés, ce qui en mobilise au moins 12. Les 14



autres bateaux en mobilisent au moins un chacun. D’où la nécessité de 26 carrés pour 25 disponibles. »

5.3. Zigzag numérique (Le Monde 4 avril – Affaire de Logique – Problème n° 166)

Avec les chiffres de 1 à 6, on peut fabriquer des nombres « zigzag ». Ces nombres, que nous appellerons des « 6-zigzags », ont 6 chiffres qui vont d’abord croissant, puis décroissant, puis croissant …
Par exemple, 231546 est un « 6-zigzag ».
Combien existe-t-il de « zigzags » ?
Pour les spécialistes. On peut étendre le problème aux suites « zigzag » des n premiers nombres entiers : les nombres vont d’abord croissant, puis décroissant, puis croissant …
Sauriez-vous construire un algorithme permettant de les dénombrer ?

Enumération des 6-zigzags.
Je remarque que l’on retrouve des sous-ensembles de 4-zigzags (à un renommage près).
Je recommence en utilisant explicitement les 4-zigzags et je corrige une erreur.
Je cherche les 5-zigzags, je les utilise pour les 6 zigzags, et je corrige une autre erreur.

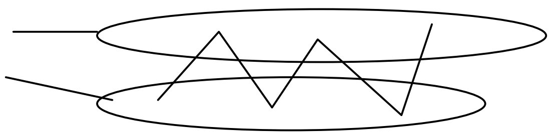
Soit a_n le nombre de n-zigzags, on a
$a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 16$, $a_6 = 61$

Cas général, que signifie un algorithme ? Une relation de récurrence ? Je ne vois rien d’autre.

En *regardant la construction* pour n=5 et 6, je trouve, en regardant les zigzags commençant par 1, 2, …, n-1
$a_5 = a_4 + a_4 + (a_3 + a_3) + a_3 = a_4 + a_4 + (a_4 - a_2) + a_3 = 16$
$a_6 = a_5 + a_5 + (a_4 + a_4 + a_3 + a_3) + 2\, a_4 + a_4 = a_5 + a_5 + (a_5 - a_3) + 2\, a_4 + a_4 = 61$
$a_7 = a_6 + a_6 + (a_6 - a_4) + \boxed{??????} + 2\, a_5 + a_5$
Je n’arrive pas à généraliser.

Nouvelle idée : je m’intéresse aux couples mal placés. Non généralisable.

Nouvelle idée : regarder ce qui est « en haut »
et « en bas »



après un raisonnement facile pour n= 4 et 5,

et avec les remarques suivantes pour n=6 :
- 123 en bas et 456 en haut : $(3\,!)^2 = 36$ possibilités
- on ne peut pas avoir deux parmi 123 en haut, ni deux parmi 456 en bas
- si un parmi 123 en haut alors un parmi 456 en bas
- 6 ne peut pas être en bas
- si 5 en bas, il ne peut être qu'à gauche, car seul 6 est plus grand que lui, il reste 1234 à placer, soit $a_4 = 5$ possibilités
- si 4 en bas ou bien à gauche et le suivant est 5 ou 6, et dans chaque cas, $a_4 = 5$ possibilités
ou bien au milieu, entouré de 5 et 6 (2 possibilités) et il reste 123 à placer
soit 3 à gauche, $a_3 = 2$ possibilités
soit 1 à gauche et 2 à droite, 3*1 = 3 possibilités

Au total 36 + 5 + 2*5 + 2*(2+3) = 61
Difficilement généralisable, pour n=7, ça devrait encore aller, mais pour n=8, par exemple, si 5 est en bas, il faut envisager deux parmi 678 à côté. Pour n plus grand, ce sera encore pire.

Enfin une bonne idée : plutôt que de s'intéresser à ce qui pourrait être en haut ou en bas, regarder ce qui est nécessairement en haut, soit 6, et remplir à gauche et à droite par 12345 :
- si 6 est le $2^{ème}$, un quelconque parmi 12345 à gauche (5 possibilités) et une 4-zigzag à droite avec ce qui reste (a_4=5 possibilités), soit 5*5 = 25 possibilités
- si 6 est le $4^{ème}$, deux parmi 12345 à droite (C_5^2 = 10 possibilités) et une 3-zigzag à droite avec ce qui reste (a_3=2 possibilités), soit 10*2=20 possibilités
- si 6 est le $6^{ème}$, a_5=16 possibilités pour le reste

Soit au total 25 + 20 + 16 = 61 possibilités, $a_6 = C_5^1 a_1 a_4 + C_5^3 a_3 a_2 + C_5^5 a_5 a_0$
Et c'est facilement généralisable :
$$a_n = \sum_{i=1 \text{par pas de} 2} C_{n-i}^{i} a_i a_{n-i-1}$$
soit, pour n=7, $a_7 = C_6^1 a_1 a_5 + C_6^3 a_3 a_3 + C_6^5 a_5 a_1 = 6*1*16+20*2*2+6*16*1 = 272$

L'algorithme du Monde (c'est bien un algorithme, et pas seulement une formule, même de récurrence) :
« On construit le triangle suivant : sur la ligne n, on inscrit successivement le nombre de « n-zigzag » se terminant par 1, par 2, par 3, … par n.
Pour n=1 1
Pour n=2 0 1
Pour n=3 1 1 0
Pour n=4 0 1 2 2
On obtient chaque nombre de la ligne 5 en ajoutant tous les nombres de la ligne 4 qui se trouvent à sa droite :
Pour n=5 5 5 4 2 0

En effet, il y a autant de « 5-zigzag » se terminant par 1 que de « 4-zigzag » (en décalant les chiffres d'une unité). Il y a autant de « 5-zigzag » se terminant par 2 que de « 4-zigzag » se terminant pat 2, 3 ou 4 (en décalant les chiffres à partir de 2 d'une unité), etc.
De même, on obtient chaque nombre de la ligne 6 en ajoutant tous les nombres de la ligne 5 qui se trouvent cette fois à sa gauche :

Pour n=6	0	5	10	14	16	16

Le total de la sixième ligne vaut bien 61.
Plus généralement, si n est impair, la ligne se termine par 0 ; et, si n est pair, elle commence par 0.
On obtient les nombres de la ligne n+1 en ajoutant successivement et alternativement, de droite à gauche, puis de gauche à droite, les nombres de l ligne n. »

Algorithmique astucieux ! Comment en avoir eu l'idée ?

6. Peut-on compter sur la mémoire ?

On verra deux exemples où la mémoire a immédiatement permis de résoudre le problème, soit par réflexe, soit parce que la solution repose sur une idée se trouvant dans un travail particulièrement intéressant dont je me souvenais très bien. Dans un autre exemple, la mémoire n'a servi à rien parce que je n'avais pas moi-même trouvé la bonne idée dans le passé et que les points clés n'avaient pas été dégagés. Maintenant que j'ai résolu moi-même, avec difficulté, ce problème, je pense que je me souviendrai longtemps des points clés.

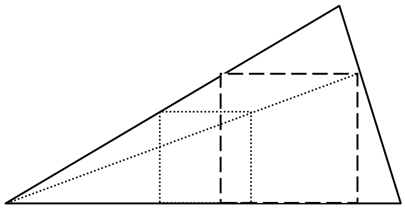
6.1. Le carré inscrit (Le Monde 28 mars – Affaire de Logique – Problème n° 165)

Il n'y a qu'une façon d'inscrire un carré dans un triangle ABC de telle sorte que deux des sommets soient sur AB, un troisième sur AC et le quatrième sur BC.
Sauriez-vous tracer un tel carré à l'aide d'une construction géométrique simple ?

Je me souviens immédiatement que c'est un problème de construction résolu par le programme de la thèse de [Buthion, 1975][3] au moyen d'une méthode très intéressante utilisant les transformations géométriques et en particulier l'homothétie.

[3] 3000 instructions Fortran, 68 règles, plusieurs modules spécialisés dont un module « homothétie », 141 problèmes proposés, 119 succès

On dessine un carré respectant les contraintes sauf une : un des sommets du carré n'est pas sur le triangle. Par une homothétie, dont il faut trouver le centre et le rapport, on transforme ce carré dans le carré cherché.

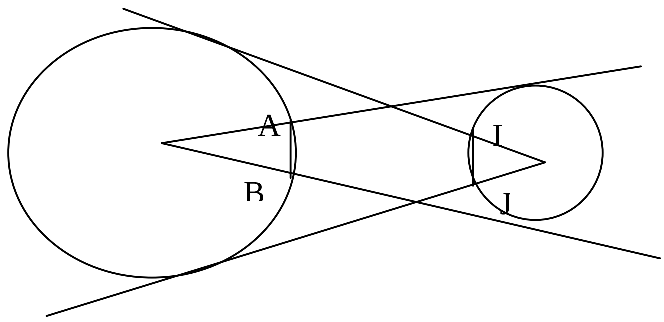


La raison pour laquelle je m'en souviens si bien tient sans doute au fait que j'ai été impressionnée par le travail de Michel Buthion et en particulier par ses idées sur le transformations géométriques et l'implémentation de cette méthode.

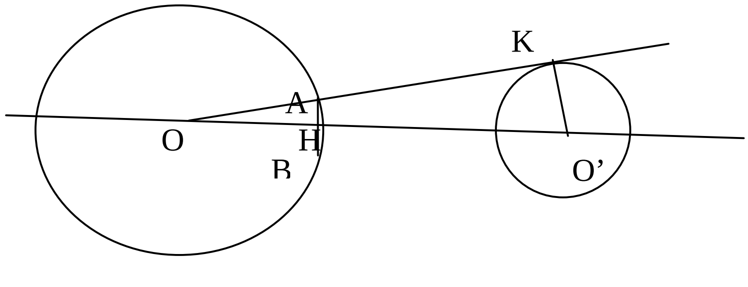
La solution du Monde est la même, mais exprimée en termes beaucoup plus élémentaires, et certainement moins facile à trouver directement, et moins facile à mémoriser.

6.2. Des sous ! des sous ! (Le Monde 28 mars – Affaire de Logique – Problème n° 164)

Placez sur un papier une pièce de 5 francs et, un peu plus loin, une pièce de 10 centimes.
Menez du centre de la grande pièce deux tangentes à la petite, et du centre de la petite deux tangentes à la grande, comme sur le dessin.
Il semblerait que les longueurs des segments verticaux AB et IJ soient égales, est-ce vrai ?



Je *vois* immédiatement les deux triangles semblables : OHA et OKO', d'où l'on déduit facilement que AB = $\frac{R \times R'}{OO'}$. Idem pour IJ.



*Ici, il s'est agi d'un **réflexe**.*

6.3. La fausse pièce (Le Monde 25 janvier – Affaire de Logique – Problème n° 156)

Vous disposez d'une balance à deux plateaux et de douze pièces d'aspect identique. Onze sont d'authentiques pièces de collection, la dernière n'est qu'une imitation, si bien faite qu'elle a le même aspect que les autres. Heureusement, sa masse diffère légèrement de celle des vraies pièces, mais vous ignorez si elle est plus lourde ou plus légère. Comment, en un minimum de pesées, démasquer la fausse pièce et dire si elle set plus lourde ou plus légère ?

et **http://www710.univ-lyon1.fr/~fouet/Dir_lic_mai/TP/puzzles.html**

On a douze pièces, onze bonnes et une fausse, et une balance (une balance qui indique équilibre ou déséquilibre, pas qui donne une mesure). La fausse pièce est plus lourde ou plus légère que les vraies. En trois pesées, déterminer la fausse pièce et dire si elle est plus lourde ou plus légère.

L'énoncé de Jean-Marc Fouet comporte de plus en note de bas de page : « Ce problème est très dur, il n'y a, à ma connaissance, pas d'astuce pour le résoudre. Ma solution prend deux pages, c'est pourquoi je ne vous propose pas de zone pour donner la vôtre. Mais, même si vous ne trouvez pas, je pense que le fait d'y réfléchir est bon pour les neurones »

J'avais cherché à résoudre le problème du Monde quelques mois avant de trouver le texte de Jean-Marc sur sa page Web. Je n'avais trouvé pas trouvé mieux que 4 pesées pour démasquer la fausse pièce, sans pouvoir dire, dans tous les cas, dire si la pièce est plus lourde ou plus légère (une pesée supplémentaire serait alors parfois nécessaire).
Mon raisonnement procédait simplement par dichotomie :
1- on laisse la moitié (6) et on met sur chaque plateau de la balance la moitié (3) de l'autre moitié, soit notation 3↑3 + 6. Selon qu'il y a équilibre ou non, la fausse pièce se trouve dans une des moitiés (6 billes), l'autre moitié est bonne.
2- on recommence avec 2↑2 +2 ou 1↑1 + 4
3- puis avec 1↑1 + 2
4- enfin, on pèse une des billes du paquet de 2 dans lequel on sait que se trouve la fausse pièce avec une bonne pièce. Si c'est elle, on sait de plus si elle est plus lourde ou plus légère. Si non, on sait que c'est l'autre sans savoir si elle est plus lourde ou plus légère, il faut une 5ème pesée pour conclure.

Ce raisonnement marcherait aussi pour16 billes. On a l'impression qu'avec seulement 12, on pourrait faire mieux, et surtout, on n'exploite pas l'information recueillie en cas de déséquilibre : d'un côté, il ne peut y avoir qu'une plus lourde, de l'autre qu'une plus légère. D'où une idée qui semble meilleure : un tiers sur chaque plateau et un tiers restant : 4↑4 +4.

S’il y a équilibre, on ramené au problème pour 4 et on démasque la fausse pièce en 2 pesées, sinon on doit considérer le problème pour 8 pièces, mais en sachant qu’on a une lourde parmi 4 ou 1 légère parmi 4 autres.
Néanmoins je n’avais pas pu faire mieux.

Le Monde donnait une solution en 3 pesées et je me souvenais que je l’avais trouvée compliquée. Je ne me souvenais pas si je l’avais analysée (ou si j’avais remis l’analyse à plus tard et oubliée). Je ne me souvenais pas si l’on pouvait conclure à coup sûr si la fausse pièce était lourde ou légère. Et je ne me souvenais absolument pas de la dite solution.

J’ai donc recommencé une recherche, avec cependant les informations suivantes :
- il y a une solution en 3 pesées
- on peut conclure sur le sens de l’erreur
- la solution de JMF comporte certainement une part de combinatoire.

Je démarre avec 4↑4 +4 et j’utilise la notation suivante :
+ : bille qui ne peut être que bonne ou trop lourde,
- : bille qui ne peut être que bonne ou trop légère,
? : bille dont on ne sait rien,
b : bonne bille.

Cette première pesée conduit donc à bbbbbbbb ???? ou bien à ++++----bbbb. Pensant que le premier cas est résolu, je m’intéresse au deuxième et j’essaie de mélanger, par exemple, peser ++-- ↑ ++--.
Divers essais infructueux.

Combinatoire me conduit à réfléchir à un algorithme que l’on pourrait, avec quelques heuristiques, développer à la main.
Qu’est-ce que je ferais si je devais écrire un programme ? Je l’écrirais récursif avec comme paramètres le nombre de +, de -, de ? et de b. Il faudrait alors écrire
- une descente,
- un arrêt.

La descente ne me semble pas simple, du moins si on imagine qu’on l’exécutera à la main.
Je cherche plutôt l’arrêt (on a une seule bille + ou une seule -), ou juste avant l’arrêt. Je cherche les situations où l’on peut conclure en une seule pesée ? Je trouve ++, +-, --, ?-, à condition qu’il y ait au moins un b. Je trouve aussi ++- et +--, à condition qu’il y ait au moins 2b (on pèse +- ↑ bb ; je trouverai mieux plus tard, sans utiliser de b : +↑+).
J’ai alors la solution pour le cas ++++---- ($1^{\text{ère}}$ pesée en déséquilibre) :
en effet, on pèse alors ($2^{\text{ème}}$ pesée) ++- ↑ ++-

- si équilibre, il reste +- qui est résolu en une $3^{\text{ème}}$ pesée

- sinon, on a ++- ou qui est aussi résolu en une 3ème pesée

Je crois avoir terminé, mais je m'aperçois que l'autre cas après la 1ère pesée (4 ?), j'avais la mauvaise pièce, mais pas toujours le sens de l'erreur, en faisant
2ème pesée : ? ↑ ?

- si déséquilibre, on a +- qui est résolu en une 3ème pesée
- mais sinon, on a ?? qui, en une pesée ne donne que la pièce (pas toujours le sens de l'erreur).

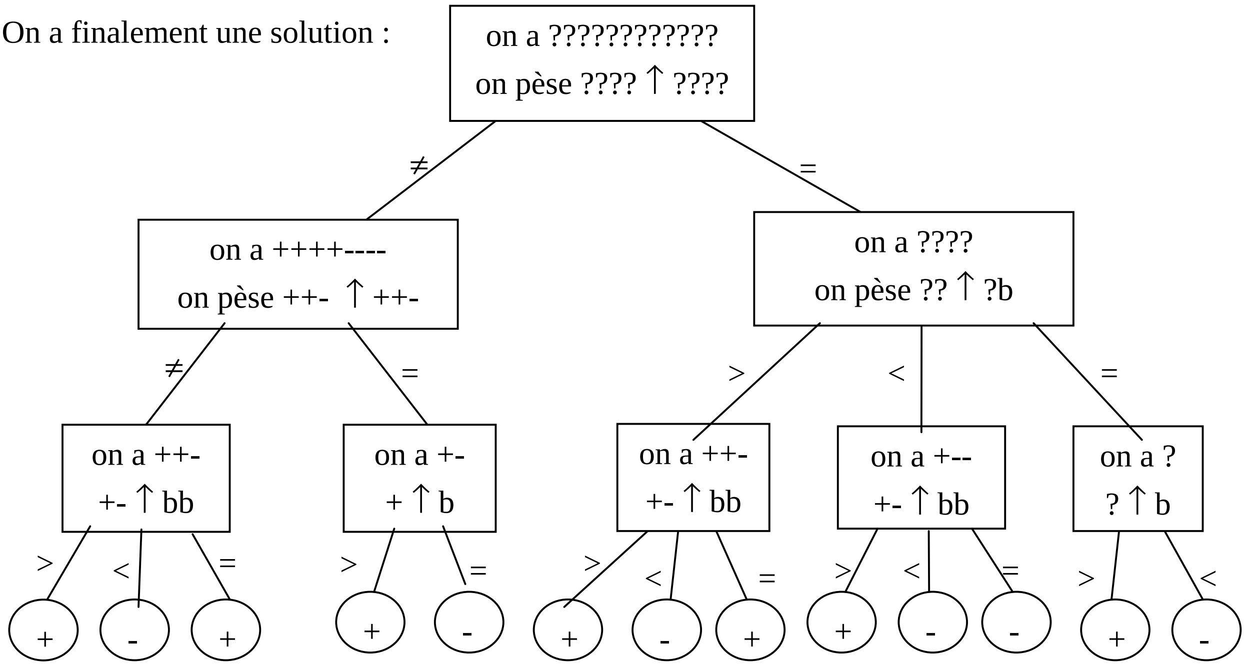
Je cherche les situations où l'on peut en 2 pesées ? J'essaie +++-- en pesant ++- ↑ bbb. Ca marche.
J'essaie ++++--- en pesant +++-- ↑ bbbbb, mais de toute façon, on n'a pas 5b après la première pesée ci-dessus.

Je remarque qu'en cas d'équilibre aux deux premières pesées, il faut qu'il ne reste qu'un ?, sinon, on ne peut pas conclure.
Je fais alors des essais infructueux en commençant par la première pesée 5 ↑ 5 + 2, car alors c'est l'autre cas de la 1ère pesée qui ne marche plus.

Je décide alors de nouveau de remonter depuis l'arrêt en cherchant systématiquement le nombre de pesées nécessaires pour de petits ensembles de billes. En faisant cela, l'idée suivante apparaît : il faut absolument que de ????, on obtienne, au pire ++-.
?? ↑ bb ne marche pas car il reste ??
??? ↑ bbb ne marche pas, car on ne peut finir avec +++ (*Cette idée est fausse, +++ marche aussi bien que ++- en une pesée, mais peu importe pour la suite*)
Idée : prendre une sorte d'intermédiaire.
On en prend alors 3, complétés par un b, soit ?? ↑ ?b

- si équilibre, on pèse ? restant en une 3ème pesée
- sinon, on a ++- ou +-- qui est résolu en une 3ème pesée

On a finalement une solution :



Une petite précision semble nécessaire : quand on pèse ++- ↑ ++- , en cas de déséquilibre, la pièce fausse se trouve soit parmi les deux + du plateau le plus lourd, soit le – du plateau le plus léger, les trois autres pièces étant bonnes. On se retrouve donc avec ++- mais ce ne sont pas ceux d'aucun des plateaux précédents.

Les idées fortes ont été les deux suivantes :

++- *se résout en une pesée*

++- *peut être obtenu en pesant* ?? ↑ ?b

Ce sont certainement des idées dont je me souviendrai et je pourrai maintenant retrouver cette solution, même dans longtemps, contrairement à la solution du Monde. *Il est en effet plus utile et plus facile de mémoriser les points clefs d'une solution plutôt que la totalité des étapes.*

De nombreuses variantes existent, avec les mêmes idées.

Je signale également une idée qui m'a été donnée par Jean-Yves Lucas : après la première pesée concluant sur ++++---- que l'on numérote $1^+2^+3^+4^+5^-6^-7^-8^-$ on pèse bbb5^-↑ $4^+6^-7^-8^-$. On obtient ainsi des informations à la fois sur les pièces 4 et 5 qui ont été échangées et sur les pièces 123 qui ont été remplacées par bbb. Si la balance penche à gauche, on a $6^-7^-8^-$, si elle penche à droite 4^+5^{--}, s'il y a équilibre $1^+2^+3^+$.

On m'a aussi indiqué que ce problème était analysé dans [Farreny 87] qui est un livre que je pensais pourtant bien connaître, mais j'avais oublié que ce problème y figurait. Il illustre en effet le choix heuristique d'un sous-problème dans un arbre ET/OU. La théorie de l'information conduit à choisir le sous-problème qui apporte le plus d'information. Appliqué à ce problème, pour 8 pièces, les auteurs montrent que le meilleur choix au départ est de mettre

3 pièces sur chaque plateau. Cette méthode permet d’écrire un programme qui résoudra le problème pour un nombre quelconque de pièces. Et c’est certainement cette méthode qu’a appliquée Jean-Marc Fouet et qui l’a conduit à une solution longue (deux pages) mais dont on est sûr qu’elle aboutira.

7. **Déformation professionnelle** ou **Métarésolution de problème mal posé**

Dans l’exemple suivant, étonnée de trouver deux solutions, j’ai tout simplement abandonné un peu de rigueur dans l’interprétation de l’énoncé …

7.1. Enquête (Le Monde 30 mai – Affaire de Logique – Problème n° 173)

Trois malfaiteurs sont soupçonnés de meurtre. Un – et un seul – des trois est coupable. Les enquêteurs ont recueilli trois déclarations de chacun d’eux :

André : (A1) – Je suis innocent.
(A2) – D’ailleurs, à l’heure du crime, j’étais à 10 kilomètres de là avec Béatrice.
(A3) – Claude est coupable.

Béatrice : (B1) – Je suis innocente.
(B2) – André aussi.
(B3) – Mais il n’était pas avec moi à l’heure du crime.

Claude : (C1) – Je suis innocent.
(C2) – Béatrice aussi.
(C3) – André a menti trois fois.

Sachant que chacun des suspects a menti au moins une fois, qui est coupable ?

J’ai d’abord considéré que « j’étais à 10 kilomètres de là avec Béatrice » n’était pas exactement la négation de « il n’était pas avec moi à l’heure du crime » car André aurait pu être avec Béatrice à l’heure du crime, mais pas à 10 km de là.
Trouvant alors deux solutions (Béatrice ou Claude coupable), j’en ai conclu que mon interprétation n’était pas la bonne. non(A2) entraîne (B3) et Béatrice est coupable.
C’est la solution du Monde et cela était également clair pour d’autres lecteurs de mon entourage …

8. Autres problèmes

Le premier de ces problèmes montre que, quand on est très savant, on résout facilement les problèmes théoriquement, mais qu'avec un peu de ténacité on le résout concrètement. Les deux suivants sont des problèmes combinatoires pour lesquels des techniques type ALICE donnent de bons résultats. Néanmoins dans le problème de crypt-arithmétique, il est utile de ne pas se contenter d'écrire les équations entre les chiffres mais de considérer aussi les entiers. Enfin, le dernier problème conduit à une réflexion sur la répartition des nombres qui m'a étonnée.

8.1. Préfixes pour puissances (Le Monde 22 février – Affaire de Logique – Problème n° 160)

En multipliant le chiffre 2 par lui-même un certain nombre de fois, on obtient une puissance de 2, qui s'écrit avec un « 2 », suivi, en exposant, de ce nombre de fois. Ainsi, les premières puissances de 2 sont : $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, … Une puissance de 2 peut-elle commencer par le chiffre 7 ? Et par les quatre chiffres 2 0 0 0 ?

Je pense d'abord que non …

Je *remplace 7 par $2^3 – 1$* et j'écris $(2^3 – 1) \times 10^n + a = 2^p$

De *nombreuses manipulations* (regroupement des puissances de 2, factorisations, log) ne donnent rien.

Je regarde les premiers : 1248 / 136 / 125 / 1248 / 136 / 125 / … . Ca semble recommencer toujours.

Avec une calculette, je trouve $\mathbf{2^{46} = 7.0368 \times 10^{13}}$ (C'est faisable à la main.)

Pour 2000, je divise successivement par 2 :

```
2000[1-9]…
1000[0-4]…
 500[0-2]…
 250[0-1]…
 1250[0-9]…
  625[0-4]…
```

```
312[5-7]…
156[2-3]…
 781…
```

D’où, s’il y a une solution, elle sera obtenue en multipliant une solution au problème précédent par 2^8. Je vais plutôt m’intéresser à 1000[0-4]… . Je multiplie 2^{46} par 2^7.
2^{53} = 900… est trop « petit » . Je vais multiplier les nombres obtenus par des nombres un peu « grands » ou un peu plus « petits » que 1000…. Pour commencer, on connaît 2^{10}=1024 et 2^{53} = 900…
On obtient ainsi

- $2^{53} = 900,7199\ldots \times 10^{13}$ trop petit
- $2^{103} = 1014,120\ldots \times 10^{28}$ trop grand
- $2^{196} = 1004,336\ldots \times 10^{56}$ trop grand
- $2^{289} = 994,6464\ldots \times 10^{84}$ trop petit
- $2^{485} = 998,959\ldots \times 10^{143}$ trop petit
- $2^{681} = 1003,2905\ldots \times 10^{202}$ trop grand
- $2^{1166} = 1002,246\ldots \times 10^{351}$ trop grand
- $2^{1651} = 1001,2026\ldots \times 10^{497}$ trop grand
- $2^{2136} = 1000,16041\ldots \times 10^{643}$ OK

D’où $2^{2136} = 2000,32.\ldots \times 10^{643}$

Remarques :
- les calculs ont été faits avec une calculette (sans les puissances de 10, bien sûr), mais ils sont faisables à la main
- je n’étais pas assurée d’arriver à une solution en un temps (manuel) raisonnable
- le problème pour 7 aurait pu être résolu par la même méthode en partant de 8 et en multipliant par 1024, etc.

Solution du Monde :
Pour 7, les auteurs partent de 64 et multiplie 4 fois par 1024. On a la solution.
Pour 2000, ils se contentent de dire que la réponse est “oui, mais la justification n’est pas simple, elle fait appel à un “passage” aux logarithmes décimaux : on montre qu’il existe deux

entiers K et n tels que K ≤ n log 2 < K+ log(1,005). C'est parce que log 2 n'est pas un nombre fractionnaire que c'est toujours possible". Alors "$2 \times 10^K \leq 2^{n+1} < 2001 \times 10^{K-3}$ c'est-à-dire 2n+1 commence par 2000.

Le théorème, plus général, auquel il est fait allusion est le suivant :
Pour tout réel r, pour tout ε il existe des entiers m et n tels que n ≤ m r < n + ε , c'est-à-dire
$\frac{n}{m} \leq r < \frac{n}{m} + \frac{\varepsilon}{n}$
Je connais et je sais démontrer que $\frac{n}{m} \leq r < \frac{n}{m} + \varepsilon$ mais ici, le ε dépend du dénominateur (il diminue au fur et à mesure que le dénominateur augmente !) et je n'arrive pas à démontrer ce résultat.
J'interroge des mathématiciens de mon UFR. Plusieurs "… ne voient pas comme ça, sans réfléchir …". Enfin deux mathématiciens entament un dialogue que l'on peut résuler ainsi :
- oui, et ça marche même avec $\frac{1}{n^2}$
- oui, mais pas avec ε quelconque
- ça se fait avec des fractions continues
- c'est le théorème de Hurvitz, on le trouve dans "Solutions to the theory of numbers" par Hardy Right
- pour $\frac{1}{n^2}$, c'est $\frac{\sqrt{5}}{n^2}$ (ça vient des fractions continues)
L'un d'eux se décide à s'intéresser à *mon* problème, plus simple.
On considère l'ensemble {E(n r)| n ∈ N} qui est inclus dans [0,1[où E(x) est la partie entière de x. Cet ensemble est discret ou i nfini. On divise [0,1[en intervalles de longueur < ε. Alors il existe deux entiers différents m_1 et m_2 tels que $E(m_1 r)$ et $E(m_2 r)$ appartiennent au même intervalle, soit $0 \leq E(m_1 r) - E(m2\ r) < \varepsilon$
Il existe alors n_1 et n_2 tels que $0 \leq (m_1 r - n_1) - (m_2 r - n_2) < \varepsilon$
Et on a le résultat en prenant $m=m_1-m_2$ et $n=n_1-n_2$
Remarque : j'avais eu l'idée de prendre les parties fractionnaires de n r, mais je voulais à tout prix les faire se rapprocher directement de 0. Ici on prend la différence de deux proches.

8.2. Une multiplication (Jeux mathématiques – ½ finales 2000)

Dans cette multiplication, le chiffre 7 apparaît une fois et une seule. Ainsi, chaque étoile (*) représente un chiffre de 0 à 9 différent de 7 . De plus l'écriture d'aucun nombre ne commence par 0.
Quel en est le résultat ?

					*	*	*	*
			×		*	*	7	*
				*	*	*	*	*
				*	*	*	*	
		*	*	*	*			
=	*	*	*	*	*	*	*	*

Des techniques, type ALICE, conduisent rapidement à la solution.
Mais … il y a beaucoup de chiffres inutiles, je fais plutôt intervenir, dans les inégalités, le premier nombre (entier) et les résultats intermédiaires (entiers) des multiplications, en utilisant leurs nombres de chiffres

8.3. Le carnet de timbres (Jeux mathématiques – ½ finales 2000)

Il est possible d'obtenir toutes les sommes entières de 1 à 36 en découpant un ou plusieurs timbres dans un carnet de timbres rectangulaire de deux timbres sur trois portant les valeurs 1, 2, 3, 5, 8 et 17, les timbres restant formant toujours un ensemble d'un seul tenant.
Pouvez-vous reconstituer ce carnet en plaçant la plus petite des quatre valeurs de coin en haut et à gauche ?
L'exemple de la figure ci-dessous ne convient pas car il est impossible d'obtenir les sommes 7, 10, 12, 15, 24, 27 et 32.

1	2	3
5	8	17

Résolu de manière combinatoire et après pas mal de cafouillages … . (J'ai même à, plusieurs reprises, cru que le problème était impossible).

On énumère les nombres, autres que 1, 2, 3, 5, 8, 17
- qui ne peuvent s'obtenir que d'une seule façon, 4=1+3, 7=2+5, 12=1+3+8, 15=2+5+8 et les « complémentaires » : 32, 29, 24
- qui peuvent s'obtenir de deux façons : 6=1+2+3=1+5, 9=1+3+5=1+8, 10=2+6=2+3+5, 13=2+3+8=5+8, 14, 16, 17, 18, et les « complémentaires »
- qui peuvent s'obtenir de trois façons : 11

Remarques qui n'ont été faites qu'après un long moment de recherche :
- pour les ensembles de décomposition unique, il faut que l'ensemble *et* son complémentaire soient connexes
- pour les autres, il suffit qu'un des ensembles soit connexe et que le complémentaire d'un ensemble (le même ou un autre) le soit aussi, sauf pour 18 (égal à son complémentaire), pour le quel il suffit qu'un des ensembles ou son complémentaire soit connexe.

8.4. Les sauts (A partir d'un sujet d'examen)

> Les étudiants de DEUG de Paris 5 ont eu à répondre à cette question à leur examen d' « Initiation à la programmation » :
> « On considère la fonction entière $f(n) = [n+\sqrt{n} + ½]$ où [ ] désigne la partie entière.
> Pour tout entier a, si l'entier n parcourt l'intervalle $[1, a^2]$, f(n) atteint a^2+a en sautant exactement a entiers.
> Ecrire un programme Pascal qui demande à l'utilisateur de fournir une valeur de a et affiche les valeurs entières que f(n) ne prend pas. »
>
> Pourriez-vous déterminer les valeurs « sautées » par la fonction f(n) directement par un raisonnement mathématique ?

On trouve facilement que les valeurs sautées sont tous les carrés.
On trouve, moins facilement, que le saut a lieu pour le passage de p^2+p à p^2+p+1.
Je n'ai pas gardé de protocole de la recherche, mais un idée fausse sur la répartition des racines carrées des nombres compris en p^2 et $(p+1)^2$ m'a beaucoup gênée. Je pensais naïvement, à cause de l'image mentale de la courbe $\sqrt{x}$ qu'il y en avait beaucoup plus dont la partie décimale était supérieure à ½ que inférieure.
On a en effet les variations suivantes, en considérant les nombres de la forme $n= p^2 + a$ compris entre p^2 et $(p+1)^2$ et en remarquant que $[\sqrt{n} + ½]$ est l'arrondi à l'entier le plus proche de $\sqrt{n} + ½$:

a	0	$\nearrow$	p	$\nearrow$	p+1/4	$\nearrow$	p+1		2 p +1
n	p^2	$\nearrow$	p^2+p	$\nearrow$	$(p+1/2)^2$	$\nearrow$	p^2+p+1	$\nearrow$	$(p+1)^2$
$\sqrt{n}$	p	$\nearrow$			p+1/2	$\nearrow$			p+1
$[\sqrt{n} + ½]$	p	$\rightarrow$	p	$\nearrow$	p+1	$\rightarrow$	p+1	$\rightarrow$	p+1

On constate qu’il y a p nombres entiers dont la partie décimale est inférieure à ½ et autant dont la partie décimale est supérieure à ½. Si on considère les nombres réels, il y en a plus dont la partie décimale est supérieure à ½, mais par beaucoup, le rapport est en effet égal à $\frac{p + 3/4}{p - 1/4} = 1 + \frac{2}{4p+1}$. S’il y en a 3 fois plus entre 0 et 1 et 40% de plus entre 1 et 4, il y en a déjà moins de 10% en plus entre 25 et 36. Cela veut dire que la courbe ressemble très vite à une droite.
Ces remarques conduisent alors rapidement à une solution rapide du problème (mais elle n’a été obtenue qu’après plusieurs autres plus laborieuses).

a	0	$\nearrow$	p	$\nearrow$	p+1	$\nearrow$	2 p +1
n	p^2	$\nearrow$	p^2+p	$\nearrow$	p^2+p+1	$\nearrow$	$(p+1)^2$
$\sqrt{n}$	p	$\longrightarrow$					p+1
$[\sqrt{n} + ½]$	p	$\rightarrow$	p	$\nearrow$	p+1	$\rightarrow$	p+1
$[n+\sqrt{n} + ½]$	p^2+p	$\nearrow$	$p^2+ 2\,p$	$\nearrow$	p^2+2p+2		$(p+1)^2+p+1$

On constate que l’on saute $p^2+ 2\,p + 1 = (p+1)^2$

9. Conclusion

Ces analyses mettent en évidence que les problèmes ont rarement été résolus directement mais la plupart du temps après de nombreux essais, tâtonnements, dessins, cas particuliers. La rigueur dans le détail n’est pas indispensable dans un premier temps. Ce qui est important par contre, c’est de manipuler les objets mathématiques, et une idée, même inexacte, permet de manipuler, donc de progresser.

On voit aussi qu’entre le plus court chemin vers la solution et des impasses sans espoir, il y a des raisonnements inutilement compliqués qui permettent aussi d’aboutir. Une fois la solution trouvée, il est serait alors aisé de trouver la justification la plus simple et la plus élégante, telle que celle que l’on trouve dans les livres. Actuellement, les systèmes d’intelligence artificielle cherchent à aller droit au but, ou au moins le plus directement possible. Peut-être serait-il nécessaire, pour les faire progresser, de leur apprendre à naviguer parmi les idées fausses et les chemins détournés.

L’étourderie est le propre de l’homme. C’est un défaut que les machines n’ont pas. Nous avons quelquefois des difficultés parce que nous sommes trop savants et nous ne voyons pas les choses simples. Pour le moment, les machines peuvent nous surpasser dans ces situations. Mais, le jour où elles seront aussi savantes que nous, elles auront sans doute les mêmes difficultés.

Enfin, en dehors des domaines pour lesquels nous sommes devenus experts, nous ne pouvons nous souvenir longtemps que de ce qui nous a marqué, en particulier de ce qui nous a semblé très important ou particulièrement intéressant. Le souvenir de quelques points clés est plus utile que la mémorisation d'un grand nombre d'étapes. Même si les capacités mémoire d'une machine sont sans commune mesure avec les nôtres, il faudrait apprendre aux systèmes d'intelligence artificielle à dégager les points importants des raisonnements.

10. Références

[Farreny 87] Farreny H., Ghallab M., Eléments d'intelligence artificielle, Hermès 1987

[Pastre 78] Pastre D., Observation du mathématicien: aide à l'enseignement et à la démonstration automatique de théorèmes, Educational Studies in Mathematics 9 (1978), 461-502

[Chi 81] Chi M., Feltovitch P., Glaser R., caracterization and represdntation of physics problems by experts and novices, Cognitive Science 5 (1981), 121-152

[Pitrat 99] Pitrat J., Monitorer la recherche d'une solution, Colloque Intelligence Artificielle Berder 1999 et rapport de recherche LIP6 2000/002, 3-15

[Schoenfeld 85] Schoenfeld A., Mathematical Problem Solving, Academic Press, 1985