Calcul explicite de formes automorphes

Aurel Page

7 février 2013

Formes modulaires classiques

$$\Gamma_0(N) := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod N\}$$

$$\mathcal{H}_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$ pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$f : \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ forme modulaire parabolique de poids k et niveau N si

- f holomorphe
- $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$ pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$
- $f(\gamma it) \to 0$ quand $t \to \infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$

On note $S_k(N)$ l'espace vectoriel de ces formes.

Formes modulaires classiques

$$\Gamma_0(N) := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod N\}$$

$$\mathcal{H}_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

$f : \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ forme modulaire parabolique de poids k et niveau N si

- f holomorphe
- $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$ pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$
- $f(\gamma it) \to 0$ quand $t \to \infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$

On note $S_k(N)$ l'espace vectoriel de ces formes.

Formes modulaires classiques

$$\Gamma_0(N) := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod N\}$$

$$\mathcal{H}_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

$f : \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ forme modulaire parabolique de poids k et niveau N si

- f holomorphe
- $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$ pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$
- $f(\gamma it) \to 0$ quand $t \to \infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$

On note $S_k(N)$ l'espace vectoriel de ces formes.

Opérateurs de Hecke

$T_p \in \mathrm{End}(S_k(N))$ pour p premier :
$T_p f(z) := \frac{1}{p} \sum_{j \bmod p} f(\frac{z+j}{p}) + \delta_{p \nmid N} p^{k-1} f(pz)$

Théorème

La dimension de $S_k(N)$ est finie, et les opérateurs T_p sont simultanément diagonalisables.

Base de formes propres f : $T_p f = a_p f$

Opérateurs de Hecke

$T_p \in \mathrm{End}(S_k(N))$ pour p premier :
$T_p f(z) := \frac{1}{p} \sum_{j \bmod p} f(\frac{z+j}{p}) + \delta_{p \nmid N} p^{k-1} f(pz)$

Théorème

La dimension de $S_k(N)$ est finie, et les opérateurs T_p sont simultanément diagonalisables.

Base de formes propres f : $T_p f = a_p f$

Opérateurs de Hecke

$T_p \in \mathrm{End}(S_k(N))$ pour p premier :

$T_p f(z) := \frac{1}{p} \sum_{j \bmod p} f(\frac{z+j}{p}) + \delta_{p \nmid N} p^{k-1} f(pz)$

Théorème

La dimension de $S_k(N)$ est finie, et les opérateurs T_p sont simultanément diagonalisables.

Base de formes propres f : $T_p f = a_p f$

Fonctions L

f forme parabolique propre de poids k, niveau N, « nouvelle. »

$$L(f,s) := \prod_{p\nmid N}(1-a_p p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}\prod_{p\mid N}(1-a_p p^{-s})^{-1} \quad (\mathrm{Re}(s) \gg 0)$$

$$\Lambda(f,s) := N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$$

Théorème

$\Lambda(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f,k-s) = \pm\Lambda(f,s).$$

Fonctions L

f forme parabolique propre de poids k, niveau N, « nouvelle. »

$$L(f,s) := \prod_{p \nmid N}(1-a_p p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1} \prod_{p \mid N}(1-a_p p^{-s})^{-1} \; (\mathrm{Re}(s) \gg 0)$$

$$\Lambda(f,s) := N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$$

Théorème

$\Lambda(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f,k-s) = \pm\Lambda(f,s).$$

Fonctions L

f forme parabolique propre de poids k, niveau N, « nouvelle. »

$$L(f,s) := \prod_{p\nmid N}(1-a_p p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}\prod_{p\mid N}(1-a_p p^{-s})^{-1}\ (\mathrm{Re}(s)\gg 0)$$

$$\Lambda(f,s) := N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$$

Théorème

$\Lambda(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f,k-s) = \pm\Lambda(f,s).$$

Fonctions L

f forme parabolique propre de poids k, niveau N, « nouvelle. »

$$L(f,s) := \prod_{p\nmid N}(1-a_p p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}\prod_{p|N}(1-a_p p^{-s})^{-1}\ (\mathrm{Re}(s)\gg 0)$$

$$\Lambda(f,s) := N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$$

Théorème

$\Lambda(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f,k-s) = \pm\Lambda(f,s).$$

Isomorphisme d'Eichler-Shimura

Pour $k \geq 2$, soit V_k le sous-espace de $\mathbb{R}[X,Y]$ des polynômes homogènes de degré $k-2$, muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par changement de variables :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(X,Y) := P(aX+cY, bX+dY)$$

Soit $z \in \mathcal{H}_2$, $f \in S_k(N)$. On pose pour $\gamma \in \Gamma_0(N)$:

$$\phi_f(\gamma) = \int_z^{\gamma z} f(t)(tX+Y)^{k-2}\,\mathrm{d}t$$

Isomorphisme d'Eichler-Shimura

Pour $k \geq 2$, soit V_k le sous-espace de $\mathbb{R}[X, Y]$ des polynômes homogènes de degré $k - 2$, muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par changement de variables :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(X, Y) := P(aX + cY, bX + dY)$$

Soit $z \in \mathcal{H}_2$, $f \in S_k(N)$. On pose pour $\gamma \in \Gamma_0(N)$:

$$\phi_f(\gamma) = \int_z^{\gamma z} f(t)(tX + Y)^{k-2}\,\mathrm{d}t$$

Isomorphisme d'Eichler-Shimura

Pour $k \geq 2$, soit V_k le sous-espace de $\mathbb{R}[X, Y]$ des polynômes homogènes de degré $k-2$, muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par changement de variables :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(X, Y) := P(aX + cY, bX + dY)$$

Soit $z \in \mathcal{H}_2$, $f \in S_k(N)$. On pose pour $\gamma \in \Gamma_0(N)$:

$$\phi_f(\gamma) = \int_z^{\gamma z} f(t)(tX + Y)^{k-2}\,\mathrm{d}t$$

Calcul de la relation de cocycle

On a :

$$\phi_f(\gamma\gamma') = \phi_f(\gamma) + \gamma \cdot \phi_f(\gamma')$$

et changer z en z' modifie $\phi_f(\gamma)$ de

$$P_f - \gamma \cdot P_f$$

où

$$P_f = \int_z^{z'} f(t)(tX+Y)^{k-2}\,\mathrm{d}t \in V_k.$$

Calcul de la relation de cocycle

On a :

$$\phi_f(\gamma\gamma') = \phi_f(\gamma) + \gamma \cdot \phi_f(\gamma')$$

et changer z en z' modifie $\phi_f(\gamma)$ de

$$P_f - \gamma \cdot P_f$$

où

$$P_f = \int_z^{z'} f(t)(tX + Y)^{k-2}\,\mathrm{d}t \in V_k.$$

Cohomologie des groupes

G un groupe agissant à gauche sur un groupe abélien M.

Cocycles :

$$Z^1(G,M) := \{\phi : G \to M \mid \phi(gh) = \phi(g) + g \cdot \phi(h)\ \forall g,h \in G\}$$

Cobords :

$$B^1(G,M) := \{\phi_m : g \mapsto m - g \cdot m :\ m \in M\} \subset Z^1(G,M)$$

Cohomologie :

$$H^1(G,M) := Z^1(G,M)/B^1(G,M)$$

Cohomologie des groupes

G un groupe agissant à gauche sur un groupe abélien M.
Cocycles :

$$Z^1(G,M) := \{\phi : G \to M \mid \phi(gh) = \phi(g) + g \cdot \phi(h)\ \forall g,h \in G\}$$

Cobords :

$$B^1(G,M) := \{\phi_m : g \mapsto m - g \cdot m :\ m \in M\} \subset Z^1(G,M)$$

Cohomologie :

$$H^1(G,M) := Z^1(G,M)/B^1(G,M)$$

Cohomologie des groupes

G un groupe agissant à gauche sur un groupe abélien M.
Cocycles :

$$Z^1(G,M) := \{\phi : G \to M \mid \phi(gh) = \phi(g) + g \cdot \phi(h)\ \forall g,h \in G\}$$

Cobords :

$$B^1(G,M) := \{\phi_m : g \mapsto m - g \cdot m : \ m \in M\} \subset Z^1(G,M)$$

Cohomologie :

$$H^1(G,M) := Z^1(G,M)/B^1(G,M)$$

Cohomologie des groupes

G un groupe agissant à gauche sur un groupe abélien M.
Cocycles :

$$Z^1(G,M) := \{\phi : G \to M \mid \phi(gh) = \phi(g) + g \cdot \phi(h)\ \forall g,h \in G\}$$

Cobords :

$$B^1(G,M) := \{\phi_m : g \mapsto m - g \cdot m :\ m \in M\} \subset Z^1(G,M)$$

Cohomologie :

$$H^1(G,M) := Z^1(G,M)/B^1(G,M)$$

Isomorphisme d'Eichler-Shimura

Théorème (Eichler-Shimura)

Soit $k \geq 2$. L'application

$$\Psi : \begin{cases} S_k(N) \longrightarrow H^1_p(\Gamma_0(N), V_k) \\ f \longmapsto \mathrm{Re}(\phi_f) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Opérateurs de Hecke sur la cohomologie

Soit $\pi \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On a

$$\Gamma_0(N)\pi\Gamma_0(N) = \coprod_{i=1}^{m} \Gamma_0(N)\pi_i.$$

$$T_\pi\phi(\gamma) := \det\pi \sum_{i=1}^{m} \pi_i^{-1} \cdot \phi(\pi_i\gamma\pi_{j(i)}^{-1}) \text{ où } \pi_i\gamma \in \Gamma_0(N)\pi_{j(i)}$$

On a alors $\Psi(T_p f) = T_\pi\Psi(f)$ pour $\pi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lorsque $p \nmid N$.

Opérateurs de Hecke sur la cohomologie

Soit $\pi \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On a

$$\Gamma_0(N)\pi\Gamma_0(N) = \coprod_{i=1}^{m} \Gamma_0(N)\pi_i.$$

$$T_\pi\phi(\gamma) := \det\pi \sum_{i=1}^{m} \pi_i^{-1} \cdot \phi(\pi_i\gamma\pi_{j(i)}^{-1}) \text{ où } \pi_i\gamma \in \Gamma_0(N)\pi_{j(i)}$$

On a alors $\Psi(T_p f) = T_\pi\Psi(f)$ pour $\pi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lorsque $p \nmid N$.

Opérateurs de Hecke sur la cohomologie

Soit $\pi \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On a

$$\Gamma_0(N)\pi\Gamma_0(N) = \coprod_{i=1}^{m} \Gamma_0(N)\pi_i.$$

$$T_\pi\phi(\gamma) := \det\pi \sum_{i=1}^{m} \pi_i^{-1} \cdot \phi(\pi_i\gamma\pi_{j(i)}^{-1}) \text{ où } \pi_i\gamma \in \Gamma_0(N)\pi_{j(i)}$$

On a alors $\Psi(T_p f) = T_\pi\Psi(f)$ pour $\pi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lorsque $p \nmid N$.

Opérateurs de Hecke sur la cohomologie

Soit $\pi \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On a

$$\Gamma_0(N)\pi\Gamma_0(N) = \coprod_{i=1}^{m} \Gamma_0(N)\pi_i.$$

$$T_\pi\phi(\gamma) := \det\pi \sum_{i=1}^{m} \pi_i^{-1} \cdot \phi(\pi_i\gamma\pi_{j(i)}^{-1}) \text{ où } \pi_i\gamma \in \Gamma_0(N)\pi_{j(i)}$$

On a alors $\Psi(T_p f) = T_\pi\Psi(f)$ pour $\pi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lorsque $p \nmid N$.

Généralisation

F corps de nombres, $\mathbb{Z}_F$ son anneau des entiers.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F) \rightsquigarrow$ version tordue Γ

But : calculer $H^1(\Gamma, M)$ et T_π

Généralisation

F corps de nombres, $\mathbb{Z}_F$ son anneau des entiers.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F) \rightsquigarrow$ version tordue Γ

But : calculer $H^1(\Gamma, M)$ et T_π

Généralisation

F corps de nombres, $\mathbb{Z}_F$ son anneau des entiers.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F) \rightsquigarrow$ version tordue Γ

But : calculer $H^1(\Gamma, M)$ et T_π

Généralisation

F corps de nombres, $\mathbb{Z}_F$ son anneau des entiers.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F) \rightsquigarrow$ version tordue Γ

But : calculer $H^1(\Gamma, M)$ et T_π

Généralisation

F corps de nombres, $\mathbb{Z}_F$ son anneau des entiers.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F) \rightsquigarrow$ version tordue Γ

But : calculer $H^1(\Gamma, M)$ et T_π

Algèbres de quaternions

Soit F corps de caractéristique 0. Algèbre de quaternions sur F :

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) := F + Fi + Fj + Fij$$

où $i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij$.

Pour $w = x + yi + zj + tij$ on définit :

- son conjugué : $\bar{w} = x - yi - zj - tij$
- sa trace réduite : $\mathrm{trd}(w) = w + \bar{w} = 2x \in F$
- sa norme réduite : $\mathrm{nrd}(w) = w\bar{w} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2 \in F$

Algèbres de quaternions

Soit F corps de caractéristique 0. Algèbre de quaternions sur F :

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) := F + Fi + Fj + Fij$$

$$\text{où } i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij.$$

Pour $w = x + yi + zj + tij$ on définit :

- son conjugué : $\bar{w} = x - yi - zj - tij$
- sa trace réduite : $\mathrm{trd}(w) = w + \bar{w} = 2x \in F$
- sa norme réduite : $\mathrm{nrd}(w) = w\bar{w} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2 \in F$

Algèbres de quaternions

Soit F corps de caractéristique 0. Algèbre de quaternions sur F :

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) := F + Fi + Fj + Fij$$

$$\text{où } i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij.$$

Pour $w = x + yi + zj + tij$ on définit :

- son conjugué : $\bar{w} = x - yi - zj - tij$
- sa trace réduite : $\mathrm{trd}(w) = w + \bar{w} = 2x \in F$
- sa norme réduite : $\mathrm{nrd}(w) = w\bar{w} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2 \in F$

Algèbres de quaternions

Soit F corps de caractéristique 0. Algèbre de quaternions sur F :

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) := F + Fi + Fj + Fij$$

$$\text{où } i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij.$$

Pour $w = x + yi + zj + tij$ on définit :

- son conjugué : $\bar{w} = x - yi - zj - tij$
- sa trace réduite : $\operatorname{trd}(w) = w + \bar{w} = 2x \in F$
- sa norme réduite : $\operatorname{nrd}(w) = w\bar{w} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2 \in F$

Exemple d'algèbre de quaternions

On a

$$\left(\frac{1,1}{F}\right) \cong \mathcal{M}_2(F)$$

en envoyant

$$i \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } j \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et alors

$$\mathrm{nrd} \longmapsto \det$$

Si F est algébriquement clos, c'est la seule à isomorphisme près.

Exemple d'algèbre de quaternions

On a

$$\left(\frac{1,1}{F}\right) \cong \mathcal{M}_2(F)$$

en envoyant

$$i \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } j \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et alors

$$\mathrm{nrd} \longmapsto \det$$

Si F est algébriquement clos, c'est la seule à isomorphisme près.

Comportement local

Les seules algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$ sont :

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et
- $\mathbb{H} := \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$.

Pour B une algèbre de quaternions sur un corps de nombre F, notion de discriminant $\Delta_B \subset \mathbb{Z}_F$ (idéal sans facteur carré).

Comportement local

Les seules algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$ sont :

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et
- $\mathbb{H} := \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$.

Pour B une algèbre de quaternions sur un corps de nombre F, notion de discriminant $\Delta_B \subset \mathbb{Z}_F$ (idéal sans facteur carré).

Ordres, unités

Un ordre $\mathcal{O} \subset B$ est un sous-anneau de B qui est un $\mathbb{Z}_F$-module de type fini, et tel que $F\mathcal{O} = B$.

Exemples :

- $\mathbb{Z}_F + \mathbb{Z}_F i + \mathbb{Z}_F j + \mathbb{Z}_F ij$ dans $\left(\frac{a,b}{F}\right)$,
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$ dans $\mathcal{M}_2(F)$.

On pose $\mathcal{O}_1^\times = \{w \in \mathcal{O} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\} \subset \mathcal{O}^\times$.

Pour $\mathcal{O} = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$, on a $\mathcal{O}_1^\times = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F)$.

Ordres, unités

Un ordre $\mathcal{O} \subset B$ est un sous-anneau de B qui est un $\mathbb{Z}_F$-module de type fini, et tel que $F\mathcal{O} = B$.

Exemples :

- $\mathbb{Z}_F + \mathbb{Z}_F i + \mathbb{Z}_F j + \mathbb{Z}_F ij$ dans $\left(\frac{a,b}{F}\right)$,
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$ dans $\mathcal{M}_2(F)$.

On pose $\mathcal{O}_1^\times = \{w \in \mathcal{O} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\} \subset \mathcal{O}^\times$.
Pour $\mathcal{O} = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$, on a $\mathcal{O}_1^\times = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F)$.

Ordres, unités

Un ordre $\mathcal{O} \subset B$ est un sous-anneau de B qui est un $\mathbb{Z}_F$-module de type fini, et tel que $F\mathcal{O} = B$.
Exemples :

- $\mathbb{Z}_F + \mathbb{Z}_F i + \mathbb{Z}_F j + \mathbb{Z}_F ij$ dans $\left(\frac{a,b}{F}\right)$,
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$ dans $\mathcal{M}_2(F)$.

On pose $\mathcal{O}_1^\times = \{w \in \mathcal{O} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\} \subset \mathcal{O}^\times$.
Pour $\mathcal{O} = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$, on a $\mathcal{O}_1^\times = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F)$.

Ordres, unités

Un ordre $\mathcal{O} \subset B$ est un sous-anneau de B qui est un $\mathbb{Z}_F$-module de type fini, et tel que $F\mathcal{O} = B$.
Exemples :

- $\mathbb{Z}_F + \mathbb{Z}_F i + \mathbb{Z}_F j + \mathbb{Z}_F ij$ dans $\left(\frac{a,b}{F}\right)$,
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$ dans $\mathcal{M}_2(F)$.

On pose $\mathcal{O}_1^\times = \{w \in \mathcal{O} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\} \subset \mathcal{O}^\times$.
Pour $\mathcal{O} = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$, on a $\mathcal{O}_1^\times = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F)$.

Ordres, unités

Un ordre $\mathcal{O} \subset B$ est un sous-anneau de B qui est un $\mathbb{Z}_F$-module de type fini, et tel que $F\mathcal{O} = B$.
Exemples :

- $\mathbb{Z}_F + \mathbb{Z}_F i + \mathbb{Z}_F j + \mathbb{Z}_F ij$ dans $\left(\frac{a,b}{F}\right)$,
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$ dans $\mathcal{M}_2(F)$.

On pose $\mathcal{O}_1^\times = \{w \in \mathcal{O} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\} \subset \mathcal{O}^\times$.
Pour $\mathcal{O} = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$, on a $\mathcal{O}_1^\times = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F)$.

Jacquet-Langlands, en agitant les mains

F corps de nombres, B algèbre de quaternions sur F, $\mathcal{O}$ ordre dans B.

formes automorphes pour $B^\times$ $\leftrightsquigarrow$ certaines formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(F)$

valeurs propres de Hecke dans $H^1(\mathcal{O}_1^\times, M)$ $\leftrightsquigarrow$ valeurs propres de Hecke de certaines formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(F)$

Jacquet-Langlands, en agitant les mains

F corps de nombres, B algèbre de quaternions sur F, $\mathcal{O}$ ordre dans B.

formes automorphes pour $B^\times$	$\leftrightsquigarrow$	certaines formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(F)$
valeurs propres de Hecke dans $H^1(\mathcal{O}_1^\times, M)$	$\leftrightsquigarrow$	valeurs propres de Hecke de certaines formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(F)$

Jacquet-Langlands, en agitant les mains

F corps de nombres, B algèbre de quaternions sur F, $\mathcal{O}$ ordre dans B.

formes automorphes pour $B^\times$	$\leftrightsquigarrow$	certaines formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(F)$
valeurs propres de Hecke dans $H^1(\mathcal{O}_1^\times, M)$	$\leftrightsquigarrow$	valeurs propres de Hecke de certaines formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(F)$

Jacquet, Langlands, exemples précis

Théorème (Jacquet-Langlands)

Soit $F = \mathbb{Q}$, B de discriminant $N \neq 1$ telle que $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{O} \subset B$ un ordre maximal. Soit $k \geq 2$. Alors

$$H^1(\mathcal{O}_1^\times, V_k) \cong S_k(N)^{nouv}$$

comme Hecke-modules.

Jacquet, Langlands, exemples précis

Théorème (Jacquet-Langlands)

Soit $F = \mathbb{Q}$, B de discriminant $N \neq 1$ telle que $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{O} \subset B$ un ordre maximal. Soit $k \geq 2$. Alors

$$H^1(\mathcal{O}_1^\times, V_k) \cong S_k(N)^{nouv}$$

comme Hecke-modules.

Jacquet-Langlands, exemples précis

Théorème (Jacquet, Langlands)

Soit F quadratique imaginaire, et B de discriminant $\Delta \neq \mathbb{Z}_F$, et $\mathcal{O} \subset B$ un ordre maximal. Soit $k, l \geq 2$. On définit

$$\Gamma_0(\Delta) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod \Delta\}, \text{ et}$$

$$E_{k,l} := \mathrm{Sym}^k \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathrm{Sym}^l \mathbb{C}^2}.$$

Alors

$$H^1(\mathcal{O}_1^\times, E_{k,l}) \cong H^1_p(\Gamma_0(\Delta), E_{k,l})^{nouv}$$

comme Hecke-modules.

Jacquet-Langlands, exemples précis

Théorème (Jacquet, Langlands)

Soit F quadratique imaginaire, et B de discriminant $\Delta \neq \mathbb{Z}_F$, et $\mathcal{O} \subset B$ un ordre maximal. Soit $k, l \geq 2$. On définit

$$\Gamma_0(\Delta) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_F) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod \Delta\}, \textit{ et}$$

$$E_{k,l} := \mathrm{Sym}^k \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathrm{Sym}^l} \mathbb{C}^2.$$

Alors

$$H^1(\mathcal{O}_1^\times, E_{k,l}) \cong H_p^1(\Gamma_0(\Delta), E_{k,l})^{nouv}$$

comme Hecke-modules.

Calcul de H^1

Relation de cocycle $\Longrightarrow$ un cocycle ϕ est déterminé par sa valeur sur des générateurs g_i.

Relation entre les générateurs $\Longrightarrow$ relation linéaire entre les $\phi(g_i)$.

Présentation finie de G $\Longrightarrow$ calcul de $H^1(G, M)$ par algèbre linéaire.

Calcul de H^1

Relation de cocycle $\Longrightarrow$ un cocycle ϕ est déterminé par sa valeur sur des générateurs g_i.

Relation entre les générateurs $\Longrightarrow$ relation linéaire entre les $\phi(g_i)$.

Présentation finie de G $\Longrightarrow$ calcul de $H^1(G, M)$ par algèbre linéaire.

Calcul de H^1

Relation de cocycle $\Longrightarrow$ un cocycle ϕ est déterminé par sa valeur sur des générateurs g_i.

Relation entre les générateurs $\Longrightarrow$ relation linéaire entre les $\phi(g_i)$.

Présentation finie de G $\Longrightarrow$ calcul de $H^1(G, M)$ par algèbre linéaire.

Calcul de H^1

Relation de cocycle $\implies$ un cocycle ϕ est déterminé par sa valeur sur des générateurs g_i.

Relation entre les générateurs $\implies$ relation linéaire entre les $\phi(g_i)$.

Présentation finie de $G \implies$ calcul de $H^1(G, M)$ par algèbre linéaire.

Calcul de T_π

Rappel :

$$T_\pi \phi(g) = \sum_{j=1}^{m} \varpi_j \cdot \phi(\gamma(j, g))$$

Calcul : exprimer $\gamma(j, g)$ comme produit des générateurs puis utiliser la relation de cocycle.

Calcul de T_π

Rappel :

$$T_\pi \phi(g) = \sum_{j=1}^{m} \varpi_j \cdot \phi(\gamma(j, g))$$

Calcul : exprimer $\gamma(j, g)$ comme produit des générateurs puis utiliser la relation de cocycle.

Action discontinue du groupe $\mathcal{O}_1^\times$

Théorème

Soit B une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F et $\mathcal{O} \subset B$ un ordre. On note $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H}^a \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^b \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^c$. Soit $X = \mathcal{H}_2^b \times \mathcal{H}_3^c$. Alors l'action de $\mathcal{O}_1^\times$ sur X est proprement discontinue, et le quotient est de volume fini. Si B n'est pas isomorphe à $\mathcal{M}_2(F)$, le quotient est compact.

Action discontinue du groupe $\mathcal{O}_1^\times$

Théorème

Soit B une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F et $\mathcal{O} \subset B$ un ordre. On note $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H}^a \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^b \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^c$. Soit $X = \mathcal{H}_2^b \times \mathcal{H}_3^c$. Alors l'action de $\mathcal{O}_1^\times$ sur X est proprement discontinue, et le quotient est de volume fini. Si B n'est pas isomorphe à $\mathcal{M}_2(F)$, le quotient est compact.

Cas particuliers

Soit F un corps de nombres de degré n et B une algèbre de quaternions sur F.

- Si $B \cong \mathcal{M}_2(F)$, alors $X = \mathcal{H}_2^b \times \mathcal{H}_3^c$ avec $n = b + 2c$, et $\dim X = 2b + 3c \geq \frac{3}{2}n$;
- si F est totalement réel et B est ramifiée à toutes les places réelles sauf une, alors $X = \mathcal{H}_2$;
- si F a exactement une place complexe et B est ramifiée à toutes les places réelles, alors $X = \mathcal{H}_3$.

Cas particuliers

Soit F un corps de nombres de degré n et B une algèbre de quaternions sur F.

- Si $B \cong \mathcal{M}_2(F)$, alors $X = \mathcal{H}_2^b \times \mathcal{H}_3^c$ avec $n = b + 2c$, et $\dim X = 2b + 3c \geq \frac{3}{2}n$;
- si F est totalement réel et B est ramifiée à toutes les places réelles sauf une, alors $X = \mathcal{H}_2$;
- si F a exactement une place complexe et B est ramifiée à toutes les places réelles, alors $X = \mathcal{H}_3$.

Cas particuliers

Soit F un corps de nombres de degré n et B une algèbre de quaternions sur F.

- Si $B \cong \mathcal{M}_2(F)$, alors $X = \mathcal{H}_2^b \times \mathcal{H}_3^c$ avec $n = b + 2c$, et $\dim X = 2b + 3c \geq \frac{3}{2}n$;
- si F est totalement réel et B est ramifiée à toutes les places réelles sauf une, alors $X = \mathcal{H}_2$;
- si F a exactement une place complexe et B est ramifiée à toutes les places réelles, alors $X = \mathcal{H}_3$.

Cas particuliers

Soit F un corps de nombres de degré n et B une algèbre de quaternions sur F.

- Si $B \cong \mathcal{M}_2(F)$, alors $X = \mathcal{H}_2^b \times \mathcal{H}_3^c$ avec $n = b + 2c$, et $\dim X = 2b + 3c \geq \frac{3}{2}n$;
- si F est totalement réel et B est ramifiée à toutes les places réelles sauf une, alors $X = \mathcal{H}_2$;
- si F a exactement une place complexe et B est ramifiée à toutes les places réelles, alors $X = \mathcal{H}_3$.

Domaines fondamentaux

Soit Γ un groupe agissant proprement discontinûment sur un espace $X = \mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_3$. Un ouvert D de X est un domaine fondamental si

- $\Gamma \cdot \overline{D} = X$
- $\gamma \cdot D \cap D \neq \emptyset \Rightarrow \gamma = 1$

Domaines de Dirichlet

Soit $p \in X$ de stabilisateur trivial dans Γ. L'ouvert

$$\begin{aligned} D_p(\Gamma) &:= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\} \\ &= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(x, \gamma^{-1} \cdot p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\}. \end{aligned}$$

est un domaine fondamental pour Γ. Si $\Gamma \backslash X$ est compact, alors $\overline{D_p(\Gamma)}$ est compact, délimité par un nombre fini de faces correspondant à une partie finie $S \subset \Gamma$.

Domaines de Dirichlet

Soit $p \in X$ de stabilisateur trivial dans Γ. L'ouvert

$$\begin{aligned} D_p(\Gamma) &:= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\} \\ &= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(x, \gamma^{-1} \cdot p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\}. \end{aligned}$$

est un domaine fondamental pour Γ. Si $\Gamma \backslash X$ est compact, alors $\overline{D_p(\Gamma)}$ est compact, délimité par un nombre fini de faces correspondant à une partie finie $S \subset \Gamma$.

Domaines de Dirichlet

Soit $p \in X$ de stabilisateur trivial dans Γ. L'ouvert

$$\begin{aligned} D_p(\Gamma) &:= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\} \\ &= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(x, \gamma^{-1} \cdot p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\}. \end{aligned}$$

est un domaine fondamental pour Γ. Si $\Gamma \backslash X$ est compact, alors $\overline{D_p(\Gamma)}$ est compact, délimité par un nombre fini de faces correspondant à une partie finie $S \subset \Gamma$.

Domaines de Dirichlet, générateurs

Une telle partie $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$ engendre Γ :

- soit $\gamma \in \Gamma$, poser $x = \gamma^{-1} \cdot p$;
- multiplier x par $g_i \in S$ pour réduire $\mathrm{d}(x, p) \rightsquigarrow x \in D_p(\Gamma)$;
- alors $x = g_n \dots g_1 \gamma^{-1} \cdot p = p$ i.e. $\gamma = g_n \dots g_1$.

Domaines de Dirichlet, générateurs

Une telle partie $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$ engendre Γ :

- soit $\gamma \in \Gamma$, poser $x = \gamma^{-1} \cdot p$;
- multiplier x par $g_i \in S$ pour réduire $\mathrm{d}(x, p) \rightsquigarrow x \in D_p(\Gamma)$;
- alors $x = g_n \dots g_1 \gamma^{-1} \cdot p = p$ i.e. $\gamma = g_n \dots g_1$.

Domaines de Dirichlet, générateurs

Une telle partie $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$ engendre Γ :

- soit $\gamma \in \Gamma$, poser $x = \gamma^{-1} \cdot p$;
- multiplier x par $g_i \in S$ pour réduire $\mathrm{d}(x, p) \rightsquigarrow x \in D_p(\Gamma)$;
- alors $x = g_n \dots g_1 \gamma^{-1} \cdot p = p$ i.e. $\gamma = g_n \dots g_1$.

Domaines de Dirichlet, générateurs

Une telle partie $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$ engendre Γ :

- soit $\gamma \in \Gamma$, poser $x = \gamma^{-1} \cdot p$;
- multiplier x par $g_i \in S$ pour réduire $\mathrm{d}(x, p) \rightsquigarrow x \in D_p(\Gamma)$;
- alors $x = g_n \dots g_1 \gamma^{-1} \cdot p = p$ i.e. $\gamma = g_n \dots g_1$.

Domaines de Dirichlet, relations

Recollement du domaine fondamental autour d'un point $\rightsquigarrow$ relation entre les générateurs.

$\rightsquigarrow$ présentation pour Γ.

Domaines de Dirichlet, relations

Recollement du domaine fondamental autour d'un point $\rightsquigarrow$ relation entre les générateurs.

$\rightsquigarrow$ présentation pour Γ.

Résumé

1. Choisir une algèbre de quaternions B et un ordre $\mathcal{O}$
2. énumérer des éléments de $\Gamma = \mathcal{O}_1^\times/\pm 1$ dans un ensemble fini S
3. calculer $D_p(S)$ et s'arrêter si égal à $D_p(\Gamma)$
4. calculer une présentation pour Γ
5. en déduire $H^1(\Gamma, M)$
6. calculer T_π : formule + réduction
7. diagonaliser simultanément les $T_\pi \rightsquigarrow$ valeurs propres.

Résumé

1. Choisir une algèbre de quaternions B et un ordre $\mathcal{O}$
2. énumérer des éléments de $\Gamma = \mathcal{O}_1^\times/\pm 1$ dans un ensemble fini S
3. calculer $D_p(S)$ et s'arrêter si égal à $D_p(\Gamma)$
4. calculer une présentation pour Γ
5. en déduire $H^1(\Gamma, M)$
6. calculer T_π : formule + réduction
7. diagonaliser simultanément les $T_\pi \rightsquigarrow$ valeurs propres.

Résumé

1. Choisir une algèbre de quaternions B et un ordre $\mathcal{O}$
2. énumérer des éléments de $\Gamma = \mathcal{O}_1^\times/\pm 1$ dans un ensemble fini S
3. calculer $D_p(S)$ et s'arrêter si égal à $D_p(\Gamma)$
4. calculer une présentation pour Γ
5. en déduire $H^1(\Gamma, M)$
6. calculer T_π : formule + réduction
7. diagonaliser simultanément les $T_\pi \rightsquigarrow$ valeurs propres.

Résumé

1. Choisir une algèbre de quaternions B et un ordre $\mathcal{O}$
2. énumérer des éléments de $\Gamma = \mathcal{O}_1^\times/\pm 1$ dans un ensemble fini S
3. calculer $D_p(S)$ et s'arrêter si égal à $D_p(\Gamma)$
4. calculer une présentation pour Γ
5. en déduire $H^1(\Gamma, M)$
6. calculer T_π : formule + réduction
7. diagonaliser simultanément les $T_\pi \rightsquigarrow$ valeurs propres.

Résumé

1. Choisir une algèbre de quaternions B et un ordre $\mathcal{O}$
2. énumérer des éléments de $\Gamma = \mathcal{O}_1^\times/\pm 1$ dans un ensemble fini S
3. calculer $D_p(S)$ et s'arrêter si égal à $D_p(\Gamma)$
4. calculer une présentation pour Γ
5. en déduire $H^1(\Gamma, M)$
6. calculer T_π : formule + réduction
7. diagonaliser simultanément les $T_\pi \rightsquigarrow$ valeurs propres.

Résumé

1. Choisir une algèbre de quaternions B et un ordre $\mathcal{O}$
2. énumérer des éléments de $\Gamma = \mathcal{O}_1^\times / \pm 1$ dans un ensemble fini S
3. calculer $D_p(S)$ et s'arrêter si égal à $D_p(\Gamma)$
4. calculer une présentation pour Γ
5. en déduire $H^1(\Gamma, M)$
6. calculer T_π : formule + réduction
7. diagonaliser simultanément les $T_\pi \rightsquigarrow$ valeurs propres.

Résumé

1. Choisir une algèbre de quaternions B et un ordre $\mathcal{O}$
2. énumérer des éléments de $\Gamma = \mathcal{O}_1^\times/\pm 1$ dans un ensemble fini S
3. calculer $D_p(S)$ et s'arrêter si égal à $D_p(\Gamma)$
4. calculer une présentation pour Γ
5. en déduire $H^1(\Gamma, M)$
6. calculer T_π : formule + réduction
7. diagonaliser simultanément les $T_\pi \rightsquigarrow$ valeurs propres.

Résumé

1. Choisir une algèbre de quaternions B et un ordre $\mathcal{O}$
2. énumérer des éléments de $\Gamma = \mathcal{O}_1^\times/\pm 1$ dans un ensemble fini S
3. calculer $D_p(S)$ et s'arrêter si égal à $D_p(\Gamma)$
4. calculer une présentation pour Γ
5. en déduire $H^1(\Gamma, M)$
6. calculer T_π : formule + réduction
7. diagonaliser simultanément les $T_\pi \rightsquigarrow$ valeurs propres.

Exemple

Soit F le corps de nombre totalement réel engendré par une racine w de $X^3 - X^2 - 12X - 11$.

Soit B l'algèbre de quaternions $\left(\frac{w^2-3w-6,-1}{F}\right)$.

Alors $\Delta_B = \mathbb{Z}_F$ et $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_F + \mathbb{Z}_F i + \mathbb{Z}_F \frac{1}{2}(w^2+w+wi+j) + \mathbb{Z}_F \frac{1}{2}(1+(w^2+w)i+ij)$, qui est un ordre maximal.

Exemple

Le groupe $\mathcal{O}_1^\times$ est engendré par les éléments
$\gamma_1 = (w^2-3w-5) - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}(2w^2-6w-11)j + \frac{1}{2}(w^2-3w-4)ij$,
$\gamma_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(w^2-3w-6)i + (-w^2+3w+5)j + \frac{1}{2}ij$,
$\gamma_3 = (-w^2+3w+5) - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}(-2w^2+6w+11)j + \frac{1}{2}(-w^2+3w+4)ij$,
$\gamma_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(w^2-3w-6)i + (-w^2+3w+5)j - \frac{1}{2}ij$,
$\gamma_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-w^2+3w+6)j + \frac{1}{2}wij$,
$\gamma_6 = -j$, $\gamma_7 = \frac{1}{2}(2w^2-7w-12)i + \frac{1}{2}(-6w^2+19w+30)j$
$+\frac{1}{2}(-2w^2+6w+11)ij$

avec les relations $\gamma_7^2 = -1$, $\gamma_6^2 = -1$, $\gamma_5^2 = -1$, $\gamma_4^2 = -1$,
$\gamma_2^2 = 1$, $(\gamma_3^{-1}\gamma_5^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_7\gamma_3\gamma_6\gamma_2\gamma_4^{-1}\gamma_1)^2 = -1$

Exemple

Alors $H^1(\mathcal{O}_1^\times, \mathbb{C})$ est de dimension 1. Les valeurs propres de Hecke sont :

$N(\mathfrak{p})$	8	11	23	27	29	31	37	43	47
$a_\mathfrak{p}$	-5	-2	-4	0	9	-10	-11	2	6

Merci pour votre attention !