Peut-on connaître le spectre d'une somme de matrices ?

Rémy Oudompheng

SPF — 23 janvier 2009

Résumé

Quelles sont les valeurs propres possibles de la somme de deux matrices hermitiennes, leurs spectres respectifs étant fixés ? La conjecture de saturation de Horn propose une liste d'inégalités vérifiées par le spectre de la somme, et on sait aujourd'hui que ces inégalités sont suffisantes.

En suivant un résumé de Fulton (arXiv :math/9908012) [Ful00], je parlerai des approches algébriques et combinatoires à ce problème, et essaierai de parler du problème «quantique» du spectre d'un produit de matrices unitaires.

Table des matières

1 La conjecture de Horn

1.1 Description du problème

Les valeurs propres d'une matrice hermitienne de taille n déterminent de manière unique un vecteur de longueur n de la forme $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de valeurs propres rangées en ordre décroissant (par exemple).

Étant donnés deux vecteurs α et β de vecteurs propres, une question naturelle se pose : quel est l'ensemble des vecteurs γ associés à la somme $A + B$ de deux matrices de spectres respectifs α et β ? Cette question peut par exemple apparaître en mécanique quantique, où les systèmes physiques les plus simples sont liés à des opérateurs hermitiens agissant sur un espace de dimension finie.

Une question similaire se pose pour les matrices symétriques réelles.

Les composantes de γ satisfont à certaines inégalités : par exemple $\gamma_1 \leqslant \alpha_1 + \beta_1$, ou plus difficile, $\gamma_k \leqslant \alpha_i + \beta_j$ si $k < i + j$ (Weyl). Dans les années 60, Horn [Hor62] définit une liste d'inégalités de la forme

$$\sum_{k\in K}\gamma_k \leqslant \sum_{i\in I}\alpha_i + \sum_{j\in J}\beta_j$$

et conjecture que les valeurs possibles de γ sont exactement celles qui vérifient ces inégalités (conjecture de Horn), en plus de la condition évidente sur la trace (sans perte de généralité, on peut d'ailleurs supposer que les matrices sont de trace nulle). On se demande également quelles sont les inégalités minimales permettant de déterminer les valeurs possibles de γ (qui forment en fait un polytope).

1.2 Trace de Rayleigh et variétés de Schubert

Soit V un espace hermitien, muni d'un endomorphisme f. La *trace de Rayleigh* de f sur E est $R_f(E) = \mathrm{Tr}(pfp)$ où p est le projecteur orthogonal sur E.

Comment obtenir un ordre de grandeur de la trace de Rayleigh ? Une méthode grossière mais exprimable abstraitement passe par les conditions de Schubert : soit $V_1 \subset V_2 \subset \cdots V_n$ le drapeau de V engendré par les vecteurs propres de valeur propre α_1, α_2, ..., α_n.

Soit I un ensemble de r nombres parmi $\{1, \ldots, n\}$. On dit que E de dimension r vérifie la condition de Schubert σ_I si E intersecte V_k en $\operatorname{card} I_{\leqslant k}$. On vérifie simplement que tout sous-espace vérifie une unique condition de Schubert. On note $\bar{I}$ l'ensemble $n+1-I$.

Ceci partitionne la grassmannienne en sous-espaces Ω_I^f (dépendant de la base de diagonalisation de f) appelés *cellules de Schubert*. Les *variétés de Schubert* sont les adhérences des cellules.

Il est facile de vérifier que si $E \in \Omega_I^f$, $R_f(E) \geqslant \sum_I \alpha_i$. Mais alors, si $f + g = h$, on a la relation :

$$R_f(E) + R_g(E) - R_h(E) = 0$$

donc si E appartient à Ω_I^f, Ω_J^g et Ω_K^{-h}

$$R_0(E) = 0 \geqslant \sum_I \alpha_i + \sum_J \beta_j + \sum_K \bar{\gamma}_k$$

soit

$$\sum_{\bar{K}} \gamma_k \geqslant \sum_i \alpha_i + \sum_J \beta_j$$

En remplaçant $\sum_I \alpha_i = \mathrm{Tr}_f - \sum_{I^c} \alpha_i$, on obtient

$$\sum_{\bar{K}^c} \gamma_k \leqslant \sum_{I^c} \alpha_i + \sum_{J^c} \beta_j$$

qui sont les inégalités définies par Horn.

1.3 Calcul de Schubert

Est-il possible de trouver un sous-espace E de dimension r situé à la fois dans Ω_I^f, Ω_J^g et Ω_K^{-h} ? La réponse est fournie par les outils de la topologie algébrique : le type d'intersection des sous-variétés (cycles) de la grassmannienne est encodé dans une structure d'algèbre, l'algèbre de cohomologie.

L'algèbre, la géométrie algébrique fournissent également des outils permettant de compter le nombre de solutions d'équations algébriques (généralisant le degré des polynômes) : on définit ainsi des classes d'équivalence d'équations (ou, de manière équivalentes, de sous-variétés algébriques), formant une structure d'anneau, l'*anneau de Chow*.

Pour la grassmannienne, ces deux structures sont naturellement isomorphes (à condition de choisir le corps $\mathbb{C}$ comme base), et forment un anneau dont une base sur $\mathbb{Z}$ est précisément constituée des classes d'équivalence de $\Omega_I^\bullet$, pour I parcourant les ensembles de r nombres parmi $\{1, \dots, n\}$.

Un système complexe de règles (Pieri, Giambelli, Littlewod-Richarson) a été établi pour mieux comprendre la structure de cet anneau. Une présentation algébrique utilise les polynômes de Schur : soit $\Omega^I = [\Omega_{\bar{I}}^\bullet]$. On note $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ et

$$\sigma^I = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} & \dots & x_1^{i_r} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} & \dots & x_2^{i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^{i_1} & x_r^{i_2} & \dots & x_r^{i_r} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} x_1^{1} & x_1^{2} & \dots & x_1^{r} \\ x_2^{1} & x_2^{2} & \dots & x_2^{r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^{1} & x_r^{2} & \dots & x_r^{r} \end{vmatrix}$$

Théorème 1.1. *Le coefficient de σ^K dans $\sigma^I \cdot \sigma^J$ est le même que celui de Ω^K dans $\Omega^I \cup \Omega^J$.*

Théorème 1.2 (Règle de Littlewood-Richardson)**.** *Le coefficient de σ^γ dans $\sigma^\alpha \cdot \sigma^\beta$ est le nombre de façons de compléter α en γ, en utilisant les cases de β* numérotées *par le numéro de ligne.*

Les remplissages admissibles doivent vérifier les conditions suivantes :

- *il est possible de les effectuer en utilisant chaque ligne de β successivement, les cases d'une même ligne allant dans des colonnes différentes (de sorte qu'à chaque étape on obtienne un diagramme)*
- *il est possible de les effectuer en retirant les cases de β une à une, et en les posant dans l'ordre lexicographique à côté de α, de sorte que β reste un diagramme à tout moment.*

2 Un exemple : la grassmannienne des plans de $\mathbb{C}^4$

2.1 Le calcul de Schubert dans Gr(2,4)

La grassmannienne des plans de $\mathbb{C}^4$ est une variété de dimension 4 possédant 6 classes de Schubert.

- Ω^{12} : plan générique (droite de l'espace projectif)
- Ω^{13} : plans intersectant un plan donné (droite sécante à une droite fixée)
- Ω^{14} : plans contenant une droite donnée (droite passant par un point)
- Ω^{23} : plans contenus dans un hyperplan (droites dans un plan)
- Ω^{24} : plans contenus dans un hyperplan et contenant une droite donnée (droites dans un plan passant par un point fixe)
- Ω^{34} : plan égal à un plan fixé (droite fixée)

On peut en fait montrer que c'est une quadrique de l'espace de dimension 5 et qu'elle contient naturellement des points, des droites, des $\mathbb{P}^3$ et deux familles disjointes de plans.

Les polynômes de Schur correspondants et ceux qui sont interdits sont :

$$\begin{aligned} \sigma^{12} &= 1 \\ \sigma^{13} &= x + y \\ \sigma^{14} &= x^2 + xy + y^2 \\ \sigma^{23} &= xy \\ \sigma^{24} &= x^2y + xy^2 \\ \sigma^{34} &= x^2y^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma^{15} &= x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 \\ \sigma^{16} &= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\ \sigma^{25} &= x^3y + x^2y^2 + xy^3 \end{aligned}$$

Ainsi, $(\sigma^{13})^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \sigma^{16} + 3\sigma^{25} + 2\sigma^{34}$, donc il existe en général 2 droites exactement coupant 4 droites tracées dans l'espace (affine). On a aussi $(\sigma^{13})^3 = \sigma^{15} + 2\sigma^{24}$: l'ensemble des droites sécantes à 3 droites fixées se comporte comme celui des droites passant par un point fixe situés dans l'un de deux plans fixés (une droite L_0 et L_1 et L_2 des droites génériques coupant L_0 en M_1 et M_2 définissent des plans P_1 et P_2. Une droite coupant les L_i est dans l'un des plans P_2 et passe par M_1 ou vice versa).

2.2 Inégalités de Horn en dimension 4

Décrivons les inégalités de Horn pour des matrices $A+B+C=0$ de spectres α_i, β_j, γ_k. La trace de Rayleigh en dimension 0 ne donne rien.

En dimension 1, on obtient : si $(4-i)+(4-j)+(4-k) \leqslant 4$ alors V_i^A, V_j^B et V_k^C contiennent un vecteur commun non nul, d'où l'on déduit

$$\alpha_i + \beta_j + \gamma_k \leqslant 0$$

Si $A+B=C$, on en déduit l'inégalité

$$\gamma_k \geqslant \alpha_i + \beta_j \text{ si } i+j \geqslant n+k$$

On montre aussi que

$$\gamma_k \leqslant \alpha_i + \beta_j \text{ si } i+j < k+1$$

En dimension 2, on a par exemple $\int \sigma^{12}\sigma^{13}\sigma^{24} = 1$: ceci implique qu'il existe un espace E dans $\Omega_{34}^A \cap \Omega_{24}^B \cap \Omega_{13}^C$. En particulier

$$0 \geqslant (\alpha_3+\alpha_4) + (\beta_2+\beta_4) + (\gamma_1+\gamma_3)$$

d'où dans le cas $A+B=C$

$$\gamma_1+\gamma_3 \leqslant \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_3$$

$$\gamma_2+\gamma_4 \geqslant \alpha_3+\alpha_4+\beta_2+\beta_4$$

Théorème 2.1 (Belkale)**.** *Les inégalités minimales décrivant les spectres possibles sont celles définis par les triplets de classes de Schubert d'intersection 1 exactement.*

3 Approche géométrique et théorie des représentations

3.1 Orbites coadjointes

L'ensemble des matrices hermitiennes ayant un spectre fixé est une orbite de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_n = iH_n$ pour l'action adjointe de U_n. Il s'identifie également par dualité à une orbite *coadjointe* $\mathcal{O}_\lambda$, qui est muni de manière canonique d'une structure symplectique (Lie, Kostant, Kirillov, Souriau).

En réalité, $\mathcal{O}_\lambda$ est l'ensemble des décompositions orthogonales de $\mathbb{C}^n$ en sous-espaces propres, qui est naturellement difféomorphe à la variété algébrique des drapeaux de taille adéquate dans $\mathbb{C}^n$.

La théorème de Borel-Weil-Bott-Kostant montre que si λ est entier, les structures symplectiques sur $\mathcal{O}_\lambda$ et sur la variété des drapeaux coïncident. La forme symplectique est alors une *forme de Kähler*.

On peut montrer que l'application associant à un drapeau la matrice hermitienne naturellement associée est une *application moment*. Cela signifie qu'elle contient toute l'information sur l'action du groupe U_n, par l'intermédiaire d'une collection de Hamiltoniens décrivant le flot induit par un vecteur de l'algèbre de Lie.

3.2 Réduction symplectique

L'intérêt des applications moment est de définir un quotient particulier des variétés symplectiques : si X est une variété symplectique avec une action d'un groupe G de moment μ, la réduction symplectique de X noté $X//G$ est $\mu^{-1}(0)/G$.

Théorème 3.1 (cf Mumford,Fogarty,Kirwan). *Si X est une variété projective munie d'une action linéarisée de G, la réduction symplectique naturelle de X par un sous-groupe compact maximal de G coïncide en tant que variété symplectique avec le quotient $X//G$ construit par la théorie géométrique des invariants de Mumford.*

En conséquence, le quotient algébrique est non vide si et seulement si l'application moment prend la valeur zéro.

En choisissant le moment sur la variété drapeau défini par les matrices hermitiennes, on voit qu'il existe des matrices hermitiennes de spectre fixé et de somme nulle si et seulement si la réduction symplectique du produit de ces variétés est non vide.

Si les spectres sont rationnels, ceci s'interprète comme une condition d'existence de sections SL_n-invariantes de fibrés en droites amples, qui correspond par le théorème de Borel-Weil-Bott à l'existence de vecteurs invariants dans certaines représentations de SL_n.

La réponse à ce problème correspond de nouveau à un calcul de coefficient de Littlewood-Richardson.

4 Problème de Horn quantique

Le problème *quantique* de Horn consiste à déterminer l'existence ou non de matrice unitaires ayant un spectre fixé dont le produit est égal à 1. On fixe donc des vecteurs du type $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ où les α_i sont des réels décroissants entre 0 et 1, et on cherche les matrices unitaires de spectre $(\exp(2i\pi\alpha_j))_{j=1}^n$.

Ce problème peut se reformuler en terme d'existence de systèmes locaux sur le complémentaire de 3 points dans la droite projective complexe, ayant une monodromie unitaire dont le spectre est prescrit. Cette approche, parallèle à l'approche géométrique précédente, permet dans le cas où les α_i sont rationnels d'exprimer les conditions sur le spectre en termes d'existence de vecteurs non nuls dans les blocs conformes, qui sont les vecteurs invariants d'un produit tensoriel de représentations d'algèbre de Lie *affines* (de dimension infinie).

On peut montrer que cette condition est équivalente à la non nullité d'un produit de classes de Schubert dans la cohomologie *quantique* de la grassmannienne.

Références

[Ful00] William Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **37** (2000), no. 3, 209–249 (electronic).

[Ful98] ———, *Intersection theory*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[GGK02] Victor Guillemin, Viktor Ginzburg, and Yael Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Appendix J by Maxim Braverman.

[Hor62] Alfred Horn, *Eigenvalues of sums of Hermitian matrices*, Pacific J. Math. **12** (1962), 225–241.

[TW03] C. Teleman and C. Woodward, *Parabolic bundles, products of conjugacy classes and Gromov-Witten invariants*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53** (2003), no. 3, 713–748.