RESOLUTION DE PROBLEMES

REPRESENTATIONS

I - INTRODUCTION

1. Qu'est-ce qu'un problème ?

On a un problème quand :
- on se trouve dans une certaine situation,
- on a un but à atteindre,
- on ne voit pas immédiatement la suite d'actions à accomplir pour atteindre ce but, c'est à dire **résoudre le problème**.

2. Exemples

Trouver à Paris 5 la salle 530
704 J
705 D5
Aller au sommet du Mont Blanc
du K2
Trouver la longueur de la diagonale d'un carré
d'une circonférence
Traduire un texte anglais en français
Démontrer un théorème
Faire un diagnostic
Trouver le plus court chemin d'un point à un autre (Exemple : aller du secrétariat de l'UFR à la bibliothèque)
Gagner une partie d'échecs

3. Comment procéder ?

Ceci a été analysé dans un livre célèbre de Polya, "How to solve it" en 1957, traduit sous le titre "Comment poser et résoudre un problème".

Il faut :
- comprendre le problème;
- concevoir un plan - trouver un rapport entre les données (la situation) et l'inconnue (le but),
  - considérer éventuellement des problèmes auxiliaires;
- mettre le plan à exécution;
- examiner la solution.

Tout est lié aux problèmes de représentations.

4. Représentations

- de l'énoncé du problème (description);
- du problème (changements de représentation);
- des objets manipulés.

Outre le problème, il faut connaître (décrire ?) l'univers de recherche et les opérations permises.

Les exemples de représentations qui suivent illustrent le fait qu'un problème peut devenir facile à résoudre si on utilise une "bonne" représentation, alors que *théoriquement*, c'est le même problème.

II - LANGAGE NATUREL

Tout le monde le comprend, ou pense le comprendre, avec certaines limites, mais il est :

1. incomplet

Une grande partie de l'information est implicite ou supposée connue (exemples plus haut).

En général, les interlocuteurs sont supposés posséder une même connaissance du sujet, mais une interprétation erronée est possible.

Exemples :

- sujets d'examen;
- petits problèmes de *casse-tête* :

a) Former quatre triangles équilatéraux avec six allumettes.
Pour trouver une solution, il faut lever une des contraintes implicites erronées :
  - la longueur des côtés est égale à celle des allumettes,
  - rester dans le plan.

b) Passer par chacun des neuf points suivants, en traçant au plus quatre segments de droite, sans lever le crayon.
La contrainte erronée est de rester à l'intérieur.

. . .
. . .
. . .

c) Histoire du *Roi Cruel* (cité par E.de Bono dans "La Pensée Latérale")
Un Roi veut épouser une jeune fille qui refuse. Il la met d'abord au cachot, puis trouve cette ruse : il va prendre deux cailloux, un noir et un blanc; elle devra en choisir un; si c'est le blanc, elle sera libre; si c'est le noir, elle devra se marier. La jeune fille voit que le roi choisit deux noirs. Que peut-elle faire pour être libre ?
La solution consiste à élargir l'univers de recherche : elle prend un caillou, le laisse tomber, c'est donc l'autre caillou qui permet de décider.
La contrainte supprimée par la jeune fille est de faire exactement ce qu'on lui a dit de faire.

2. redondant

Ceci peut être utile pour insister sur des points importants. Mais quelquefois, les vraies difficultés ne sont pas là.

3. ambigu

En général, on est capable de lever l'ambiguïté.

4. incorrect

On comprend quand même.

5. encombré d'informations inutiles

Exemple de l'autobus.

III - LANGAGE MATHEMATIQUE

Il permet la formalisation d'un problème. Mais on ne peut pas tout formaliser, car cela devient illisible et incompréhensible.

Polya oppose la "preuve incomplète" à l'"exposé euclidien".

La preuve incomplète consiste à "communiquer un raisonnement à quelqu'un qui n'en a jamais entendu parler", "mettre l'accent sur les articulations essentielles du raisonnement", "percevoir la source, le but, le lien de l'ensemble".

L'exposé euclidien consiste à "examiner le raisonnement en détail", "souligner chaque point particulier", vérifier "la correction de chaque étape".

En mathématiques, on peut comprendre toutes les étapes d'une démonstration sans avoir rien compris à l'ensemble. Plus le niveau d'un mathématicien est élevé, moins il a besoin de détails, et meilleure est sa compréhension.

Le langage mathématique est une bonne représentation de l'énoncé d'un problème, de sa solution, mais non des méthodes pour trouver la solution.

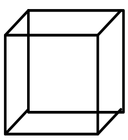
De plus, il y a aussi des informations implicites : x est une variable, p un paramètre, n un entier, r un réel, f une fonction, A un ensemble, D et Δ des droites.

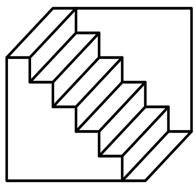
IV - DESSINS

L'homme a une bonne perception visuelle et spatiale, et utilise beaucoup de dessins :
- des dessins dans le plan pour raisonner dans l'espace;
- des diagrammes de Venn pour représenter des ensembles;
- des graphes pour représenter des application, des relations, ... ;
- ... .

Les représentations abstraites ne coïncident pas forcément avec les représentations concrètes. Par exemple, on étudie le coloriage d'une carte de géographie à l'aide d'un graphe; un damier ou un échiquier peut être une mauvaise représentation pour un problème de jeu, une bonne représentation pour un autre problème.

Ces représentations ne sont pas dépourvues d'ambiguïtés, par exemple :





V - EXEMPLES DE CHANGEMENTS DE REPRESENTATIONS

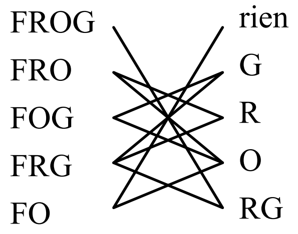
1. Problème du fermier, du renard, de l'oie et du grain

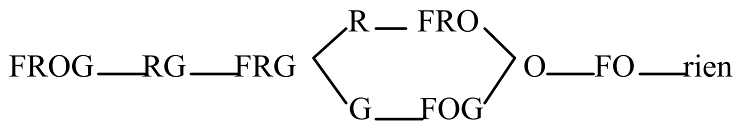
Un fermier veut traverser une rivière, il ne dispose que d'un petit bateau dans lequel il ne peut transporter qu'une chose à la fois avec lui. Il ne peut laisser seuls le renard et l'oie car le renard mangerait l'oie, ni l'oie et le grain car l'oie mangerait le grain.

Comment faire la traversée ?

On remarquera qu'il y a beaucoup de détails inutiles!

Pour obtenir la solution, décrire les situations acceptables (10 sur les $2^4 = 16$ situations possibles), ce seront les noeuds d'un graphe, et les possibilités de passage d'une situation à une autre seront les arcs (10 sur les $(10x9)/2 = 45$ possibles).





Cette méthode donne toutes les solutions possibles (deux).

2. Jeu des pions

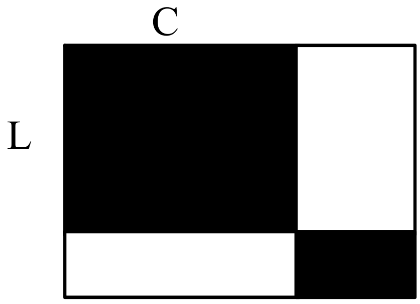
On a un damier de côté 100, rempli de 10 000 pions noirs. Un coup légal consiste à changer, sur un même rangée (ligne ou colonne), tous les pions noirs en pions blancs et vice versa. Est-il possible, en un nombre fini de coups d'obtenir n = 1999 (resp. 2004, 2008) pions blancs sur le damier.

Il n'y a pas de réponse qui vienne a priori.

On peut essayer de jouer, pas avec 100 bien sûr, mais avec 6 par exemple, ou d'une manière abstraite.

On *découvre* alors un certain nombre de faits :

(1) - faire deux coups de suite sur un même rangée revient à ne rien faire;
(2) - l'ordre des coups est indifférent (deux lignes ou deux colonnes ou une ligne et une colonne);
(3) - l'emplacement de la rangée est indifférent, seul leur nombre compte, car on peut échanger deux rangées sans changer les nombres de pions;
(4) - de (1) et (2) on déduit qu'on n'a à modifier une rangée qu'une seule fois;
(5) - de (3) et (4) on déduit qu'on peut modifier les rangées dans un ordre précis, par exemple les lignes de haut en bas puis les colonnes de gauche à droite pour aboutir à un damier de la forme :



(6) - seuls comptent les nombres L et C de lignes et colonnes modifiées;
(7) - par symétrie, on remarque que (C, L) et (100-L,100-C) donnent le même résultat que (L,C).

On a alors un nouveau problème : trouver L et C, avec 0 L 100, 0 C 100, tels que

$$L\ (100 - C) + C\ (100 - L) = n$$

et un nouvel univers, celui des équations en nombres entiers.

$$100\ (L + C) - 2\ L\ C = n$$ doit être pair donc 1999 est impossible.

On a alors $50\ (L+C) - L\ C = n/2$.
Un changement de variables, $l = L - 50$, $c = C - 50$ donne
$l\ c = 2500 - n/2$ avec $-50\ \ l\ \ 50$, $-50\ \ c\ \ 50$.

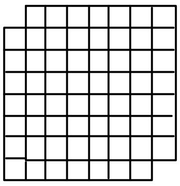
On a alors un troisième problème dans un troisième univers, une décomposition en facteurs, qui ne semble plus rien avoir à voir avec le problème initial.

Pour $n = 2004$, $l\ c = 1498 = 2x7x107$, ce qui est impossible car l et $c\ \ 50$.

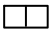
Pour $n = 2008$, $l\ c = 1496 = 2^3x11x17$, ce qui donne ± 44 et ± 34 pour les valeurs de l et c, soit 6 et 16, ou 94 et 84, pour les valeurs de L et C.

3. Autre jeu de damier

On retire deux cases en coins opposés d'un damier 8x8, soit



On doit le recouvrir, sans chevauchement, avec des dominos

 ou 

On peut résoudre ce problème en raisonnant ainsi : sur un damier noir et blanc, les dominos ont tous une case noire et une case blanche; or on a retiré deux cases de la même couleur. Le problème est donc impossible.

VI - REPRESENTATIONS D'OBJETS MATHEMATIQUES

1. Symboles

nombres **:** on ne les a pas toujours utilisés comme nous les connaissons; il y a eu différents systèmes de symboles, additifs chez les Romains, de position dans les systèmes décimal, sexagésimal (base 60, chez les Babyloniens), binaire, héxadécimal.
zéro
nombres négatifs
virgule : elle apparait au 16ème siècle
symboles d'opération (17ème) : + - x /
symboles fonctionnels (Leibnitz - Bernouilli)
exposants (18ème)
Σ (Euler)
indices (19ème - Galois)
notations ensemblistes (fin 19ème - 20ème) : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$

Remarque : il y a confusion fréquente, avec les symboles fonctionnels entre f et f(x). La λ-notation résout le problème.

2. Expressions

Les notations linéaires sont faciles à lire, écrire, transmettre, mais moins facile à comprendre et à manipuler que des notations moins linéaires.

notation infixée habituelle pseudo-linéaire

Exemple : $\left(\sin \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^3$

Si on utilise une notation vraiment linéaire, on fera un emboîtement de parenthèses différentes : { sin [(-b + √ (b↑2 - 4 a c)) / 2 a] } ↑ 3 avec un "-" unaire et une multiplication implicite.

Remarque : pour bien percevoir une expression, l'homme a besoin d'une vision globale. Heureusement, les traitements de texte modernes permettent des notations non linéaires.

notation polonaise préfixée

Exemple : ↑ sin / + $-_1$ b √ - ↑ b 2 ∗ 4 ∗ a c ∗ 2 a 3

Ou ↑ sin / + $-_1$ b √ - ↑ b 2 $*_3$ 4 a c ∗ 2 a 3 où $*_3$ désigne la multiplication ternaire

Pour les logiciens, elle est simple, précise et concise, non ambiguë, et ne nécessite pas de parenthèses.

Elle est commode pour la lecture automatique, de gauche à droite (à condition de connaître l'arité des opérateurs).

Mais elle est difficile à lire pour un être humain.

notation polonaise suffixée

Exemple : b $-_1$ b 2 ↑ 4 a c ∗ ∗ - √ + 2 a ∗ / sin 3 ↑

ou b $-_1$ b 2 ↑ 4 a c $*_3$ - √ + 2 a ∗ / sin 3 ↑

Elle a les mêmes avantages et les mêmes contraintes que la précédente. Elle est commode pour l'évaluation.

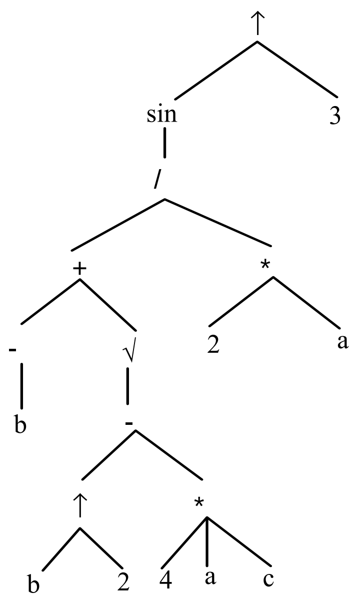
liste

Exemple : (↑ (sin (/ (+ (- b) (√ (- (↑ b 2) (∗ 4 a c)))) (∗ 2 a))) 3)

Elle est comparable à la notation polonaise préfixée mais permet d'utiliser des opérateurs variaires. Elle oblige à mettre des parenthèses. Elle est quelquefois difficile à lire. Cette notation est la notation externe LISP. En PROLOG, on écrirait

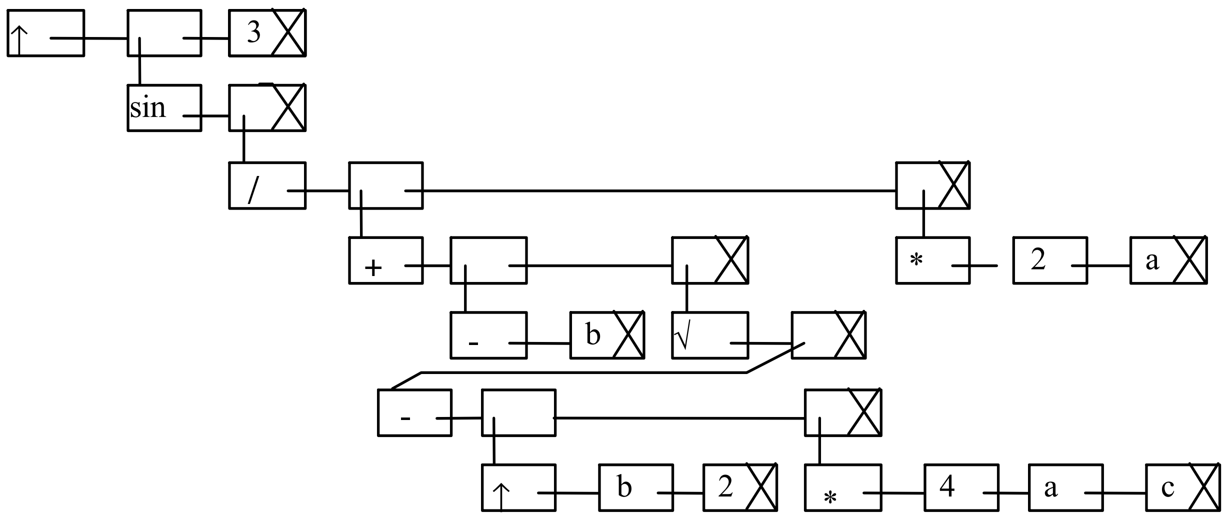
[↑, [sin, [/, [+, [-, b], [√, [-, [↑, b, 2] [∗, 4, a, c]]]] [∗, 2, a]]] 3]

arbre Exemple :



La perception est bidimensionnelle, aussi bien sur le papier pour l'homme, qu'en machine; cela facilite les manipulations formelles.

Représentation des listes en machine
Exemple :



On peut utiliser des pointeurs ou les simuler par des curseurs.

Les modifications sont faciles.

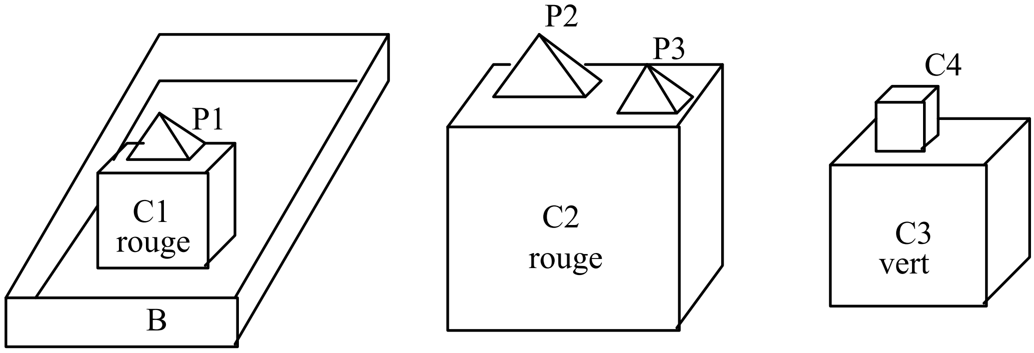
On a la possibilité de partager des sous-listes (également des sous-arbres), mais ceci peut être dangereux.

On peut récupérer la place si on a, ou si on écrit, un *ramasse-miettes* (*garbage collector*).

VII - REPRESENTATION DES CONNAISSANCES

On a vu des représentations de connaissances particulières. Pour représenter des connaissances tout à fait générales, on dispose
- du Calcul des Prédicats (Logique classique);
- de Logiques non classiques;
- des *réseaux sémantiques* ;
- des *frames* .

On prendra comme *exemple* la **représentation** d'un monde de *blocs* :



et le **problème** : Trouver les cubes rouges qui soutiennent une pyramide et ne sont pas contenus dans une boite.

1. Calcul des Prédicats

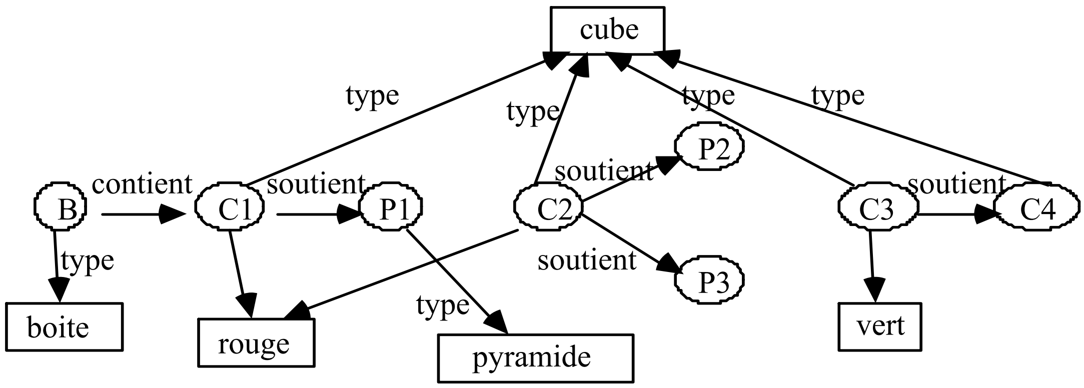
La situation précédente peut être décrite par l'énoncé suivant :

Est (B, boite) ∧ Est (C1, cube) ∧ Est (P1, pyramide) ∧ Couleur (C1, rouge)
∧ Est (C2, cube) ∧ Est (P2, pyramide) ∧ Couleur (C2, rouge)
∧ Est (C3, cube) ∧ Est (P3, pyramide) ∧ Couleur (C3, vert)
∧ Est (C4 cube)
∧ Contient (B, C1) ∧ non Contient (B,C2) ∧ non Contient (B,C3)
∧ Soutient (C1, P1) ∧ Soutient (C2 P2) ∧ Soutient (C2, P3) ∧ Soutient (C3, C4)

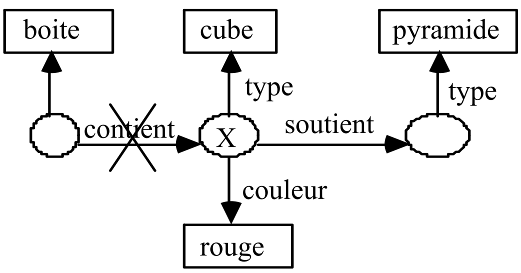
Pour répondre à la question posée, il faudra chercher à vérifier l'énoncé :
∃x { Est (x, cube) ∧ Couleur (x, rouge) ∧ ∃y [Est (y, pyramide) ∧ Soutient (x,y)]
∧ ¬ ∃z [Est(z, boite) ∧ Contient (z, x)] }

2. Réseaux sémantiques

La situation précédente peut être décrite par le réseau suivant :

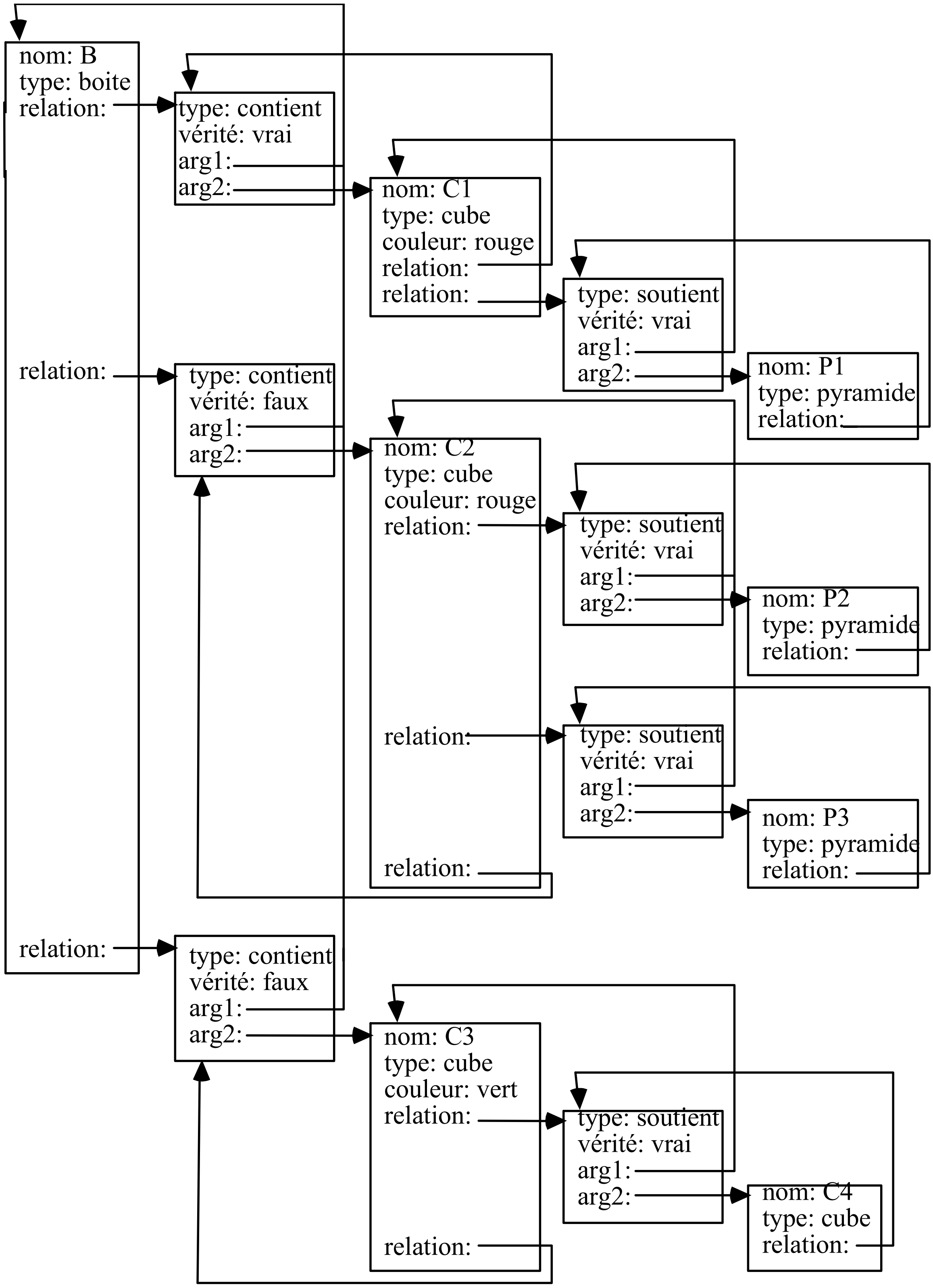


Pour répondre à la question, il faut trouver X tel que

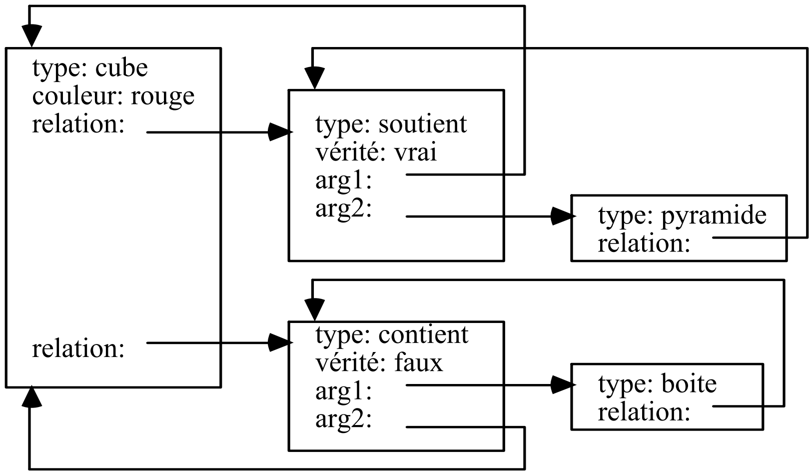


3. Frames ou listes attribut-valeur

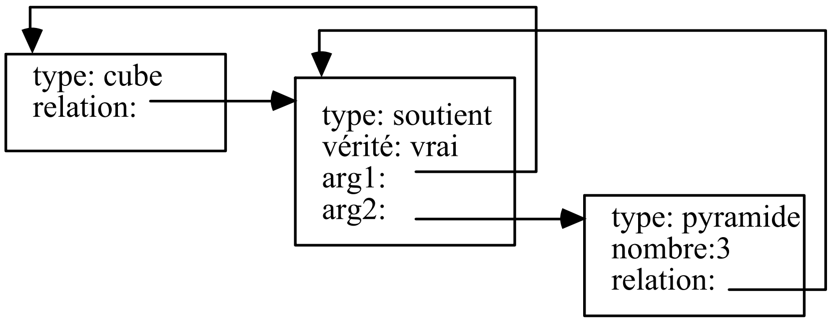
Description de la situation :



Question : trouver



On peut, dans un telle représentation, utiliser des nombres cardinaux, par exemple, pour exprimer qu'un cube soutient 3 pyramides :



BIBLIOGRAPHIE

Voir Bibliographie générale

+

J.PITRAT, Textes, ordinateurs et compréhension, Eyrolles 1985
G.POLYA, How to solve it, Princeton University, New York, 1957
G.POLYA, Comment poser et résoudre un problème, Dunod, 1965
E.de BONO, La Pensée Latérale, Dunod, paris, 1972

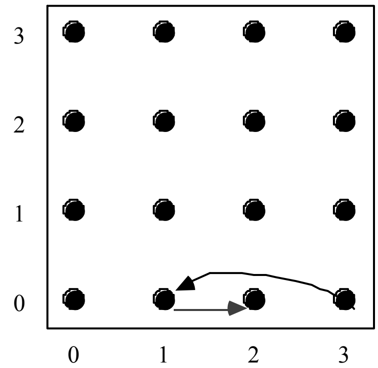
EXERCICES ET PROBLEMES

I - REPRESENTATIONS DES PROBLEMES

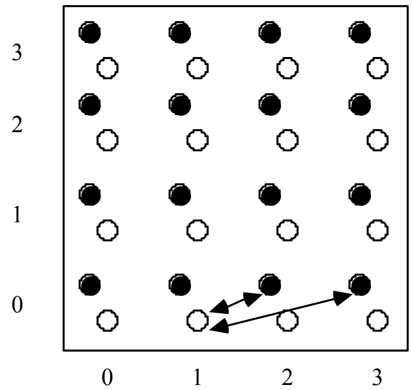
Trois missionnaires et trois cannibales doivent traverser une rivière. Ils disposent d'une barque qui ne peut transporter que deux personnes à la fois. Sur chacune des rives, s'il y a au moins un missionnaire, il ne peut y avoir plus de cannibales que de missionnaires. Résoudre graphiquement ce problème :

1. en utilisant un graphe dont les sommets sont étiquetés par les nombres de missionnaires et cannibales d'un côté de la rivière;

2. en utilisant un diagramme dans lequel chaque point représente le nombre de missionnaires et cannibales sur la rive gauche; les mouvements rive gauche → rive droite seront indiqués par des flèches pleines, les mouvements inverses par des pointillés;



3. en dupliquant les points de la question 2. pour exprimer le fait que le bateau est à gauche (point noir) ou à droite (point blanc).



4. généraliser avec n missionnaires et n cannibales.

EXERCICES ET PROBLEMES

II - ANALYSE ET RESOLUTION DE PROBLEMES

Pour chacun des problèmes suivants
a) évaluer a priori sa difficulté et la quantité de connaissances nécessaires pour le résoudre;
b) essayer de le résoudre;
c) que vous ayez ou non réussi à le résoudre, réévaluer sa difficulté et la quantité de connaissances nécessaires ou utiles.

1. Problème des quatre cavaliers : échanger en un nombre minimum de coups les deux cavaliers noirs et les deux cavaliers blancs.
Les coups autorisés sont ceux du jeu d'échecs.

CN		CN
CB		CB

2. Soit a la somme des chiffres du nombre 4444^{4444} et b la somme des chiffres de a. Trouver la somme des chiffres de b.

3. Déterminer le plus petit entier naturel n qui possède les propriétés suivantes :
- sa représentation décimale a comme chiffre des unités 6;
- lorsqu'on efface ce 6 et qu'on le place à gauche du nombre, on obtient le quadruple de n.

4. Trouver tous les entiers multiples de 7 qui s'écrivent uniquement avec des 1 en système décimal.

5. Problème de Cryptarithmetic : Faire correspondre aux différentes lettres, des chiffres différents, de façon que l'addition ci-contre soit correcte, en respectant la convention qu'on n'écrit pas de 0 à gauche d'un nombre.

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ \underline{+\ \ \text{MORE}} \\ =\text{MONEY} \end{array}$$

6 On a six points sur un cercle et deux crayons de couleur (bleu et rouge). On joint les points deux à deux de toutes les façons possibles en utilisant, au choix pour chacun des segments obtenus, le crayon bleu ou le rouge. Démontrer qu'il y a au moins un triangle unicolore.

7. Démontrer que dans toute suite d'au moins 10 nombres, il y a au moins une sous-suite monotone (cad croissante ou décroissante) de longueur 4.

8. Combien y a-t-il de façons d'écrire $a_o * a_1 * \ldots * a_n$ en tenant compte de la commutativité de l'opérateur $*$? de l'associativité ? des deux ?

9. Multiplier LXIV par XXIX .

10. On a trois ensembles A, B et C. Démontrer que si A est inclus dans B et B est inclus dans C, alors A est inclus dans C.

11. Pour tout ensemble X, P(X) est l'ensemble des sous-ensembles (parties) de X.
L'intersection $A \cap B$ (resp. l'union $A \cup B$) de deux ensembes A et B est l'ensemble des points qui appartiennent à A et (resp. ou) à B.
Est-ce que l'on a $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$? $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$?