Démonstration automatique de théorèmes
Méthodes naturelles ou principe de résolution

Dominique Pastre

Crip5

Université René Descartes - Paris 5

http://www.math-info.univ-paris5.fr/~pastre

Journée scientifique en l'honneur de Jean-Louis Laurière

22 mars 2006

Commentaires

Le but de cet exposé n'est pas de parler de Démonstration Automatique de Théorèmes (DAT) mais d'évoquer quelques principes et méthodes importantes en résolution de problèmes qui ont tenu une grande place dans les travaux de Jean-Louis Laurière et de les illustrer dans le domaine de la DAT.

$\boxed{\text{Quelques méthodes importantes en } \textbf{résolution de problèmes}}$

- travailler près de l'énoncé initial, le plus longtemps possible
- privilégier les situations les plus contraintes
- privilégier les propriétés qui donnent le plus d'informations utilisables
- utiliser des métarègles
- ordonner et réordonner explicitement

$\boxed{\text{Application à la } \textbf{démonstration automatique de théorèmes}}$

Quelques comparaisons entre le **principe de résolution** et les **méthodes issues de la déduction naturelle**

Commentaires sur ces méthodes

1 - Alice a montré que travailler le plus longtemps possible sur les énoncés formels initiaux était plus efficace qu'un programme écrit trop tôt;

- en DAT, on verra que transformer les énoncés du calcul des prédicats en ensembles de clauses fait perdre beaucoup d'informations.

2 - Alice donnait la priorité aux choix les plus contraignants;

- dans le démonstrateur MUSCADET, ce sont les conditions d'application des règles qui sont très contraignantes, d'où peu de situations où il y a des choix.

3 - Alice donnait une grande importance à la propagation de contraintes;

- les stratégies de MUSCADET privilégient les propriétés *positives* qui apportent plus d'informations que les propriétés *négatives*.

4/5 - développées par SNARK et beaucoup d'autres depuis;

- les métarègles de MUSCADET
    - construisent des règles adaptées aux représentations choisies,
    - permettent de reconnaître
        - les règles qui permettent de conclure rapidement (prioritaires),
        - les règles qui sont dangereuses.

Très bref historique de la DAT

- 1956 - Logic Theorist : premier programme d'IA
  premier programme de DAT
- 1960 - Wang - DAT - méthode utilisant des séquents
- 1965 - Robinson - Principe de Résolution
- 1971 - Bledsoe - méthodes issues de la déduction naturelle
  + resolution

Commentaires

Le Principe de Résolution a fait oublier pendant quelque temps les méthodes "naturelles" qui avaient été utilisées auparavant.

Ses deux grandes qualités :

- une seule règles de déduction, simple;
- complétude pour la réfutation.

Son grand défaut :

- explosion combinatoire du nombre de clauses générées.

Bledsoe a ensuite montré qu'utiliser des méthodes naturelles avant le principe de résolution était plus efficace pratiquement, puis qu'on pouvait efficacement utiliser uniquement des méthodes naturelles.

puis

- nombreux travaux sur la résolution
  - définition et études de stratégies
  - résultats théoriques
  - peu de réalisations pratiques performantes (explosion combinatoire)
- quelques travaux utilisant des méthodes naturelles
- travaux utilisant des bases de connaissances adaptées à des domaines particuliers, en particulier mathématiques

Commentaires

On ne parlera dans la suite que des démonstrateurs généralistes, c'est-à-dire n'ayant que des connaissances logiques et aucune connaissance mathématique particulière (même pas ce qu'est un ensemble ou ce que peut signifier appartenir à un ensemble ou une collection) et s'appliquant au calcul des prédicats du premier ordre.
La raison en est l'existence de la librairie TPTP (Thousands Problems for Theorem Proving) permettant de tester et comparer les démonstrateurs et l'existence de compétitions (CASC) de démonstrateurs organisés dans le cadre des conférences CADE (Conferences on Automated Deduction).

actuellement

- les meilleurs démonstrateurs sont basés sur la résolution
  ils sont devenus efficaces pratiquement grâce
  - aux progrès des ordinateurs
  - à l'écriture de nombreuses stratégies
  - à de nombreuses exécutions permettant d'ajuster des tables de paramètres
- les démonstrateurs utilisés pratiquement basés sur la résolution reçoivent souvent directement les problèmes sous forme de clauses
- néanmoins de plus en plus de démonstrateurs construisent automatiquement les ensembles de clauses
- certains commencent par un prétraitement naturel (découpages, reécritures) avant de construire automatiquement les clauses et de travailler ensuite uniquement avec la résolution

mais

- il est encore possible, bien que rare, de réaliser des démonstrateurs basés uniquement sur des méthodes naturelles et les performances en montrent, non la supériorité, mais la complémentarité
- il serait possible, en cas d'échec des méthodes naturelles, d'appeler un démonstrateur basé sur la résolution pour les sous-théorèmes non démontrés

Comparaison des deux types de méthodes sur un exemple

Définition

$$\forall A \forall B (A \subset B \leftrightarrow \forall X (X \in A \rightarrow X \in B))$$

Montrer que

$$\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$$

On va voir une preuve utilisant des méthodes "naturelles" et une preuve utilisant le principe de résolution

En deux mots

TROP Le principe de résolution travaille sur les clauses et en génère de nouvelles de manière exponentielle, il faut limiter leur nombre.

PAS ASSEZ MUSCADET travaille sur les énoncés du premier ordre, ajoute ou transforme des connaissances, en nombre fini ou, au pire avec une croissance linéaire, il faut enrichir l'ensemble des règles.

Démonstration par des méthodes naturelles

MUSCADET est un système à base connaissances utilisant de telles méthodes

- Le système connait les notions de définition, de lemme, de théorème à démontrer, d'objet mathématique, d'hypothèse et de conclusion à démontrer
- Il applique des règles et peut en construire de nouvelles en appliquant des métarègles

- Quelques règles connues du système
  - si la conclusion à démontrer est de la forme $\forall X P(X)$
    alors créer un objet x et remplacer la conclusion par $P(x)$
  - si la conclusion à démontrer est de la forme $A \rightarrow B$
    alors ajouter l'hypothèse A et la nouvelle conclusion est B
  - si l'hypothèse à ajouter est une conjonction
    alors ajouter comme hypothèses tous les éléments de la conjonction
  - si la conclusion à démontrer figure parmi les hypothèses
    alors le théorème est démontré

- Règles construites par des métarègles à partir de la définition de l'inclusion

$$A \subset B \leftrightarrow \forall X(X \in A \rightarrow X \in B)$$

  où A, B et X sont des variables implicitement quantifiées universellement,

  – si on a les hypothèses $A \subset B$ et $X \in A$
    alors ajouter l'hypothèse $X \in B$

  – si la conclusion à démontrer est $A \subset B$
    alors remplacer cette conclusion par $\forall X(X \in A \rightarrow X \in B))$

Commentaires pour le transparent suivant :

- les hypothèses sont *ajoutées*
- les conclusions *remplacent* la conclusion précedente

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C(A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C(A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$
a,b,c		$a \subset b \wedge b \subset c \rightarrow a \subset c$

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C(A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C(A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$
a,b,c		$a \subset b \wedge b \subset c \rightarrow a \subset c$
	$a \subset b$	
	$b \subset c$	$a \subset c$

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C (A \subset B \land B \subset C \to A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C (A \subset B \land B \subset C \to A \subset C)$
a,b,c		$a \subset b \land b \subset c \to a \subset c$
	$a \subset b$	
	$b \subset c$	$a \subset c$
		$\forall X (X \in a \to X \in c)$

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$
a,b,c		$a \subset b \wedge b \subset c \rightarrow a \subset c$
	$a \subset b$	
	$b \subset c$	$a \subset c$
		$\forall X (X \in a \rightarrow X \in c)$
x		$x \in a \longrightarrow x \in c$

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$
a,b,c		$a \subset b \wedge b \subset c \rightarrow a \subset c$
	$a \subset b$	
	$b \subset c$	$a \subset c$
		$\forall X (X \in a \rightarrow X \in c)$
x		$x \in a \rightarrow x \in c$
	$x \in a$	$x \in c$

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C(A \subset B \land B \subset C \to A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C(A \subset B \land B \subset C \to A \subset C)$
a,b,c		$a \subset b \land b \subset c \to a \subset c$
	$a \subset b$	
	$b \subset c$	$a \subset c$
		$\forall X(X \in a \to X \in c)$
x		$x \in a \to x \in c$
	$x \in a$	$x \in c$
	$x \in b$	

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \to A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \to A \subset C)$
a,b,c		$a \subset b \wedge b \subset c \to a \subset c$
	$a \subset b$	
	$b \subset c$	$a \subset c$
		$\forall X (X \in a \to X \in c)$
x		$x \in a \to x \in c$
	$x \in a$	$x \in c$
	$x \in b$	
	$x \in c$	

Démonstration du théorème $\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$
a,b,c		$a \subset b \wedge b \subset c \rightarrow a \subset c$
	$a \subset b$	
	$b \subset c$	$a \subset c$
		$\forall X (X \in a \rightarrow X \in c)$
x		$x \in a \rightarrow x \in c$
	$x \in a$	$x \in c$
	$x \in b$	
	$x \in c$	
		théorème démontré

Démonstration par le principe de résolution

Méthode complète pour la **réfutation** mais pas pour la déduction.
On montre que l'ensemble constitué de la définition de l'inclusion et de la négation du théorème à démontrer est **constradictoire**

Conclusion à démontrer
$\forall A\ \forall B\ \forall C\ (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$

Négation
$\exists A\ \exists B\ \exists C\ \neg\ (A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C)$
$\exists A\ \exists B\ \exists C\ \neg\ (\neg\ (A \subset B \wedge B \subset C) \vee A \subset C)$
$\exists A\ \exists B\ \exists C\ (A \subset B \wedge B \subset C \wedge A \not\subset C)$

Définition de l'inclusion

$\forall A \forall B(A \subset B \leftrightarrow \forall X(X \in A \rightarrow X \in B))$

Mise sous forme prénexe de cette définition

(la négation de la conclusion l'est déjà)

$$\forall A \forall B\{[A \subset B \rightarrow \forall X(X \in A \rightarrow X \in B)] \wedge [\forall X'(X' \in A \rightarrow X' \in B) \rightarrow A \subset B)]\}$$

$$\forall A \forall B \exists X' \forall X\{[A \subset B \rightarrow (X \in A \rightarrow X \in B)] \wedge [(X' \in A \rightarrow X' \in B) \rightarrow A \subset B)]\}$$

ou $\forall A \forall B \forall X \exists X'\{[...] \wedge [...]\}$

Skolémisation de la définition

$$\forall A \forall B \forall X\{[A \subset B \rightarrow (X \in A \rightarrow X \in B)] \wedge [(f(A, B) \in A \rightarrow f(A, B) \in B) \rightarrow A \subset B)]\}$$

où f est une fonction de Skolem

ou $\forall A \forall B \forall X\{[\quad ... \quad] \wedge [(f(A, B, X) \in A \rightarrow (f(A, B, X) \in B) \rightarrow A \subset B)]\}$

et de la négation de la conclusion

$a \subset b \wedge b \subset c \wedge a \not\subset c$ où a, b et c sont des constantes de Skolem

Réécriture n'utilisant que les connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ et suppression des quantificateurs universels

(toutes les variables sont implicitement universellement quantifiées)

$(A \not\subset B \vee X \notin A \vee X \in B) \wedge [(f(A, B) \in A \wedge f(A, B) \notin B) \vee A \subset B]$

Mise sous forme normale conjonctive

$(A \not\subset B \vee X \notin A \vee X \in B) \wedge (f(A, B) \in A \vee A \subset B) \wedge (f(A, B) \notin B \vee A \subset B)$

$a \subset b \wedge b \subset c \wedge a \not\subset c$

Ensemble de clauses

$A \not\subset B \vee X \notin A \vee X \in B$

$f(A, B) \in A \vee A \subset B$

$f(A, B) \notin B \vee A \subset B$

$a \subset b$

$b \subset c$

$a \not\subset c$

Réfutation

$$\underline{A \not\subset B \vee X \notin A \vee X \in B}$$

$$\underline{f(A,B) \in A \vee A \subset B}$$

$$\boxed{b \subset c} \qquad \boxed{a \subset b} \qquad \boxed{a \not\subset c}$$

$$f(a,c) \in a$$

$$\underline{f(A,B) \notin B \vee A \subset B}$$

$$X \notin b \vee X \in c \qquad X \notin a \vee X \in b$$

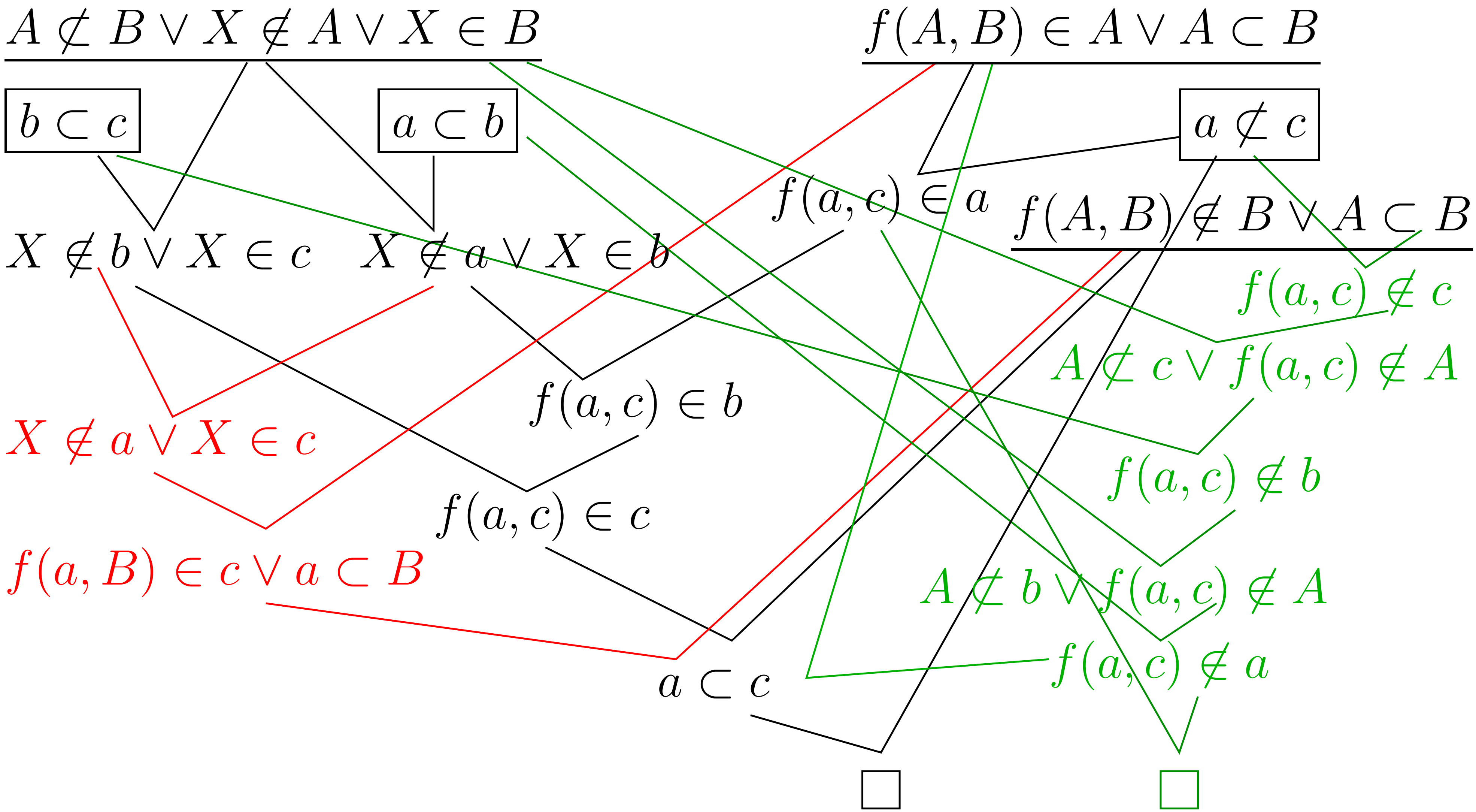
$$f(a,c) \in b$$

$$f(a,c) \in c$$

$$a \subset c$$

$$\square$$

Réfutations



Quelques clauses inutiles ou triviales

$A \not\subset B \vee X \notin A \vee X \in B$

$f(A,B) \in A \vee A \subset B$

$\boxed{b \subset c}$

$\boxed{a \subset b}$

$\boxed{a \not\subset c}$

$f(A,B) \notin B \vee A \subset B$

$f(a,c) \notin c$

$A \not\subset c \vee f(a,c) \notin A$

$A \subset A$

$f(A,B) \in A \vee X \notin A \vee X \in B$

$a \subset c \vee a \not\subset c$

$f(A,c) \in A \vee f(A,c) \notin A$

Commentaires

Pour démontrer ce théorème, très simple, les meilleurs démonstrateurs basés sur le principe de résolution génèrent entre 400 et 1000 clauses.
Pour des théorèmes plus difficiles, le nombre des clauses générées se compte en centaines de milliers.

L'exemple suivant va illustrer deux problèmes rencontrés en DAT.

Conclusions conjonctives et **Règles pouvant être expansives**

Exemple :

Montrer la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection

$\forall A \forall B \forall C[A \cup (B \cap C) =_{\text{ens}} (A \cup B) \cap (A \cup C)]$

Nouvelles définitions :

$\forall A \forall B \forall X(X \in A \cap B \leftrightarrow X \in A \wedge X \in B)$
$\forall A \forall B \forall X(X \in A \cup B \leftrightarrow X \in A \vee X \in B)$
$\forall A \forall B(A =_{\text{ens}} B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A)$

Règles utilisées par MUSCADET :

- générale
  si la conclusion à démontrer est une conjonction
  alors démontrer successivement tous les éléments de la conjonction

- construites
  - si on a $C : A \cap B$ et $X \in C$ alors ajouter $X \in A$
  - si on a $C : A \cap B$ et $X \in C$ alors ajouter $X \in B$
  - si on a $C : A \cap B$, $X \in A$ et $X \in B$ alors ajouter $X \in C$
  - si on a $C : A \cup B$ et $X \in C$ alors ajouter $X \in A \vee X \in B$
  - si on a $C : A \cup B$ et $X \in A$ alors ajouter $X \in C$
  - si on a $C : A \cup B$ et $X \in B$ alors ajouter $X \in C$
  - si on a $A =_{\text{ens}} B$ alors ajouter $A \subset B$
  - si on a $A =_{\text{ens}} B$ alors ajouter $B \subset A$
  - si on a $A \subset B$ et $B \subset A$ alors ajouter $A =_{\text{ens}} B$

  Remarque : ces règles ne sont pas expansives

Commentaires pour la démonstration qui va suivre

Les chaines

bic, $aubic$, etc,

ne sont que des noms (constantes).

Le système nomme ces objets, au choix de l'utilisateur, par des noms courts

$o1$, $o2$, etc,

ou par des noms construits à partir des symboles,

b_intersection_c, a_union_b_intersection_c, etc.

Ces noms ne servent qu'à faciliter l'analyse des traces par un lecteur humain.

Les noms des transparents suivants ne sont qu'une version courte de ce dernier choix.

Démonstration

objets	hypothèses	conclusion
		$\forall A \forall B \forall C (A \cup (B \cap C) =_{\text{ens}} (A \cup B) \cap (A \cup C))$
a,b,c		$a \cup (b \cap c) =_{\text{ens}} (a \cup b) \cap (a \cup c)$
bic	bi$c : b \cap c$	
aubic	aubi$c : a \cup b$ic	
aub	au$b : a \cup b$	
auc	au$c : a \cup c$	
aubiauc	aubiau$c : a$u$b \cap a$uc	aubi$c =_{\text{ens}} a$ubiauc
		$(a\text{u}b\text{i}c \subset a\text{u}b\text{i}a\text{u}c) \wedge (a\text{u}b\text{i}a\text{u}c \subset a\text{u}b\text{i}c)$

objets	hypothèses	conclusion
$\boxed{\text{th } 1}$		$aubic \subset aubiauc$
		$\forall X (X \in aubic \to X \in aubiauc)$
x		$x \in aubic \to x \in aubiauc$
	$x \in aubic$	$x \in aubiauc$
		$x \in aub \wedge x \in auc$
$\boxed{\text{th } 11}$		$x \in aub$
	$x \in a \vee x \in bic$	
$\boxed{\text{th } 111}$	$x \in a$	
	$x \in aub$	<u>théorème 111 démontré</u>
$\boxed{\text{th } 112}$	$x \in bic$	
	$x \in b$, $x \in c$	
	$x \in aub$	<u>théorème 112 démontré</u> / <u>théorème 11 démontré</u>
etc		

Par le principe de résolution

clauses issues des définitions

$X \notin A \cap B \vee X \in A$

$X \notin A \cap B \vee X \in B$

$X \notin A \vee X \notin B \vee X \in A \cap B$

$X \notin A \cup B \vee X \in A \vee X \in B$

$X \notin A \vee X \in A \cup B$

$X \notin B \vee X \in A \cup B$

ces clauses sont expansives : si on a la clause $x \in a$ on déduira les clauses $x \in a \cap a$, $x \in a \cap (a \cap a)$, etc ainsi que $x \in a \cup B$

clause issue de la négation du théorème à démontrer

$a \cup (b \cap c) \neq_{\text{ens}} (a \cup b) \cap (a \cup c)$

qui donnera la clause

$[a \cup (b \cap c) \not\subset (a \cup b) \cap (a \cup c)] \vee [(a \cup b) \cap (a \cup c) \not\subset a \cup (b \cap c)]$

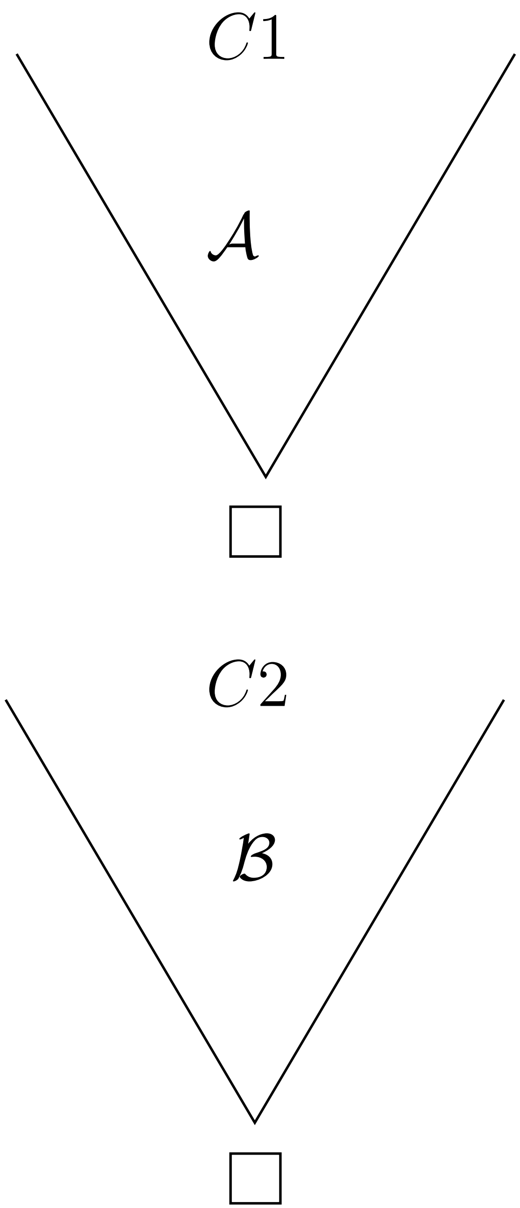
Démonstration d'une conjonction

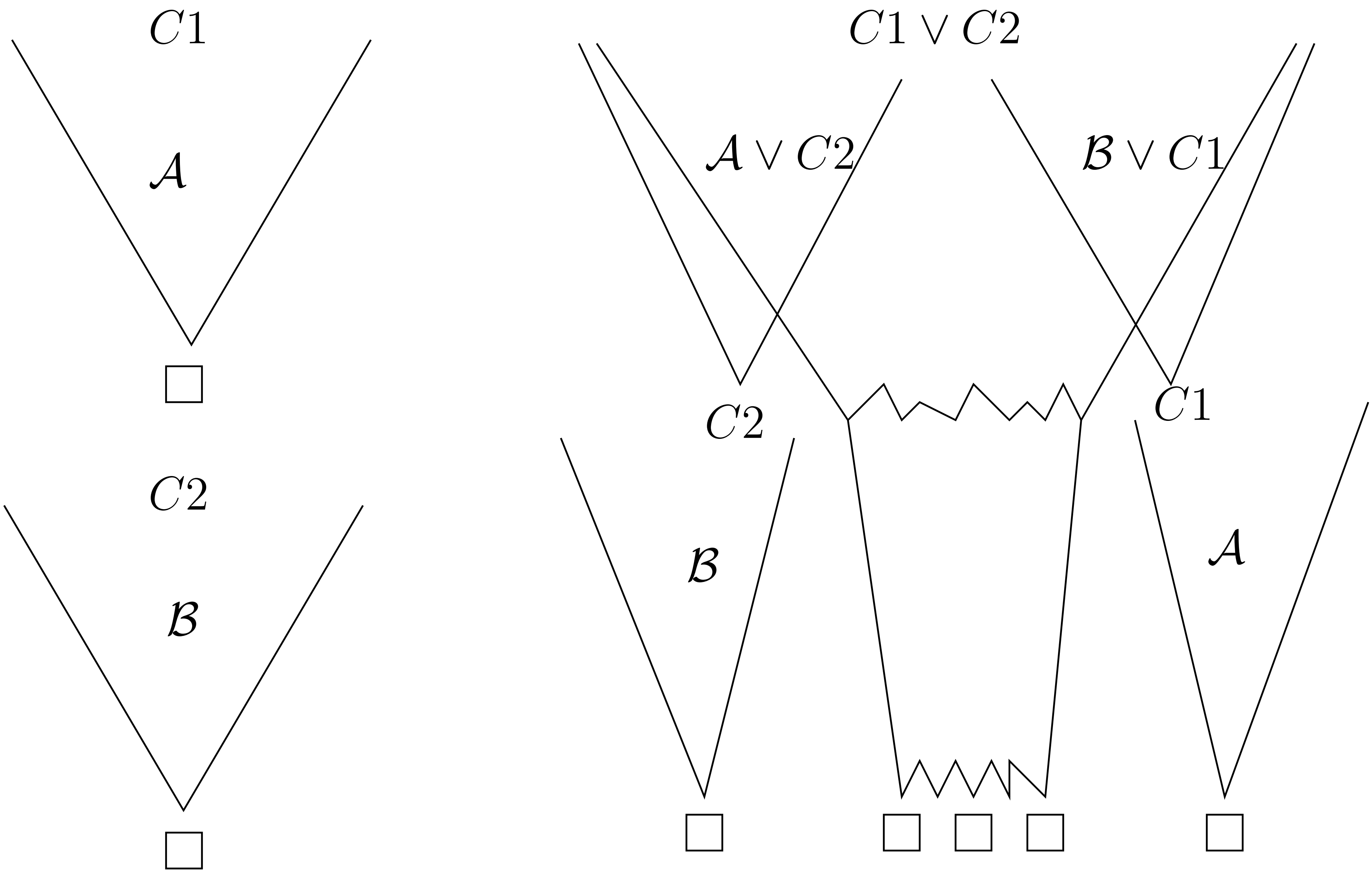
Démontrer $A \wedge B$ par le principe de résolution est beaucoup plus difficile que de juxtaposer les preuves de A et de B

Supposons d'abord que les négations de A et B ne donnent chacune qu'une clause, soient $C1$ pour $\neg A$ et $C2$ pour $\neg B$,

$\neg(A \wedge B)$ donne la clause $C1 \vee C2$

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des arbres de réfutation respectivement de A et B
Comment réfuter $A \wedge B$?


$C1$
$\mathcal{A}$
$\square$
$C2$
$\mathcal{B}$
$\square$


$C1$
$\mathcal{A}$
$C2$
$\mathcal{B}$
$C1 \vee C2$
$\mathcal{A} \vee C2$
$\mathcal{B} \vee C1$
$C2$
$C1$
$\mathcal{B}$
$\mathcal{A}$
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$

Si A et B donnent plusieurs clauses, c'est encore pire.

La distributivité union/intersection n'est démontrée que par MUSCADET et par Vampire (hors compétition).

Le théorème suivant
$\forall A\,\forall B\,\forall C\;((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A) =_{\text{ens}} (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A))$
est démontré par plusieurs démonstrateurs (CASC 2005), MUSCADET en moins de 0.01 sec ainsi que Prover 9 qui fait un prétraitement avant d'appeler la résolution et par plusieurs autres démonstrateurs mais en plus de 140 sec.

Le théorème suivant

$$\forall A \forall B\; (\mathcal{P}(A\cap B) =_{\text{ens}} \mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B))$$

n'est démontré que par MUSCADET
ainsi que le théorème

$$\forall A \forall B (A\cap B)\cup C =_{\text{ens}} A\cap(B\cup C) \leftrightarrow C\subset A)$$

Traitement des propriétés négatives

La résolution ne fait pas de différence entre les littéraux positifs ou négatifs

MUSCADET privilégie les propriétés **positives** qui apportent le plus d'informations.
Mais une négation peut apparaitre dans une définition.

Exemple

La définition de la différence $E-A$ est
$\forall E \forall A \forall X (X \in (E-A) \leftrightarrow X \in E \land X \notin A)$

- MUSCADET construit les règles
  - si on a $B : (E-A)$ et $X \in B$ alors ajouter $X \in E$
  - si on a $B : (E-A)$, $X \in B$ et $X \in A$ alors ajouter $faux$
  - si on a $B : (E-A)$, $X \in E$ et $X \notin A$ alors ajouter $X \in B$
  - si on a $B : (E-A)$ et $X \in E$ alors ajouter $X \in A \lor X \in B$

- et on a les règles générales
  - si on a A et $\neg A$ alors le (sous-)théorème est démontré
  - si la conclusion à demontrer est $\neg A \vee B$ [resp. $\neg A$] alors ajouter l'hypothèse A et la nouvelle conclusion est B[resp. $faux$]

<u>théorèmes</u>

$$\forall E \ \forall A \ ((E - (E - A)) = A)$$

est démontré (CASC 2005) uniquement par MUSCADET en moins de 0.01 sec et par Vampire en 99 sec.

$$\forall E \ \forall A \ \forall B \ ((E - A \cup B = (E - A) \cap (E - B))$$

n'est démontré que par MUSCADET

Si une définition est négative, on définit la propiété inverse

Exemple

$$\forall A \forall B \ (\ \text{disjoint}(A,B) \leftrightarrow \neg \ \exists X (X \in A \wedge X \in B) \ )$$

MUSCADET définit la propriété

$$\forall A \forall B \ (\ \text{non\_disjoint}(A,B) \leftrightarrow \exists X (X \in A \wedge X \in B) \ )$$

remplace la définition de disjoint par

$$\forall A \forall B \ (\ \text{disjoint(A,B)} \leftrightarrow \neg \ \text{non\_disjoint}(A,B) \ )$$

et construit les règles

- *si on a* $\neg$ disjoint(A,B) *alors ajouter* non_disjoint(A,B)
- *si on a* non_disjoint(A,B) *alors ajouter* $\exists X (X \in A \wedge X \in B)$
- *si on a* disjoint(A,B) *et* non_disjoint(A,B) *alors ajouter* faux

Propriétés existentielles

Elles apparaissent par exemple quand on manipule des applications

$$\forall F \forall A \forall B \ \{ \ \text{application}(F, A, B) \leftrightarrow$$
$$\forall X \ [\ X \in A \rightarrow \exists Y (Y \in B \wedge \text{apply}(F, X, Y)) \ ] \wedge$$
$$\forall X \forall Y1 \forall Y2 \ [\ X \in A \wedge Y1 \in B \wedge Y2 \in B \rightarrow$$
$$(\text{apply}(F, X, Y1) \wedge \text{apply}(F, X, Y2) \rightarrow Y1 = Y2) \ ] \ \}$$

$$\forall F \forall A \forall B \ \{ \ \text{surjective}(F, A, B) \leftrightarrow$$
$$\forall Y \ [\ Y \in B \rightarrow \exists X (X \in A \wedge \text{apply}(F, X, Y)) \ ] \ \}$$

$$\forall F \forall G \forall A \forall B \forall C \ \{ \ X \in A \wedge Z \in C \rightarrow$$
$$[\ \text{apply}(\text{comp}(G, F, A, B, C), X, Z) \leftrightarrow$$
$$\exists Y (Y \in B \wedge \text{apply}(F, X, Y] \wedge \text{apply}(G, Y, Z)) \ ] \ \}$$

Exemples de règles

- *si on a* application(F, A, B) et $X \in A$
  alors ajouter $\exists Y (Y \in B \wedge \text{apply}(F, X, Y))$

- *si on a* surjective(F, A, B) et $Y \in B$
  alors ajouter $\exists X(X \in A \wedge \text{apply}(F, X, Y))$

- *si on a* application(F, A, B), application(G, B, C) et
  $$\text{apply}(\text{comp}(G, F, A, B, C), X, Z)$$
  alors ajouter $\exists Y(Y \in B \wedge \text{apply}(F, X, Y] \wedge \text{apply}(G, Y, Z))$

Les $\exists$ restent le plus longtemps possible près de leur portée.
Les propriétés existentielles ne seront traitées qu'assez tard.
Des constantes sont alors créées, car toutes les autres variables ont été instanciées.
Les propriétés existentielles sont traitées une par une, dans l'ordre de leur apparition. Donc pas de risque d'une suite infinie inutile de créations.
La troisième règle, plus spécifique que la première sera rangée (automatiquement) avant la première par des métarègles.

Remplacer des fonctions par des $\exists$

Si, au cours de la construction des règles, on doit traiter la sous-formule $A(X) \rightarrow B(F(X))$ alors

- si F a une définition $\forall X \forall Y [P(F(X), Y) \leftrightarrow E(X, Y)]$
  MUSCADET construit la règle
  si <conditions issues de $A(X)$ >
  on a l'hypothèse $F(X) : Y$
  alors ajouter l'hypothèse $B(Y)$

- si F est une fonction *primitive*,
  MUSCADET construit **aussi** la règle
  si <conditions issues de $A(X)$ >
  alors ajouter l'hypothèse $\exists Y (F(X) : Y \wedge B(Y))$

Commentaires

Les seuls exemples de la librairie TPTP permettant d'illustrer ce point sont un peu difficiles.
Mais l'exemple suivant aura l'intérêt de montrer en plus le fonctionnement, parfois un peu compliqué, de la construction des règles

Exemple

Management (Organisation Theory)

Problem : Stable environments have a critical point.

Axiom : There is an earliest time point, past which FM's growth rate exceeds EP's growth rate.

$$
\begin{aligned}
&\forall E \ \{ \ \text{environment}(E) \land \text{stable}(E) \rightarrow \\
&\qquad \exists T_0 \ [\ \text{in\_environment}(E, T_0) \\
&\qquad\qquad \land \neg \ \text{greater}(\text{growth\_rate}(\text{efficient\_producers}, T_0), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{growth\_rate}(\text{first\_movers}, T_0)) \\
&\qquad\qquad \land \forall T \ (\ \text{subpopulations}(\text{first\_movers}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{efficient\_producers}, E, T) \\
&\qquad\qquad\quad \land \text{greater}(T, T_0) \\
&\qquad\qquad\quad \rightarrow \text{greater}(\text{growth\_rate}(\text{efficient\_producers}, T), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{growth\_rate}(\text{first\_mover}, T)) \ ) \ ] \ \}
\end{aligned}
$$

la règle

si on a environment(E) *et* stable(E) *alors ajouter* $\exists T_0$...

a été construite

on a les hypothèses environment(x) et stable(x)

on crée les objets $x1$, $x2$ et $x3$ avec les hypothèses

in_environment($x, x1$)

growth_rate(efficient_producers, $x1$) : $x2$

growth_rate(first_movers, $x1$) : $x3$

$\neg$ greater($x2, x3$)

et la règle locale

si on a les hypothèses

subpopulations(first_movers, efficient_producers,x, B),

greater($B, x1$),

growth_rate(efficient_producers,B) : C

et growth_rate(first_movers,B) : D

alors ajouter l'hypothèse greater(C, D)

mais aussi la règle locale

si on a les hypothèses

subpopulations(first_movers, efficient_producers, x, B)

et greater$(B, x1)$

alors ajouter l'hypothèse

$\exists C \exists D$ (growth_rate(efficient_producers, B) : C

$\wedge$ growth_rate(first_movers,B) : D

$\wedge$ greater(C, D))

qui permettra, au moment du traitement des hypothèses existentielles de créer les growth_rate(...) qui sont nécessaires

Traitement des symboles fonctionnels

Avec le principe de résolution

on a vu qu'on a des symboles fonctionnels pour

1. la skolémisation des quantificateurs universels en position *négative*

2. la skolémisation des quantificateurs existentiels en position *positive*

3. les définitions de fonctions (par exemple pour définir des ensembles composer des applications)

4. d'autres fonctions

qui sont tous traités de la même façon car on a perdu leur origine.

Avec Muscadet

1. en général inutile
2. les $\exists$ restent près des sous-formules jusqu'à ce qu'il soit nécessaire des créer des objets (constantes), mais pas d'autres fonctions de Skolem
3. ces fonctions sont traitées en tenant compte du fait qu'il s'agit de définitions
4. ces fonctions ont un traitement spécifique, elles sont remplacées par des formules existentielles

Conclusion

- Malgré les progrès matériels et les progrès théoriques, les méthodes naturelles ont encore leur place en DAT
- **Complémentarité** :
  - redondance des représentations
  - analyser un énoncé et choisir un ou un autre type de méthode
- Possibilité de **combiner** les deux : prétraitement par des méthodes naturelles puis démonstration par le principe de résolution des sous-théorèmes non démontrés