Dualité étrange entre les fonctions thêta généralisées et théorie de l'intersection sur les espaces de modules de fibrés Mémoire de M2 sous la direction d'Arnaud Beauville

Rémy Oudompheng

17 mai 2007

Table des matières

Introduction

La théorie bien connnue des fonctions thêta permet de mieux comprendre le lien entre la géométrie de la jacobienne d'une courbe (qui paramètre les classes d'isomorphisme de fibrés en droites) et les propriétés desdits fibrés, comme l'existence de sections. Pour comprendre la structure des fibrés de rang quelconque (dont l'espace de modules n'est plus une variété abélienne), on peut s'intéresser à la généralisation naturelle des fonctions thêta, qui sont les sections du fibré déterminant sur cet espace de modules (ou encore le *champ* de modules) introduites par André Weil.

Les idées venues de la théorie conforme des champs (qui a prouvé sa pertinence dans l'étude de systèmes statistiques en dimension 2, ou celle des surfaces de Riemann pour la théorie des cordes) ont permis d'étudier ces espaces de sections sous l'angle des représentations d'algèbres de Lie affines, donnant de nouvelles techniques permettant entre autres de calculer par une formule potentiellement explicite, la formule de Verlinde, leur dimension.

La symétrie entre rang et niveau qui apparaît dans cette formule, ainsi que les remarques de Witten [Wit95] qui relient la théorie à la cohomologie quantique d'une grassmannienne bien choisie poussent à chercher une signification géométrique à cette symétrie. Celle-ci apparaît dans la preuve de la dualité rang-niveau, aussi appelée *dualité étrange*, par Alina Marian et Dragos Oprea [MO06b], remarquablement simple d'un point de vue technique, et où se concrétisent les relations entre la formule de Verlinde et celle de Vafa et Intriligator.

Je remercie Arnaud Beauville pour sa disponibilité, sa clairvoyance et pour m'avoir fait découvrir ces sujets passionnants, Frédéric Paulin et François Loeser pour m'avoir fait découvrir Arnaud Beauville, et tous ceux qui ont pu répondre aux questions mystérieuses ou stupides, comme on doit régulièrement en avoir, François Charles, Joël Riou, David Madore, Yves de Cornulier, Mehdi Tibouchi et les autres que j'oublie.

1 Espaces de modules de fibrés vectoriels sur une courbe

1.1 Fibrés en droites et jacobiennes

On pourra consulter [ACGH85] pour référence ou [Ati90] pour une approche plus typique de la théorie conforme des champs pour plus d'information.

1.1.1 Caractères du groupe fondamental et jacobienne

Soit X une surface de Riemann de genre g. En tant que variété différentielle, la jacobienne de X est le groupe $H^1(X,\mathbb{R})/H^1(X,\mathbb{Z})$. C'est une variété réelle de dimension $2g$. Comme $H^1(X,\mathbb{Z})$ est un réseau dans $H^1(X,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2g}$, c'est en fait un tore, qui est isomorphe en tant que variété réelle à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$.

Par la suite exacte de cohomologie

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(X,\mathbb{R}) \to H^1(X,\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{R}),$$

on observe que la jacobienne peut aussi s'écrire $H^1(X,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. En remarquant également que $H^1(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module plat, et qu'on a une suite exacte $0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to H^1(X,\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to 0$, on peut également interpréter la jacobienne comme $H^1(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui est l'ensemble $H^1(X,\mathbb{U}_1)$ des caractères unitaires du groupe fondamental. On verra plus loin comment ceci classifie les fibrés en droites complexes hermitiens munis d'une connexion unitaire plate, qui sont en particulier topologiquement triviaux : on a une suite exacte exponentielle

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{C}^0_X) \to H^1(X,\mathcal{C}^{0\,\times}_X) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{C}^0_X)$$

où $\mathcal{C}^0_X$ désigne le faisceau des fonctions continues sur X, qui est *fin* et *mou*, donc acyclique. On obtient donc un isomorphisme entre $H^1(X,\mathcal{C}^{0\,\times}_X)$ qui classifie les fibrés en droites topologiques, et $H^2(X,\mathbb{Z})$, donné par la première classe de Chern.

1.1.2 La jacobienne comme varété abélienne

On prend maintenant en compte la structure complexe de X. On veut classifier les fibrés en droites *holomorphes* sur X. On a la suite exacte exponentielle holomorphe

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

où on peut remarquer les choses suivantes :

- le morphisme $H^0(X,\mathcal{O}_X) \to H^0(X,\mathcal{O}_X^\times)$ est surjectif (il s'agit de l'exponentielle usuelle $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$)
- la cohomologie de $\mathcal{O}_X$ se calcule par la résolution de Dolbeault $0 \to \mathcal{A}^{0,0} \to \mathcal{A}^{0,1} \to 0$ (des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ de type $(0,q)$ sur X), qui est de longueur 1, puisque X est de dimension complexe 1.

La jacobienne de X, notée Jac X, est le tore complexe $H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z})$. La suite exacte précédente nous fournit un isomorphisme de groupes abéliens avec $\mathrm{Pic}^0 X$, le groupe de Picard des fibrés en droites de première classe de Chern nulle.

La jacobienne est une variété abélienne de dimension g. Si X est une courbe elliptique pointée, on obtient un isomorphisme canonique entre X et sa jacobienne, qui permet de munir une courbe elliptique de la loi de groupe qui en fait sa particularité.

1.1.3 Lien entre les constructions

La construction holomorphe de la jacobienne est une façon d'associer à une structure complexe sur X une structure complexe sur la jacobienne : la décomposition de Hodge donne un isomorphisme $H^1(X, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \simeq H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$ et les espaces $H^1(X, \mathbb{R})$, $H^{1,0}(X)$, $H^{0,1}(X)$ sont deux à deux supplémentaires, la conjugaison échangeant les deux derniers et laissant invariant le premier. Plus précisément, on obtient par l'isomorphisme $H^1(X, \mathbb{R}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)$ une structure complexe sur $H^1(X, \mathbb{R})$. Cet isomorphisme est aussi issu de l'inclusion $\mathbb{R} \to \mathcal{O}_X$, qui se traduit sur les résolutions de de Rham et de Dolbeault comme ceci : la projection sur $A^{0,1}$ n'est autre que la projecion des formes différentielles dans les résolutions classiques

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathbb{R}} \simeq & {[0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, hook] & \mathcal{A}^1(\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\Im"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})] \arrow[d, "0"] \, . \\
\mathcal{O}_X \simeq & {[0} \arrow[r] & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}) \arrow[r, "\bar\partial"] & \mathcal{A}^{0,1}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\bar\partial"] & 0]
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs, $H^1(X, \mathbb{R})$ est également muni de sa forme symplectique d'intersection, et on peut montrer que celle-ci munit $H^1(X, \mathbb{R})$ d'une structure hermitienne, qui identifie son conjugué $H^0(X, \Omega_X)$ à son dual, ce qui est aussi la dualité de Serre.

On a donc des projections (qui sont des isomorphismes) $H^1(X, \mathbb{R}) \to H^1(\mathcal{O}_X)$ et $H^1(X, \mathbb{R}) \to H^0(X, \Omega_X)$. La première permet d'identifier le tore réel de la première partie à la jacobienne vue comme $\mathrm{Pic}^0(X)$. La seconde nous donne la variété abélienne duale. Elle permet de retrouver la jacobienne par sa construction historique comme quotient de $H^0(X, \Omega_X)^\vee$ (les intégrales abéliennes) par le réseau des périodes donné par l'image de $H_1(X, \mathbb{Z})$ (les intégrales sur les cycles).

Les relations entre les structures complexes de X te Jac X, vues comme l'application des périodes de l'espace de modules des structures complexes $\mathfrak{M}_g$ dans le domaine des périodes des variétés abéliennes principalement polarisées $\mathfrak{H}_g$ ont fait l'objet d'études poussées. Le *théorème de Torelli* exprime que c'est une application injective, et le *problème de Schottky* est celui de la détermination de son image.

1.1.4 Fonctions thêta

Le choix d'un point-base P permet d'identifier les autres composantes du groupe de Picard, $\mathrm{Pic}^d(X)$ (le groupe des fibrés en droites de degré d), à $\mathrm{Pic}^0(X)$ en tensorisant par $\mathcal{O}(-dP)$.

L'application d'Abel-Jacobi $\mathrm{Sym}^d X \to \mathrm{Pic}^d X$ peut être construite par les intégrales abéliennes (on intègre les 1-formes holomorphes sur des chemin du point-base aux différents éléments du diviseur), ou algébriquement en associant à un diviseur effectif D le point représentant le fibré $\mathcal{O}(D) \in \mathrm{Pic}^d X$.

On peut montrer que l'image de $\mathrm{Sym}^{g-1}(X)$ est un diviseur sur la jacobienne $\mathrm{Jac}^{g-1} X$, dont le support correspond à l'ensemble des fibrés admettant des sections non nulles. On l'appelle *diviseur thêta*.

Les *fonctions thêta* (abéliennes) de niveau k désignent les sections du fibré en droites $\mathcal{O}_J(k\Theta)$ sur la jacobienne.

La généralisation non-abélienne de ces constructions, à travers l'espace des représentations du groupe fondamental dans un groupe non-abélien, les fonctions thêta non-abéliennes, ont été introduites par André Weil dans [Wei38].

1.2 Schémas de Hilbert et schémas Quot de Grothendieck

1.2.1 Foncteurs représentables et espaces de modules

Proposition 1.1 (Lemme de Yoneda). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Le foncteur $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}\underline{\mathbf{Ens}}$ qui à un objet X associe le foncteur contravariant $T \mapsto \mathrm{Hom}(T, X)$ est pleinement fidèle. On l'appelle plongement de Yoneda.

Définition 1.1 (Représentabilité). Un foncteur contravariant F est dit *représentable* s'il est dans l'image essentielle du plongement de Yoneda, c'est-à-dire s'il est isomorphe au foncteur des points $\mathrm{Hom}(\bullet, X)$ d'un objet X de $\mathcal{C}$. On dit alors que X représente le foncteur F.

La notion de représentabilité permet de parler d'espace de modules et d'objet universel. On veut souvent, en effet, pouvoir paramétrer par un objet géométrique une famille d'objets, comme les sous-schémas d'un schéma donné, les fibrés vectoriels, ou n'importe quelle autre structure géométrique raisonnable sur un objet fixé.

On considère un foncteur F associant à un schéma X un ensemble d'objets (éventuellement à isomorphisme près), le plus souvent les familles d'objets qui nous intéressent paramétrées par X.

Définition 1.2 (Espace de modules). Un schéma M est un *espace de modules grossier* pour F si on a une transformation naturelle de F dans $\iota(M) = \mathrm{Hom}(\bullet, M)$, et tel que toute transformation naturelle de F dans un $\iota(N)$ se factorise par $\iota(M)$.

On dit que M est un *espace de module fin* si M représente le foncteur F. Il existe alors un élément distingué $\mathcal{U}$ de $F(M)$ tel que pour tout η dans $F(X)$, on ait un unique morphisme naturel $f : X \to M$ tel que $\eta = f^\star\mathcal{U}$.

Dans le cas d'un espace de modules fin, $\mathcal{U}$ est l'objet universel sur M. Par exemple, si M est un espace de modules de fibrés vectoriels sur X, on s'attend à ce que $\mathcal{U}$ soit un fibré de Poincaré, c'est-à-dire un fibré vectoriel sur $M \times X$ dont la fibre en un point $m \in M$ soit exactement le fibré sur X représenté par le point m.

La notion d'espace de module grossier permet de contourner les difficultés liées aux objets possédant des automorphismes, qui suppriment toute possibilité d'obtenir un espace de module fin. On considère donc des espaces paramétrant des classes d'équivalence d'objets (pour la notion d'équivalence la plus fine possible).

1.2.2 Construction Quot

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un schéma X projectif, et P un polynôme à valeurs entières. Le schéma Quot de Grothendieck est un espace de modules fin pour le foncteur $\underline{\mathrm{Quot}}_P(X, \mathcal{F})$ qui à une base S associe l'ensemble des quotients cohérents de $p^\star\mathcal{F}$ sur $S \times X$ plats sur S, dont les fibres sur S ont un polynôme de Hilbert constant égal à P.

Lemme 1.2 (Régularité au sens de Mumford). Soit P un polynôme à valeurs entières. Il existe un entier ν suffisamment grand pour que pour tous les sous-faisceaux $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ de polynôme de Hilbert P (ou bien tels que le polynôme de Hilbert du quotient soit P), $\mathcal{G}(\nu)$ soit engendré par ses sections globales et de h^1 nul. On suppose aussi que $\mathcal{G}(\nu + k)$ est engendré par les sections de $\mathcal{G}(\nu)$ et $\mathcal{O}(k)$.

Alors pour un quotient donné $\mathcal{Q} = \mathcal{F}/\mathcal{G}$ de polynôme de Hilbert P, $H^0(\mathcal{G}(\nu))$ est un sous-espace de codimension $P(\nu)$ de $H^0(\mathcal{F}(\nu))$. On associe ainsi à un quotient de $\mathcal{F}$ un point de la grassmannienne, et ce de manière injective (puisque les sections globales permettent de reconstituer $\mathcal{G}$).

Proposition 1.3. Un point Γ de la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{P(\nu)}(H^0(E(\nu)))$ est dans l'image de l'application définie précédemment si et seulement si :

$$\forall k \geqslant 0,\ \dim \frac{H^0(X, E(\nu + k))}{\Gamma \otimes H^0(\mathcal{O}(k))} = P(\nu + k)$$

Démonstration. Tout point de l'image vérifie ces conditions, puisque par hypothèse $H^0(\mathcal{G}(\nu)) \otimes H^0(\mathcal{O}(k)) = H^0(\mathcal{G}(\nu + k))$.

Réciproquement, si Γ est un tel sous-espace, on peut considérer le faisceau $\mathcal{G}(\nu)$ engendré par Γ dans $\mathcal{F}(\nu)$. Par hypothèse, $H^0(\mathcal{G}(\nu + k)) = \Gamma \otimes H^0(\mathcal{O}(k))$. La suite exacte longue de cohomologie associée à $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q} \to 0$ montre qu'alors $\mathcal{Q}$ a bien le bon polynôme de Hilbert. □

On peut vérifier qu'on identifie ainsi une sous-variété de la grassmannienne $Gr_{P(\nu)}(H^0(\mathcal{G}(\nu)))$. Pour vérifier qu'on a bien un espace de modules fin, on remarque que le fibré tautologique de la grassmannienne permet à partir d'un morphisme $S \to \mathrm{Quot}$ de retrouver le faisceau $\pi_\star\mathcal{G}(\nu)$, et donc $G(\nu)$ qui est engendré par $\pi^\star\pi_\star\mathcal{G}(\nu)$, par exemple.

Théorème 1.4. *Soit X en schéma projectif, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et P un polynôme à valeurs entières sur les entiers. Les faisceaux cohérents quotients de $\mathcal{F}$ de polynôme de Hilbert P possèdent un espace de modules fin $\mathrm{Quot}_P(X, \mathcal{F})$ qui est un schéma projectif.*

La réunion disjointe de ces schémas, pour P variable fournit un espace de modules fin pour les familles de quotients cohérents quelconques de $\mathcal{F}$.

1.3 Espaces de modules de faisceaux cohérents semi-stables

1.3.1 Théorie géométrique des invariants et actions de groupes algébriques

La théorie géométrique des invariants, dont le livre de Mumford [MFK94] constitue une référence incontournable, fournit une méthode générale pour réaliser des quotients de schémas par des groupes algébriques. Les principaux résultats et définitions utlisés dans le cadre de l'espace de modules des fibrés semi-stables sont rappelés dans [LP95] et dans [VLP85, exposé 2].

Les constructions de Mumford sont particulièrement adaptées à la construction d'espaces de modules grossiers, lorsque les espaces de modules naturels (typiquement des schémas Quot) présentent des objets dupliqués par l'action d'un groupe. Ainsi le paramétrage des sous-schémas d'un espace projctif vérifiant certaines propriétés donne chaque objet autant d'exemplaires que ses images par les automorphismes de $\mathbb{P}^n$. Cependant, on est obligé pour ce faire de se limiter à certaines classes d'objets (les semi-stables), et on obtient la plupart du temps des espaces de modules singuliers.

On peut exiger d'un quotient plusieurs propriétés (les schémas considérés pouvant être des schémas sur une base S) :

Définition 1.3 (Quotient catégorique). Soit X un schéma muni d'une action d'un groupe algébrique G. Un schéma Y muni d'un morphisme $\pi : X \to Y$ est appelé *quotient catégorique de X par G* s'il est le coégalisateur de la double flèche $G \times X \rightrightarrows X$ (donnée par la projection et l'action de groupe) : pour tout morphisme G-invariant $X \to Z$, il existe un unique morphisme $Y \to Z$ le factorisant.

Définition 1.4 (Quotient géométrique). Un schéma Y est un quotient géométrique de X par G si on dispose d'un morphisme $\pi : X \to Y$ surjectif, submersif (qui induit sur Y la topologie schématique de Y), tel que $\mathcal{O}_Y = (\pi_\star \mathcal{O}_X)^G$ et que $X \times_Y X$ soit l'image de $G \times X \to X \times X$.

On peut définir les quotients de schémas affines par la construction naïve :

Proposition 1.5. Soit A une k-algèbre de type fini munie d'une action d'un groupe algébrique G, $X = \operatorname{Spec} A$ et $Y = \operatorname{Spec} A^G$, où A^G est l'algèbre des invariants. Alors $X \to Y$ est un bon quotient (il ne manque que l'hypothèse d'action fermée pour avoir un quotient géométrique). On note $Y = X /\!\!/ G$.

C'est un quotient catégorique de manière évidente, mais ses propriétés géométriques sont peu claires. Pour pouvoir généraliser la construction à des schémas non nécessairement affines, on a besoin de la notion de stabilité :

Définition 1.5 (Semi-stabilité et stabilité). Soit x un point géométrique d'un k-schéma X. On dit que x est *pré-stable* s'il possède un voisinage affine invariant où l'action de G est fermée. On suppose x muni d'un fibré G-linéarisé inversible L. Alors x est dit *semi-stable* s'il est contenu dans un ouvert affine X_s déterminé par une section G-invariante $s \in H^0(X, L^{\otimes N})$, et *stable* si de plus l'action de G est fermée sur cet ouvert.

Proposition 1.6 (Critère de Hilbert-Mumford). Soit V une représentation de G. Pour un sous-groupe à un paramètre (g_t), on décompose V en espaces propres $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m$. Soit $v \in V$ non nul et $\mu(v)$ l'opposé du petit poids apparaissant dans v ($\mu(v) < 0$ si et seulement si $g_t(v) \to 0$ quand $t \to 0$).

Alors v est un point semi-stable si et seulement si $\mu(v) \geqslant 0$ pour tout sous-groupe à un paramètre de G.

Théorème 1.7. *Soit Y une variété projective, plongée dans $\mathbb{P}(V)$, où V est une représentation de G. On considère sur Y le fibré $\mathcal{O}(1)$ G-linéarisé, qui fournit la notion de (semi-)stabilité. Soit Y^{ss} et Y^s les ouverts correspondant respectivement aux points semi-stables et stables. Alors $Y^{ss} /\!\!/ G$ est une variété projective qui est un bon quotient de Y^{ss} et $Y^s /\!\!/ G$ est un quotient géométrique de Y^s.*

Démonstration. Il s'agit de considérer $\operatorname{Proj} k[\hat{Y}]^G$, où $\hat{Y}$ est le cône de Y. □

Proposition 1.8 (Cas de la grassmannienne). On considère la variété projective $G(m, H \otimes V)$ des sous-espaces de dimension m de l'espace $H \otimes V$, muni de l'action canonique de $SL(H)$. Alors un point x est semi-stable si et seulement si pour tout sous-espace $H' \subset H$, on a

$$\frac{\dim K'}{\dim H'} \leqslant \frac{\dim K}{\dim H}$$

où $K' = K \cap (H' \otimes V)$. Un point est stable si cette inégalité est stricte.

1.3.2 Notion de semi-stabilité d'un fibré vectoriel

Dans ce qui suit, on se place sur une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$. On se référera à [LP95] ou à [VLP85, exposé 2].

Définition 1.6 (Pente d'un fibré vectoriel). La *pente* d'un fibré vectoriel est le quotient de son degré par son rang, supposé non nul. C'est un rationnel ne dépendant que la classe du faisceau dans le groupe de Grothendieck de la courbe.

La pente intervient naturellement dans l'étude des propriétés numériques des faisceaux cohérents. Ainsi, si on considère la forme quadratique $u \mapsto \chi(u^2)$, définie sur le groupe de Grothendieck, l'orthogonal d'un élément de pente μ est le sous-groupe des fibrés de pente $g - 1 - \mu$. On peut remarquer que la pente ne dépend que du rang et du degré, qui sont des invariants *topologiques* et non différentiels ou holomorphes.

Proposition 1.9. Soient E_1 et E_2 des faisceaux de pentes μ_1 et μ_2, de rangs r_1 et r_2. Si E est la somme de E_1 et E_2 dans le groupe de Grothendieck, alors $\mu(E) = \frac{r_1\mu_1 + r_2\mu_2}{r_1+r_2}$. On a aussi $\mu(E_1 \otimes E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Définition 1.7 (Semi-stabilité). Un fibré de pente μ est dit *semi-stable* si la pente de tout sous-fibré non trivial est inférieure à μ. Il est dit *stable* si cette inégalité est stricte.

Proposition 1.10. Soient E et F des fibrés vectoriels semi-stables. S'il existe un morphisme non nul $E \to F$ alors $\mu(E) \leqslant \mu(F)$. Les endomorphismes d'un fibré stable forment un corps, et ne contiennent que les homothéties.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ un morphisme de fibrés semi-stables. On a une suite exacte $0 \to \ker f \to E \to \operatorname{im} f \to 0$. Comme E est semi-stable, $\mu(\ker f) \leqslant \mu(E)$ donc $\mu(E) \leqslant \mu(\operatorname{im} f)\mu(F)$.

Si E est stable, un endomorphisme ne peut avoir un noyau non trivial, ni une image non triviale sinon, on aurait $\mu(E) < \mu(E)$. Les endomorphismes de E forment donc une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini qui est un corps, c'est donc $\mathbb{C}$. $\square$

Proposition 1.11. La sous-catégorie pleine de la catégorie additive des fibrés vectoriels constituée des fibrés semi-stables de pente μ fixée forme une catégorie abélienne. Les fibrés stables sont simples dans cette catégorie, et chaque objet possède une filtration de Jordan-Hölder, à gradués stables, unique à permutation près des gradués.

La notion de semi-stabilité permet de limiter les classes d'isomorphismes possibles de fibrés. On ne peut en effet pas trouver une famille universelle plate paramétrant les fibrés de rang r et de degré d fixé (c'est-à-dire en fixant le polynôme de Hilbert) : si on pose $E_k = \mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(d+k) \oplus \mathcal{O}^{r-2}$, on obtient une suite de fibrés de rang r et degré d dont le h^1 est au moins $h^1(\mathcal{O}(-k)) = k + g - 1$ (en utilisant le théorème de Riemann-Roch), qui tend vers l'infini, ce qui n'est normalement pas possible si on a un espace de module raisonnable.

La notion de filtration de Harder-Narasimhan permet cependant de relier les fibrés quelconques aux fibrés semi-stables.

Proposition 1.12 (Filtration de Harder-Narasimhan). Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel. Il existe une filtration de $\mathcal{F}$ par des sous-fibrés dont les gradués sont semi-stables, de pente strictement décroissante. Cette filtration est unique. La suite des gradués est appelée *suite de Harder-Narasimhan* de $\mathcal{F}$.

Démonstration. À chaque étape, on cherche un fibré semi-stable de pente maximale dans $\mathcal{F}$ et on recommence avec le quotient. $\square$

On peut représenter graphiquement la contruction par le *polygone de Harder-Narasimhan*, en associant à chaque étape de la filtration un point de coordonnées son rang et son degré. En reliant les points par une ligne brisée, la pente des gradués apparaît comme la pente du polygone, et celui-ci est convexe.

Tout l'intérêt de la notion de semi-stabilité apparaît lorsqu'on remarque que les classes d'isomorphisme de fibrés semi-stables de rang r et degré d fixés forment un ensemble limité, c'est-à-dire qu'il existe une famille de fibrés sur X où chacune de ces classes est représentée au moins une fois. Pour cela, observons que les fibrés de pente suffisamment grande sont engendrés par leurs sections globales et apparaissent comme quotient d'un fibré vectoriel scindé.

Proposition 1.13. Soit E un fibré semi-stable sur X. On a les résultats suivants :
- si $\mu(E) > 2g - 2$, $H^1(E) = 0$,
- si $\mu(E) > 2g - 1$, il est engendré par ses sections globales.

Démonstration. La première assertion provient du fait que $\operatorname{Hom}(E, K_X) = 0$, puisque E est de pente supérieure à K_X et qu'il est semi-stable, et de la dualité de Serre, qui donne $H^1(E) = \operatorname{Hom}(E, K_X)$.

La seconde assertion découle de la première, en considérant un point x de la courbe, et en remarquant que $E(-x)$ est de pente supérieure à $2g - 2$, donc acyclique. On a donc une suite exacte de sections globales pour la suite $0 \to E(-x) \to E \to E_x \to 0$. $\square$

Choisissons donc un entier ν supérieur à $2g-\mu$. Ceci assure que $E(\nu)$ est acyclique et engendré par ses sections globales, et sa caractéristique d'Euler est fixée par les données : $E(\nu)$ est de pente $\mu+\nu$ et de rang r. On en déduit un morphisme surjectif $\mathcal{O}(-\nu)^{\chi} \to E \to 0$, ce qui montre que E apparaît dans le schéma de Grothendieck $\mathrm{Quot}_{r,d}(H \otimes O(-\nu))$, où H est un espace vectoriel fixé de dimension $\chi(E) = r(\mu+\nu+1-g)$. Tout le problème est donc de quotienter cet espace pour n'avoir qu'un seul représentant de chaque classe d'équivalence. On a de fait une action de GL_{χ} sur H qui préserve la classe d'isomorphisme des quotients considérés.

La proposition 1.8 permet alors de démontrer le résultat suivant :

Proposition 1.14. Les notions de semi-stabilité et de stabilité définies pour les fibrés vectoriels coïncident avec celles correspondant à l'action de $PGL(H)$ sur le schéma Quot vu comme sous-variété projective de la grassmannienne de $H \otimes H^0(\mathcal{O}_X(\rho-\nu))$ (pour un certain entier ρ assez grand).

Théorème 1.15. *L'espace de modules grossier des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et degré d sur X est le quotient (au sens de la théorie géométrique des invariants) de l'ouvert de semi-stabilité du schéma de Grothendieck* $\mathrm{Quot}_{r,d}(H \otimes O(-\nu))$ *par les automorphismes de H.*

Plus précisément, cet espace de modules paramètre les classes de S-équivalence de fibrés semi-stables (on identifie deux fibrés de même suite de Harder-Narasimhan).

1.4 Structures différentielles et symplectiques sur l'espace de modules

Dans ce court intermède, on présente comment l'espace de modules (algébrique) des fibrés vectoriels stables peut être vu, en tant que variété différentielle, comme l'ensemble des représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental de la surface de Riemann. On se place donc dans le cadre $\mathcal{C}^{\infty}$.

1.4.1 Connexions plates et représentation de monodromie

On pourra notamment consulter [AB83] et [Aud04, Chapitre V] à ce sujet.

Définition 1.8. Soit E un fibré vectoriel sur une variété différentielle X. Une *connexion* sur E est un opérateur différentiel du premier ordre $\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{E}$ (où $\mathcal{E}$ est le faisceau associé à E) s'il satisfait la formule de Leibniz $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$.

Définition 1.9. Soit G un groupe de Lie

Soit G un groupe de structure (typiquement SL_r). On a une connexion canonique sur le G-fibré trivial, et l'espace des connexions s'dentifie naturellement à l'espace des 1-formes de $\Omega^1(\mathfrak{g})$. On appelle *groupe de jauge* le groupe $\mathcal{G} = \mathcal{C}^{\infty}(X, G)$.

Définition 1.10 (Courbure et platitude). La *courbure* d'une connexion ∇ est $R = \nabla^2$. Si on écrit $\nabla = d + A$, où A est la 1-forme de connexion, on a $\nabla^2 = d(A \wedge \bullet) + A \wedge d + A \wedge A = dA + A \wedge A$, qui est une 2-forme à valeurs dans le fibré adjoint $\mathfrak{g}(E)$ (c'est un opérateur différentiel d'ordre zéro). Une connexion est *plate* si sa courbure est nulle. La distribution associée dans l'espace bitangent est alors intégrable et fournit un feuilletage du fibré tangent.

Définition 1.11 (Holonomie). L'*holonomie* d'une connexion est l'automorphisme d'une fibre induit par le transport parallèle le long d'un lacet. Si la connexion est plate, l'holonomie est invariante par homotopie, et on obtient une *représentation de monodromie*, bien définie à conjugaison près, de $\pi_1(X)$ dans G.

La correspondance donnée par la représentation de monodromie permet d'identifier l'espace de modules $\mathcal{M} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ des connexions plates sur le fibré trivial à action du groupe de jauge près, à l'espace des représentations de $\pi_1(X)$ dans G à conjugaison près.

Notons que si X est une surface de Riemann de genre g privée de n points, le groupe fondamental est libre à $2g+n-1$ générateurs, et l'espace de modules est simplement le quotient de G^{2g+n-1} par l'action de conjugaison. La structure intéressante et non triviale dans ce cadre est celle de fibrés paraboliques, où l'on considère les connexions dont la monodromie autour des points spéciaux est limitée à une sous-algèbre le Lie parabolique.

L'espace des connexions sur le G-fibré trivial est l'espace vectoriel $\Omega^1(\mathfrak{g})$, qui est naturellement muni d'une forme symplectique $\omega(A,B) = \int_X \mathrm{Tr}(A \wedge B)$, où Tr désigne la forme de Killing.

Le groupe de jauge agit sur l'espace des connexions en préservant la forme symplectique. Cette action est hamiltonienne et si X est une surface de Riemann sans bord, on peut exprimer le moment de l'action de $\alpha \in \mathfrak{g}$ comme

$$H_{\alpha}(A) = \int_X \mathrm{Tr}(\alpha \wedge F(A))$$

où F est la courbure. L'application moment est donc la courbure. Le quotient symplectique de l'espace des connexions par le groupe de jauge est donc exactement l'espace de modules des connexions plates au groupe de jauge près.

1.4.2 Représentations et fibrés semi-stables

Théorème 1.16 (Narasimhan-Seshadri [NS65]). *L'espace de modules des fibrés stables de rang r, de déterminant trivial sur une surface de Riemann Σ est difféomorphe en tant que variété analytique réelle à l'ensemble des représentations irréductibles de $\pi_1(\Sigma)$ unitaires de rang r à conjugaison près.*

Donaldson donne une preuve d'un résultat équivalent en utilisant le formalisme des connexions : rappelons les résultats de la théorie de Chern-Weil, et la construction analytique des classes de Chern qui permet de retrouver leur définition topologique (voir par exemple [Hus94]).

Théorème 1.17. *Soit E un fibré vectoriel complexe sur une variété différentielle M, muni d'une connexion ∇. Soit $R = \nabla^2$ sa forme de connexion (qui est un élément de $A^2(M, \operatorname{End} E)$). La forme de Chern totale définie par*

$$c(E, \nabla) = \det \left(1 - \frac{R}{2i\pi} \right)$$

est fermée et sa classe de cohomologie est exactement la classe de Chern totale usuelle du fibré.

Corollaire 1.18. Soit E un fibré vectoriel sur une surface de Riemann muni d'une connexion ∇. Alors

$$\deg E = -\frac{1}{2i\pi} \int \operatorname{Tr} R_\nabla .$$

Démonstration. La première classe de Chern de E n'est autre que la classe de cohomologie de $-\frac{R_\nabla}{2i\pi}$. □

Le choix d'une métrique kählérienne d'aire 1 sur la surface de Riemann permet de considérer $-\operatorname{Tr}(R)/2i\pi$ comme une section de $\operatorname{End} E$ dont les valeurs propres valent en moyenne la pente du fibré. Il est donc naturel de demander que pour un fibré semi-stable, ces valeurs propres ne soient pas inférieures sur un sous-espace. Rappelons que sur une surface de Riemann, toute connexion définit une structure holomorphe par sa partie de type $(0, 1)$.

Théorème 1.19 ([Don83]). *Soit X une surface de Riemann, et E un fibré holomorphe indécomposable (pas somme directe d'autres fibrés) de rang r et degré d. Alors E est stable si et seulement si il possède une métrique hermitienne et une connexion unitaire de courbure constante $-2i\pi\mu$ où μ est la pente de E.*

Démonstration. L'existence d'une telle connexion entraîne facilement la stabilité (on calcule la connexion induite sur un sous-fibré pour en calculer la pente).

On suppose X munie d'une structure kählérienne adaptée, et on choisit une métrique de référence sur E et pour une connexion ∇, on note

$$J(\nabla) = \left(\int_X \left\| \frac{*R_\nabla}{2i\pi} + \mu \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

La fonctionnelle J s'annule précisément sur les connexions de courbure constante recherchées. On note L^2_1 les métriques de Sobolev de la forme $\|\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2$.

Soit $\mathcal{D}(E)$ l'espace des connexions hermitiennes sur E dont la partie antiholomorphe est la structure holomorphe sur E. Alors J atteint son infimum sur $\mathcal{D}(E)$, sinon il existe un fibré F de même rang et degré que E où l'infimum de J est inférieur à celui sur $\mathcal{D}(E)$, et un morphisme non nul de E vers F.

En effet, soit (A_i) une suite de connexions approchant l'infimum de J sur $\mathcal{D}(E)$. Alors leur courbure est bornée dans L^2_1 et un résultat d'Uhlenbeck [Uhl82] nous assure qu'on peut extraire une suite faiblement convergente (à action du groupe de jauge près) vers une certaine connexion B fournissant une structure holomorphe F. Supposons qu'il n'existe pas de morphisme de E dans F. Ceci signifie qu'on ne peut pas trouver de section f de $E^\vee \otimes F \simeq \mathcal{E}nd(E)$ annulée par la partie antiholomorphe $\bar\partial_{A_i,B}$ de la connexion naturellement associée à A_i et B.

Il s'agit d'un opérateur elliptique, on a donc une constante c telle que $\left\|\bar\partial f\right\|_{L^2} \geqslant c \|f\|_{L^2_1} \geqslant C_1 \|f\|_{L^4}$. La dernière égalité provient du plongement de Sobolev.

L'inclusion de L^2_1 dans L^4 est compacte, et en particulier A_i converge fortement vers B pour la norme L^4. Remarquons ensuite que $\bar\partial_{A,B} - \bar\partial_{A,A_i}$ est un tenseur $B - A_i$. On a donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|(\bar\partial_{A,B} - \bar\partial_{A,A_i})f\right\|_{L^2} \leqslant C_2 \|B - A_i\|_{L^4} \|f\|_{L^4}$$

qui donne finalement

$$\left\|\bar\partial_{A,A_i} f\right\| \geqslant (C_1 - \|B - A_i\|_{L^4} C_2) \|f\|_{L^4} .$$

Mais A_i converge *fortement* vers B, donc pour i assez grand, $\bar\partial_{A,A_i}$ n'a pas de noyau, ce qui est absurde car son noyau est $H^0(\mathcal{E}nd(E))$ (A et A_i induisent toutes deux la structure holomorphe de E).

On a ensuite besoin d'encadrer la courbure des connexions en fonction de la stabilité. Soit une suite exacte

$$0 \to M \to F \to N \to 0$$

avec $\mu(M) \geqslant \mu(F)$. Alors pour toute connexion A sur F, $J(A) \geqslant \operatorname{rg} M(\mu(M) - \mu(F)) + \operatorname{rg} N(\mu(F) - \mu(N))$. Inversement, si F est stable, alors $\mu(M) < \mu(F)$ et il existe une connexion A sur F telle que $J(A) < \operatorname{rg} M(\mu(F) - \mu(M)) + \operatorname{rg} N(\mu(N) - \mu(F))$. Ceci se voit en écrivant localement la connexion en fonction de ses projetées et de la classe d'extension.

Ces inégalités prouvent déjà que si on peut trouver une connexion annulant J, alors le fibré est stable. Réciproquement, si E est stable, alors on peut y trouver une connexion réalisant l'infimum de J. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un morphisme non nul $f : E \to F$ avec F le même rang et de même degré. On peut décomposer f par son noyau et son conoyau (ou plutôt les analogues permettant d'avoir un quotient localement libre), de forme à former un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 & C \arrow[l] & F \arrow[l] & F' \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

avec E' et F' de même rang, g de rang maximal et $\mu(E') \leqslant \mu(F')$. De plus $\mu(E) < \mu(E')$, d'où les inégalités :

$$\inf_{\mathcal{D}(F)} J \geqslant \operatorname{rg} F'(\mu(F') - \mu(F)) + \operatorname{rg} C(\mu(F) - \mu(C))$$
$$\inf_{\mathcal{D}(E)} J < \operatorname{rg} E'(\mu(E') - \mu(E)) + \operatorname{rg} K(\mu(E) - \mu(K))$$

qui contredisent le fait que $\inf_{\mathcal{D}(F)} J \leqslant \inf_{\mathcal{D}(E)} J$.

Soit ∇ une connexion sur E réalisant l'infimum de J. Par la théorie de Hodge, on peut décomposer la courbure $\frac{*F}{2i\pi}$ de manière unique comme la somme d'une section harmonique et d'un laplacien. Le noyau de $\nabla^\dagger \nabla$ est constitué des endomorphismes de E, qui sont les constantes. La décomposition s'écrit donc

$$\frac{*F}{2i\pi} = -\mu(E) + \Delta h$$

où h est une section du fibré adjoint des endomorphismes hermitiens de E. Soit $g_t = \exp(th)$ de sous-groupe à un paramètre engendré par h, et $A_t = g_t \bullet A$. Un petit calcul montre que

$$J(A_t) = J(A)(1-t) + O(t^2)$$

et comme A est un minimum de J, c'est que $J(A) = 0$. □

On fixera donc les notations $SU_X(r)$ et $U_X(r)$ pour les espaces de modules grossiers de fibrés semi-stables de rang r et respectivement de déterminant trivial et de degré zéro. On notera $U_X^*(r)$ l'espace de modules des fibrés de rang r et de degré $r(g-1)$, qui est isomorphe à $U_X(r)$ moyennant le produit tensoriel par un fibré en droites de degré $g-1$. Le théorème précédent nous donne une bijection entre les fibrés polystables de rang r et de degré zéro et les classes de conjugaison de représentations (non nécessairement irréductibles) de $\pi_1(\Sigma)$ à valeurs dans U_n ou SU_n.

1.5 Espace de modules de fibrés et doubles quotients

Soit X une courbe projective lisse connexe, p un point de X. Soit $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x]]$ l'anneau local complété en p, et $D = \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ le disque infinitésimal qui s'envoie naturellement dans X. Attention à distinguer D du spectre formel de $\mathcal{O}$ qui est la limite inductive des $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]/(x^n)$. On a aussi des objets épointés de p, notés X^* et D^*. On peut naturellement identifier D^* à $\operatorname{Spec} K$, où K est le corps des fractions $\mathbb{C}((z))$ de $\mathcal{O}$ (à condition de choisir une coordonnée locale en p).

Soit E un fibré vectoriel de déterminant trivial sur X. Alors E est libre sur D et sur X^* (un module projectif sur un anneau de Dedekind est la somme d'un module libre et d'un module de rang 1, qui est obligatoirement isomorphe au déterminant). On veut donc identifier les classes d'isomorphisme de fibrés E munis de trivialisations sur D et X^* (avec une trivialisation canonique du déterminant) avec l'équivalent des applications de $D \times_X X^* = \operatorname{Spec} K$ dans SL_r, c'est-à-dire ses K-points $SL_r(K)$ (aussi appelé *groupe des lacets* de SL_r).

Théorème 1.20 ([BL94, Proposition 1.4]). *L'espace algébrique des classes d'isomorphismes de familles de fibrés paramétrées par* $\operatorname{Spec} R$ *muni de trivialisations est isomorphe à* $GL_r(\bullet((z)))$.

Démonstration. La donnée d'un fibré avec deux trivialisations donne en tirant sur D_R^* deux trivialisations dont le quotient est un élément de $GL_r(R((z)))$.

Réciproquement, si γ est un élément de $GL_r(R((z)))$, on obtient un morphisme $\bar{\gamma}$ de $j_\star\mathcal{O}_{X^*}^r$ dans $f_\star(K_D/\mathcal{O}_D)^r$, où $j : X^* \hookrightarrow X$ et $f : D \to X$. Alors $E_\gamma = \ker \bar{\gamma}$ est le fibré recherché. Pour cela, on montre qu'il est localement libre, en montrant qu'il est libre sur D et sur X^*. Sur X^*, K_D et $\mathcal{O}_D$ coïncident : $\bar{\gamma}$ donne un isomorphisme entre E_γ et $\mathcal{O}_{X^*}^r$. Sur D, on a une suite exacte :

$$0 \to E_\gamma \to K_D^r \to f^\star f_\star(K_D/\mathcal{O}_D)^r \to 0.$$

Mais le dernier terme est aussi $(K_D/\mathcal{O}_D)^r$, comme on peut le voir en écrivant $K_D/\mathcal{O}_D$ comme limite inductive des $\mathcal{O}_D/(z^n)$ et en appliquant le foncteur $f^\star f_\star$. On obtient un isomorphisme canonique entre E_γ et $\mathcal{O}_D^r$. □

En comptant tout cela modulo un changement de trivialisation, on obtient une bijection canonique entre l'espace de modules des fibrés de rang r et de déterminant trivial et le quotient : $SL_r(A)\backslash SL_r(K)/SL_r(\mathcal{O})$, où A est l'anneau de fonctions de X^*, qui est affine. En remplaçant SL_r par GL_r, on obtient l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés de rang r de déterminant trivial sur X^*, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{O}(dp)$.

Ceci fait le lien entre la présentation standard (par la théorie géométrique des inviariants de Mumford) de la construction des espaces de modules, et la description comme champ algébrique, en écrivant explicitement l'espace de modules recherché comme quotient d'une ind-variété $SL_r(K)/SL_r(\mathcal{O})$, d'un groupe réductif par un sous-groupe parabolique, par un groupe $SL_r(A)$ dépendant de la courbe, qui agit naturellement dessus à gauche. C'est un analogue de dimension infinie des grassmanniennes et des variétés drapeaux. Ces propriétés justifient la pertinence géométrique de cette construction formelle.

Par analogie avec la dimension finie, on pourra interpréter les espaces de sections de certains fibrés vectoriels (typiquement le fibré déterminant) par rapport à certaines représentations d'un groupe ou d'une algèbre de Lie.

2 Fonctions thêta généralisées et blocs conformes

L'appellation de *formule de Verlinde* couvre l'égalité entre les espaces de fonctions thêta généralisées de niveau k et la dimension de l'espace des blocs conformes correspondant, ou encore la formule explicite donnant cette dimension. Des démonstrations inspirées de la théorie des champs conforme ont été données dans [Fal94] et [BL94]. On pourra également consulter [Sor00] pour un exposé introductif aux espaces de modules de fibrés vectoriels par les champs et les algèbres de lacets.

2.1 Fibrés déterminants

2.1.1 Fibré déterminant associé à une famille de faisceaux cohérents

Soit M un schéma quelconque, et $\mathcal{F}$ un faisceau sur $M \times X$, plat sur M. On cherche à représenter l'objet $\det Rp_\star\mathcal{F}$ (le déterminant de la cohomologie de $\mathcal{F}$) où p est la projection $M \times X$. On supposera que X est une courbe projective lisse. Il est peu commode d'utiliser une résolution injective de $\mathcal{F}$ à cet effet, on va donc exploiter le fait que X est une courbe, qui est par conséquent de dimension cohomologique 1 pour trouver un représentant localement libre de $Rp_\star\mathcal{F} \in D^b \operatorname{Coh}(M)$, en suivant l'exposé [LP96].

Soit $n > 0$ tel que $p^\star p_\star\mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}(n)$ soit surjectif et $R^k p_\star\mathcal{F}(n) = 0$. Pour n assez grand, ceci est toujours vrai, ce sont les théorèmes de Serre [Har77, Théorème III.8.8].

Proposition 2.1 ([LP96, Lemme 1.1]). Soit $\mathcal{G}$ le noyau de $p^\star p_\star\mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}(n)$. On note $\mathcal{H} = p^\star p_\star\mathcal{F}(n)$ pour simplifier. Alors le complexe $[0 \to R^1p_\star(\mathcal{G}(-n)) \to R^1p_\star(\mathcal{H}(-n)) \to 0]$ est un représentant localement libre de $Rp_\star\mathcal{F}$.

Démonstration. On a une suite exacte $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{F}(n)$. Par ailleurs, la formule de projection montre que $Rp_\star(p^\star\mathcal{V})(-n) = \mathcal{V} \otimes Rp_\star\mathcal{O}_X(-n)$, pour $\mathcal{V}$ un fibré vectoriel. En particulier, en degré zéro, $p_\star\mathcal{O}_X(-n) = 0$, ce qui montre que $p_\star(\mathcal{H}(-n)) = 0$, et même chose pour $\mathcal{G}$ par l'exactitude à gauche.

Par ailleurs, X étant une courbe, les images directes supérieures de rang au moins 2 sont nulles. On a donc une suite exacte longue $0 \to p_\star\mathcal{F} \to R^1p_\star\mathcal{G}(-n) \to R^1p_\star\mathcal{H}(-n) \to R^1p_\star\mathcal{F} \to 0$, ce qui prouve que le complexe choisi représente bien $Rp_\star\mathcal{F}$.

Par ailleurs, comme $\mathcal{F}(n)$ est $p_\star$-acyclique, $p_\star\mathcal{F}(n)$ est localement libre (sa cohomologie est de dimension localement constante par platitude), donc $R^1p_\star\mathcal{H}(-n)$ est localement libre sur M d'après la formule de projection. C'est aussi le cas de $R^1p_\star\mathcal{G}(-n)$ en tant que noyau de morphisme entre fibrés S-plats.

Par ailleurs, leurs fibres n'ont pas de sections pour n assez grand, ce qui implique que leur h^1 est localement constant, donc les faisceaux trouvés sont bien localement libres. □

Ceci fournit un relèvement du foncteur dérivé $Rp_\star$ à valeurs dans la catégorie des complexes de faisceaux cohérents sur M. Celui-ci vérifie quelques propriétés classiques : la formule de projection et la compatibilité avec un changement de base.

Définition 2.1 (Fibré déterminant et diviseur thêta). Soit μ la pente de $\mathcal{F}$, constante sur M. Soit E un fibré vectoriel de pente $g-1-\mu$ sur X. Alors $Rp_\star(\mathcal{F}\otimes q^\star E)$ est représenté par un complexe de longueur 1 de faisceaux localement libres *de même rang* sur M. On peut alors définir un fibré en droites $\lambda_{\mathcal{F}}(E) = \det^{-1} Rp_\star\mathcal{F}$ et une section canonique σ_E donnée par le déterminant de la différentelle, s'annulant très exactement l'ensemble des $m \in M$ tels que $\mathcal{F}_m \otimes E$ a une cohomologie non triviale. Si σ_E n'est pas nulle, le diviseur Θ_M associé est appelé *diviseur thêta.*

Démonstration. La pente de E a été choisie de sorte que $\mathcal{F}_m \otimes E$ soit de caractéristique d'Euler nulle sur toute fibre. On en déduit que si $0 \to V_0 \to V_1 \to 0$ représente l'image directe de $q^\star E \otimes \mathcal{F}$, $\operatorname{rg} V_O = \operatorname{rg} V_1$. On peut alors correctement définir le déterminant. Si celui-ci s'annule, c'est que $Rp_\star\mathcal{F}$ y est non nul, et que $\mathcal{F}$ a de la cohomologie sur la fibre en question. □

Ceci fournit en fait un morphisme additif $\lambda_{\mathcal{F}} : K(X) \to \operatorname{Pic} M$. Il ne dépend par ailleurs que de la classe de $\mathcal{F}$ dans $K(X \times S)$. On obtient assez facilement la proposition suivante :

Proposition 2.2. Soit L un fibré en droites sur M. On note χ le rang de $Rp_\star(\mathcal{F} \otimes q^\star E)$ dans le groupe de Grothendieck : c'est la caractéristique d'Euler de $\mathcal{F}_s \otimes E$. On suppose $\mathcal{F}$ de rang r et de degré d. Alors $\chi = d \operatorname{rg} E + r\chi(E)$ et

$$\lambda_{\mathcal{F}\otimes p^\star L}(E) = \lambda_{\mathcal{F}}(E) \otimes L^{\otimes\chi}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{F}\otimes p^\star L}(E)^{-1} &= \det Rp_\star(\mathcal{F} \otimes E \otimes p^\star L)\\ &= \det(Rp_\star(\mathcal{F} \otimes E) \otimes L).\end{aligned}$$

Par ailleurs $\deg \mathcal{F}_s \otimes E = \operatorname{rg}\mathcal{F} \deg(E) + \operatorname{rg}(E) \deg F = \chi - (\operatorname{rg} E \operatorname{rg}\mathcal{F})(1-g)$, d'où $\chi = r\chi(E) + d \operatorname{rg} E = r \deg(E) + \operatorname{rg} E\chi(\mathcal{F}_s)$. □

2.1.2 Groupe de Picard, fibrés déterminants et diviseurs thêta

Le fibré déterminant sur l'espace de modules ne peut en général pas être construit directement, en particulier lorsqu'il n'existe pas de fibré de Poincaré. On peut toutefois étudier la notion de fibré vectoriel sur un faisceau d'ensembles en général, comme utilisé dans [DN89, 3.1] ou par exemple, un champ algébrique, comme dans [BL94, 3.7].

Définition 2.2 (Groupe de Picard d'un foncteur). Soit F un foncteur contravariant de la catégorie des schémas dans celle des ensembles. Un fibré en droites sur F est la donnée, pour chaque élément x de $F(S)$, d'un fibré en droites L_x sur S, tel que pour tout f de $\operatorname{Hom}(S', S)$, on ait un isomorphisme $\alpha_x^L(f) : L_{F(f)(x)} \to f^\star L_x$ et la condition de compatibilité $\alpha_x^L(f \circ g) = \alpha_{F(f)(x)}^L(g) \circ g^\star\alpha_x^L(f)$.

Proposition 2.3. On a un fibré déterminant naturel sur le foncteur de module des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et degré d. Soit α un élément du groupe de Grothendieck dans l'orthogonal $H(r, d)$ aux fibrés (r, d) pour la forme quadratique $E \mapsto \chi(E^2)$.

Si F est une famille de faisceaux cohérents sur $S \times X$, on lui associe le fibré en droites $(\det Rp_{1\star}(F \otimes p_2^*\alpha))^\vee$ sur S, qui ne dépend que de la classe de S-équivalence de F.

Théorème 2.4 ([DN89, Théorème D]). *Le fibré en droites sur le foncteur $F(r, d)$ descend à un fibré en droites Θ_α sur l'espace de modules $U(r, d)$. On a de plus le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Pic}^0(X) \arrow[r] \arrow[d] & H(r,d) \arrow[d, "\Theta_\bullet"] \\
\operatorname{Pic}(\operatorname{Jac}^{(d)} X) \arrow[r, "\det^\star"] & \operatorname{Pic} U(r,d)
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2.5. Le groupe de Picard de $U(r, d)$ est le coproduit fibré de $Pic(\operatorname{Jac}^{(d)})$ et de $H(r, d)$ sur $\operatorname{Jac}^0 X$.

Corollaire 2.6. Soient E et E' deux fibrés vectoriels de mêmes rang et degré. Alors

$$\mathcal{O}(\Theta_{E'}) = \mathcal{O}(\Theta_E) \otimes \det^\star(\det E^\vee \otimes \det E')$$

Définition 2.3. Soit L un fibré en droites de degré $g-1$ sur une surface de Riemann X. On appelle fonctions theta généralisées les sections du fibré en droites $\mathcal{O}(\Theta_L^k)$ sur l'espace de modules des fibrés semi-stables de rang r et de déterminant trivial sur X (ou bien sur l'espace des fibrés de degré 0).

2.2 Algèbres de Lie affines et sections du fibré déterminant

Les fonctions thêta généralisées ont fait leur apparition en théorie conforme des champs, sous la forme d'espaces d'invariants de certaines représentations d'algèbres de Lie affines, appelés *blocs conformes*. Cette vision est étroitement liée à la construction de l'espace de modules des fibrés vectoriels comme double quotient d'un groupe.

2.2.1 L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C}((z)))$ et les algèbres de Kac-Moody

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. On note $L\mathfrak{g}$ ses points à valeurs dans $\mathbb{C}((z))$ (le lacet infinitésimal), c'est l'algèbre des lacets de $\mathfrak{g}$. On note $\langle \bullet, \bullet \rangle$ la forme de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$.

L'extension centrale universelle de $L\mathfrak{g}$ est définie par le cocycle à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$(M \otimes f, N \otimes g) \mapsto \langle M, N \rangle \operatorname{Res}_{z=0}(gdf)$$

qui donne une extension $0 \to \mathbb{C} \to \widehat{\mathfrak{g}} \to L\mathfrak{g} \to 0$.

Cette extension apparaît naturellement lorsqu'on veut relever une représentation projective de $L\mathfrak{g}$ en une représentation linéaire. Une représentation de $\widehat{\mathfrak{g}}$ est dite de poids k si le générateur canonique du centre agit par multiplication par l.

On a un certain nombre de sous-algèbres particulières qui interviendront par la suite : $L^+\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]]$, $L^{>0}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes z\mathbb{C}[[z]]$, $L^{<0}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$. Notamment, l'extension centrale universelle est scindée sur $L^+\mathfrak{g}$.

Soit λ un poids, et $R(\lambda)$ la représentation de $\mathfrak{g}$ de poids dominant λ. L'évaluation en zéro donne un morphisme $L^+\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, qui s'étend trivialement en une représentation $R_k(\lambda)$ de poids k de $\widehat{L^+\mathfrak{g}}$ et permet de définir un module de Verma de plus haut poids λ (c'est-à-dire un module intégrable dont tous les autres modules intégrables de plus haut poids λ sont des quotients) [Kac90, Chapter 9] :

$$M_k(\lambda) = \operatorname{Ind}_{\widehat{L^+\mathfrak{g}}}^{\widehat{\mathfrak{g}}} R_k(\lambda) = \mathfrak{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathfrak{U}(\widehat{L^+\mathfrak{g}})} R_k(\lambda)$$

où $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Le module $M_k(\lambda)$ a un unique quotient irréductible $\mathcal{H}_k(\lambda)$.

Proposition 2.7. En tant que $L^{<0}\mathfrak{g}$-modules, $M_k(\lambda)$ est isomorphe à $\mathfrak{U}(L^{<0}\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} R(\lambda)$.

Démonstration. On a une décomposition $\widehat{\mathfrak{g}} = L^{<0}\mathfrak{g} \oplus \widehat{L^+\mathfrak{g}}$. On remarque que $\mathfrak{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ est isomorphe comme $L^{<0}\mathfrak{g}$-module à $\mathfrak{U}(L^{<0}\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{U}(\widehat{L^+\mathfrak{g}})$.

On en déduit $M_k(\lambda) = \mathfrak{U}(L^{<0}\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{U}(\widehat{L^+\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathfrak{U}(\widehat{L^+\mathfrak{g}})} R_k(\lambda)$ d'où le résultat. □

2.2.2 Le fibré déterminant sur le champ de modules

Soit $\mathcal{SL}(r)$ le champ de modules des fibrés vectoriels de rang r sur la courbe X, et $\mathcal{Q}$ l'ind-variété $SL_r(K)/SL_r(\mathcal{O})$. On a sur $\mathcal{SL}(r)$ un fibré déterminant canonique. Un fibré sur un champ est la donnée pour chaque objet $E \to S$ au-dessus d'une base S d'un fibré en droites sur S, tel que pour tout morphisme de $F \to T$ dans $E \to S$, le fibré associé sur T et celui sur S restreint à T soient isomorphes, par un isomorphisme compatible aux restrictions.

Le fibré déterminant lui-même est tautologiquement défini pour $E \to S$ par $\det^{-1} R\pi_\star E$. On peut montrer que tiré sur Q, c'est le fibré associé à un certain caractère χ de $SL_r(\mathcal{O})$ (voir [BL94]).

Théorème 2.8 ([Kum87, Mat88]). *L'espace $H^0(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_\chi^k)$ est canoniquement isomorphe à la duale de la représentation de base $\mathcal{H}_k(0)$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}_r(K)$ de charge centrale k.*

Le champ de modules $\mathcal{SL}(r)$ est le quotient de Q par le groupe $\mathfrak{sl}_r(\mathcal{O}_{X\setminus\{p\}})$ (où p est le point dont $\mathcal{O}$ est l'anneau local). Ceci permet de déduire le théorème fondamental :

Théorème 2.9 ([BL94]). *L'espace des fonctions thêta généralisées $H^0(\mathcal{SL}_X(r), \mathcal{L}^k)$ est l'espace des vides, c'est-à-dire les invariants de $V_k^\vee$ par $\mathfrak{sl}_r(\mathcal{O}_{X\setminus\{p\}})$.*

Ce résultat fournit également la réponse pour l'espace de modules grossier :

Corollaire 2.10 ([BL94]). On a un isomorphisme canonique entre $H^0(SU(r), \mathcal{L}^k)$ et l'espace des vides.

Démonstration. Le champ de modules $\mathcal{SL}(r)$ est recouvert par les ouverts U_N des fibrés vectoriels E tels que $E(Np)$ soit acyclique et engendré par ses sections globales. On obtient ainsi E comme un quotient de $\operatorname{Quot}_r(\mathcal{O}(-Np)^{h(N)})$, qu'on peut paramétrer par un schéma lisse K_N. Soit V_N le fibré vectoriel associé à $\pi_\star(\det E)$ sur K_N : le complémentaire de la section nulle paramètre les fibrés de rang r dans K_N munis d'une trivialisation du déterminant. Le quotient par $GL(\mathbb{C}^{h(N)})$ est alors U_N.

On veut montrer que l'ouvert de semi-stabilité a un complémentaire de codimension au moins 2. Or celui-ci est contenu dans U_N pour N assez grand. Il s'agit de montrer que toute section du fibré déterminant sur H_N s'étend de manière unique à une section invariante sur H_N (par le théorème de Hartogs). On doit donc montrer que le complémentaire de l'ouvert de semi-stabilité dans H_N est de codimension au moins 2.

Considérons le champ des couples (E, F) de fibrés de rang r à déterminant trivial, munis d'un sous-fibré F de rang r' et degré $d > 0$. L'image de ces champs pour $r' \leqslant r$ et $d > 0$ variables recouvre le fermé de non-semi-stabilité, et est de dimension trop petite pour être de codimension 1 (on suppose $r \geqslant 2$). □

2.3 Blocs conformes et formule de Verlinde

Le calcul de la dimension des espaces de blocs conformes se fait à partir des règles de fusion, qui décrivent les relations entre ces dimensions lorsque les courbes sous-jacentes passent par des singularités (règles de factorisation). On pourra se référer à [Bea96] pour un exposé complet des propriétés de l'anneau de fusion et ses conséquences, à [TUY89] pour les énoncés originels, et à [Fal94].

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan et R le système de racines associé. On choisit une base de R, et on note θ la plus grande racine. On note P_l l'ensemble des poids dominants λ tels que $(\lambda|\theta) \leqslant l$.

Définition 2.4. Soit C une courbe projective lisse connexe sur $\mathbb{C}$, pointée par s points $p_1, \ldots, p_s$. Pour chaque p_i, on choisit un poids $\lambda_i \in P_l$, et on note $\mathcal{H}_{\lambda_i}$ la représentation irréductible de niveau l de $\widehat{\mathfrak{g}}$ associée.

Soit $\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}} := \bigotimes \mathcal{H}_{\lambda_i}$. On note $\mathfrak{g}(C - \overrightarrow{p}) = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(C \setminus \{p_1, \ldots p_s\}) \subset \bigoplus \widehat{L\mathfrak{g}}(p_i)$. Cette algèbre de Lie agit sur $\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$ naturellement sur chaque facteur (le théorème des résidus assurant que le terme constant ne gêne pas).

L'espace des *blocs conformes* est l'espace des coinvariants $V_C(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda}) := [\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}}]_{\mathfrak{g}(C-\overrightarrow{p})}$ (le plus gros quotient sur lequel l'action est triviale), et son dual est $V_C^\dagger(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda}) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(C-\overrightarrow{p})}(\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}}, \mathbb{C})$, c'est-à-dire les formes linéaires invariantes.

Soit Q le réseau engendré par les racines longues dans le réseau des poids. Soit G le groupe algébrique simplement connexe d'algèbre de lie $\mathfrak{g}$, T un tore maximal, et T_l les éléments du tore annihilés par les caractères de $(l + h^\vee)Q$, ou l est le niveau et $h^\vee$ le nombre de Coxeter dual de $\mathfrak{g}$.

On note T_l^{reg} l'ensemble des éléments réguliers de T_l, c'est-à-dire qui ne sont pas annulés par les racines. Si t est un élément régulier, on peut définir $\Delta(t) = \prod_{\chi \in R}(\chi(t) - 1)$. Les poids réguliers à action du groupe de Weyl près sont exactement les $\exp\left(2i\pi\frac{\lambda+\rho}{l+h^\vee}\right)$ où ρ est le demi-somme des racines positives.

Théorème 2.11 (Formule de Verlinde). *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple non exceptionnelle (sauf éventuellement G_2). On considère une courbe stable n-pointée $(C, \overrightarrow{p})$ et des poids $\overrightarrow{\lambda}$ de niveau l. Alors*

$$\begin{aligned}
\dim V_C(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda}) &= (\operatorname{card} T_l)^{g-1} \sum_{t \in T_l^{\mathrm{reg}}} \frac{\mathrm{Tr}_{V_{\overrightarrow{\lambda}}}(t)}{\Delta(t)^{g-1}} \\
&= (\operatorname{card} T_l)^{g-1} \sum_{\mu \in P_l} \mathrm{Tr}_{V_{\overrightarrow{\lambda}}}\left(\exp 2i\pi \frac{\lambda+\rho}{l+h^\vee}\right) \prod_{\alpha \in R^+} \left| 2\sin\left(\pi \frac{(\alpha|\mu+\rho)}{l+h^\vee}\right)\right|^{2-2g}
\end{aligned}$$

L'accouplement utilisé est la forme de Killing normalisée qui donne une longueur de 2 aux racines longues.

Noter que $\operatorname{card} T_l$ est égal à $(l + h^\vee)^{\mathrm{rg}\,\mathfrak{g}}[W : W_{\mathrm{long}}]$ où W_{long} est le réseau engendré par les racines longues et W le réseau des poids. On notera que l'indice du réseau des racines dans celui des poids est le cardinal du centre du groupe de Lie G associé, et que l'indice des racines longues dans les racines vaut 1 pour A_n, 2 pour B_n, 2^{n-1} pour C_n, 1 pour D_n.

3 Cohomologie équivariante et formule de localisation

3.1 Le cas des variétés différentielles

La cohomologie équivariante d'un espace topologique (voir [AB84] ou [Aud04] par exemple) permet d'aborder la topologie d'un espace quotient tout en continuant à travailler sur l'espace de départ.

Définition 3.1 (Espaces classifiants et fibrés classifiants). Soit G un groupe. Soit $\mathbf{E}G$ un espace topologique contractile muni d'une action libre de G. Alors $\mathbf{E}G \to \mathbf{B}G = \mathbf{E}G/G$ est appelé le fibré classifiant de G, et $\mathbf{B}G$ son espace classifiant.

On peut utiliser la construction de Milnor ([Hus94, Aud04]), par exemple, pour construire un tel espace pour un groupe quelconque.

Soit M un G-espace topologique. On note $M_G = M \times_G \mathbf{E}G$ l'espace mixte $(M \times \mathbf{E}G)/G$ (où G agit à droite à l'envers sur le premier terme et à gauche normalement sur le second). On a alors le diagramme de Cartan-Borel

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d] & M \times \mathbf{E}G \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{E}G \arrow[d] \\ M/G & M_G \arrow[l] \arrow[r] & \mathbf{B}G \end{tikzcd}.$$

On peut préciser que la fibre de $M_G \to M/G$ en un point x est exactement $\mathbf{E}G/H = \mathbf{B}H$, où H est le stabilisateur de x. En particulier, si l'action de G est libre, les flèches horizontales de gauche sont des équivalences d'homotopie. Dans la catégorie homotopique, $\mathbf{B}G$ est le quotient d'un point par G.

Définition 3.2. La cohomologie équivariante de M est définie comme la cohomologie de M_G. On peut la noter $H^\bullet_G(M) := H^\bullet(M_G)$.

On obtient ainsi celle de M/G si l'action est libre, sinon, on a la cohomologie du quotient d'un G-espace homotope à M. L'inclusion de M dans M_G (après choix d'un point base de $\mathbf{E}G$) donne un morphisme d'algèbres $H^\bullet_G(M) \to H^\bullet(M)$, et la projection de M_G sur $\mathbf{B}G$ fait de l'algèbre de cohomologie équivariante une algèbre sur la cohomologie équivariante du point $H^\bullet(\mathbf{B}G) = H^\bullet_G(*)$. On a ainsi les isomorphismes $H^\bullet(\mathbf{B}H) = H^\bullet_H(*) = H^\bullet(\mathbf{E}G \times_G G/H) = H^\bullet_G(G/H)$.

Théorème 3.1. *Soit G un groupe de Lie de rang l, T un tore maximal (engendré par une sous-algèbre de Cartan de dimension l), et W le groupe de Weyl. Alors pour tout G-espace M, on a $H^\bullet_G(M) \xrightarrow{\sim} H^\bullet_T(M)^W$.*

Proposition 3.2 (Espace classifiant de $GL_r(\mathbb{C})$ [VLP85, Exposé 3]). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. La grassmannienne des sous-espaces de dimension r de $\mathcal{H}$ est l'espace classifiant de $G = GL_r(\mathbb{C})$, et le fibré classifiant est l'ouvert de $\mathcal{H}^r$ constitué des r-uplets de vecteurs linéairement indépendants.

Soit T un tore compact de rang l. On peut concevoir d'étendre la théorie à un groupe quelconque, cependant le cas des tores est déjà très intéressant. Remarquons pour commencer que si K est un sous-groupe de T et qu'on a un morphisme T-équivariant $X \to T/K$, alors $H^\bullet_T(X)$ est un $H^\bullet(\mathbf{B}T)$-module. Ceci résulte du fait que $H^\bullet_T(T/K) = H^\bullet_K(*)$.

Proposition 3.3. Supposons donnée une action de T sur une variété X. Soit X^T l'ensemble des points fixes. C'est une sous-variété de X (cf. [Aud04, slice theorem]). Alors $H^\bullet_T(X \setminus X^T)$ est un module sur $H^\bullet(\mathbf{B}T)$, dont le support dans Spec $H^\bullet(\mathbf{B}T) = \mathfrak{t}^\dagger$ est la réunion des $\mathfrak{k}^\dagger$, où $\mathfrak{k}$ est l'albèbre de Lie du stabilisateur de l'un des points.

Démonstration. On peut appliquer la remarque précédente à une orbite sous T : il faut considérer un voisinage tubulaire équivariant. ☐

La suite exacte de cohomologie relative nous montre alors que $H^\bullet$ vérifie le théorème de localisation $H^\bullet(X) \simeq H^\bullet(X^T)$ après localisation de $H^\bullet(\mathbf{B}BG)$.

Théorème 3.4 (Formule de localisation d'Atiyah-Bott). *Soit $\alpha \in H^\bullet_T(X)$. Alors*

$$\alpha = \sum_{i:F \to X} i_\star \left(\frac{i^\star \alpha}{e^T(N_F X)} \right)$$

où la somme porte sur les composantes connexes F de X^T, $N_F X$ est le fibré normal de F dans X, d est la codimension de F et la classe d'Euler désigne la dernière classe de Chern pour une variété complexe, le tout prenant un sens dans une localisation convenable de l'algèbre de cohomologie.

Démonstration. L'isomorphisme entre les algèbres localisées permet d'écrire $\alpha = \sum_F i_\star \alpha_F$, où α_F est la partie provenant de $H^\bullet_T(F)$. Alors $i^\star \alpha = i^\star i_\star \alpha_F = e^T(N_F X) \cap \alpha_F$, d'où la valeur de α_F. ☐

La formule de localisation se généralise au cas de variétés algébriques, y compris en remplaçant la cohomologie par les groupes de Chow (voir [EG98]). Cependant, en général, on veut également pouvoir étudier des variétés possédant des singularités. C'est le but de la section suivante.

3.2 Théorie de la déformation et obstruction tangente

En général, le schéma Quot n'est pas lisse. La théorie de la déformation sur ce schéma est cependant bien comprise et l'information pertinente peut être encodée dans un complexe de fibrés vectoriels.

On renverra à [FGI$^+$05] pour plus de détails.

Définition 3.3 (Foncteurs de déformation). Un foncteur de déformation est un foncteur de la catégorie des k-algèbres artiniennes locales dans les ensembles, qui associe à k un singleton.

On s'intéresse en particulier aux déformations d'un objet appartenant à une catégorie paramétrée par un foncteur de modules F. On associera à une algèbre R l'ensemble des éléments de $F(R)$ dont la restriction à $F(\operatorname{Spec} k)$ est un objet fixé p.

Définition 3.4. Une *petite extension* d'une algèbre artinienne locale A est une k-algèbre B munie d'un idéal M annulé par $\mathfrak{m}_B$ tel que $A = B/M$.

On s'intéresse à la possibilité de prolonger un objet défini sur Spec A à Spec B. Dans la suite, on notera D_R le foncteur de déformation obtenu par restriction du foncteur des points de Spec R. Lorsqu'un foncteur de modules est représentable, les foncteurs de déformations associés sont des foncteurs issus des algèbres locales aux points fermés de l'espace de modules.

Théorème 3.5. *Soit R une k-algèbre locale d'espace tangent $T = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\vee$ de dimension d. Soit $S = \widehat{\operatorname{Sym}} T^\vee$. On a un épimorphisme naturel $S \twoheadrightarrow R$ de noyau J. Alors pour toute petite extension $0 \to M \to B \to A \to 0$ on a une suite exacte fonctorielle*

$$0 \to T \otimes M \to D_R(B) \to D_R(A) \to (J/\mathfrak{m}_S J)^\vee \otimes M.$$

Démonstration. Soit une petite extension comme indiqué, et $\varphi \in D_R(A) = \operatorname{Hom}(R, A)$. On peut relever φ en $\bar{\varphi} : S \to A$, d'où des $\tilde{\varphi} : S \to B$ en relevant les images d'une base de $T^\vee$. On a une bijection canonique entre les $\tilde{\varphi}$ qui envoient J sur zéro dans B et les relèvements de φ envoyant R dans B.

Soient $\alpha, \beta : S \to B$ deux relèvements de φ. Comme α et β coïncident dans A, $\alpha - \beta$ est à valeurs dans M, et c'est une dérivation. Elle détermine donc un élément de $T \otimes M$. Réciproquement toute dérivation de S dans M permet de construire un autre relèvement de φ : ceci donne le côté gauche de la suite exacte.

Reste à trouver à quelle condition φ peut effectivement se relever : le morphisme relevé $\tilde{\varphi}$ envoie J dans M (car $\bar{\varphi}$ envoie J sur zéro), et envoie $\mathfrak{m}_S J$ sur zéro, car M est annulé par $\mathfrak{B}$. Ceci fournit un morphisme $J/\mathfrak{m}_S J \to M$. Celui-ci est nul si est seulement si J est envoyé sur zéro dans B, donc si le morphisme trouvé ci-dessus est nul. ☐

Ceci permet de caractériser l'espace tangent et les obstructions à la déformation pour un foncteur représentable. On généralise naturellement ces notions à un foncteur de déformation quelconque.

Définition 3.5 (Théorie d'obstruction tangente). Soit $\mathcal{D}$ un foncteur de déformation. Une théorie de l'obstruction tangente est la donnée de deux espaces vectoriels T_1 et T_2 de dimension finie sur k tels que pour toute petite extension $0 \to M \to B \to A \to 0$ d'algèbres artiniennes locales (i.e. M est annulé par l'idéal maximal de B), on ait une suite exacte fonctorielle

$$T_1 \otimes M \to D(B) \to D(A) \to T_2 \otimes M$$

avec un zéro à gauche si $A = k$.

Remarque. En posant $\Delta = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, on a une suite exacte $0 \to T_1 \to D(\Delta) \to D(k) \to T_2$ qui calcule T_1, et $D(\Delta)$ est un espace affine sur T_1.

Le cas des schémas Quot de Grothendieck est fondamental pour étudier la lissité des espaces de modules et des schémas de Hilbert : on considère le foncteur de déformation issu du foncteur des points, autour d'un point fixé.

Théorème 3.6 ([FGI$^+$05]). *Le schéma $Q = \operatorname{Quot}_P(X, \mathcal{F})$ admet une théorie d'obstruction parfaite avec $T^1 = \operatorname{Hom}(K, Q)$ et $T^2 = \operatorname{Ext}^1(K, Q)$ en un point représentant le quotient $0 \to K \to \mathcal{F} \to Q \to 0$.*

Démonstration. Le calcul de l'espace tangent est un calcul classique en théorie de la déformation. On pourra consulter [LP95] pour cela.

Considérons une petite extension $0 \to M \to B \to A \to 0$. Avec $M^2 = 0$, et une famille plate de quotients cohérents $0 \to K \to \mathcal{F} \otimes A \to Q \to 0$ sur $X_A = X \times \operatorname{Spec} A$.

Par platitude, on a des suites exactes organisées comme suit :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\ & K \otimes M \arrow[d] & & K \otimes A \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \otimes B \arrow[r] & \mathcal{F} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & Q \otimes M \arrow[d] & & Q \otimes A \arrow[d] & \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

qui nous permet de modifier la suite exacte horizontale. On peut ainsi obtenir un complexe $0 \to K \otimes M \to \mathcal{F} \otimes B \to Q \to 0$, exact sauf au milieu, qui présente une cohomologie $\mathcal{H}$. On a alors une suite exacte naturelle :

$$0 \to Q \otimes M \to \mathcal{H} \to K \to 0.$$

C'est une suite de $\mathcal{O}_{X_A}$-modules, car elle est annulée par M, ce qui donne une classe d'extension $\mathrm{ob}(Q)$ dans $\mathrm{Ext}^1(K, Q \otimes M)$.

Supposons $\mathrm{ob}(Q) = 0$. On trouve alors une section $K \to \mathcal{H}$. Rappelons que $\mathcal{H}$ est inclus dans $\mathcal{F} \otimes B / K \otimes M$. Si K' est l'image de K dans $\mathcal{F} \otimes B$, on complète le diagramme précédent :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Q \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

où la première ligne est exacte par construction, la seconde colonne est la définition de Q' comme conoyau de $K' \to \mathcal{F} \otimes B$. L'exactitude de tout cela entraîne celle de la dernière colonne. Réciproquement, si une telle construction est possible, On peut écrire $K = K'/K \otimes M$ ce qui donne une section vers $\mathcal{H}$, et $\mathrm{ob}(Q) = 0$. Si on fixe une section $K \to \mathcal{H}$, on remarque aussi qu'on peut lui ajouter un élément quelconque de $\mathrm{Hom}(K, Q \otimes M)$, qui paramètre ainsi les extensions.

On utilise ensuite le critère local de platitude [AK70] pour montrer que Q' est plat sur B. Il suffit de vérifier que Q est plat sur A (ce qui est effectivement vrai), et que $Q \otimes M$ est isomorphe à MQ, ce qui découle de la construction. $\square$

On veut maintenant obtenir des faisceaux représentant l'espace tangent et l'espace d'obstruction.

Définition 3.6. Un complexe d'obstruction tangente parfait est un complexe de fibrés vectoriels de cohomologie : $[T^1 F \xrightarrow{0} T^2 F]$ tel que $\Gamma \circ T^1 F$ soit le foncteur des espaces tangents et $\Gamma \circ T^2 F$ la théorie de l'obstruction tangente de F.

Théorème 3.7. *Le schéma $Q = \mathrm{Quot}_{r,d}(C, \mathcal{O}^N)$ admet une théorie d'obstruction parfaite relative. On considère une famille de quotients $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}^N \to \mathcal{F} \to 0$ sur $S \times C \xrightarrow{\pi} S$ paramétrée par $f : S \to Q$, et un faisceau $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_S$-modules. Alors : $T^1_f(\mathcal{I}) = \mathcal{H}om_S(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes f^\star \mathcal{I})$ et $T^2_f(\mathcal{I}) = \mathcal{E}xt^1_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{I}$.*

Dans le cas du schéma Quot traité dans [MO05], on trouve un complexe parfait d'obstruction tangente :

Théorème 3.8. *Le schéma $Q = \mathrm{Quot}_{r,d}(C, \mathcal{O}^N)$ admet une théorie d'obstruction tangente parfaite, un complexe d'obstruction tangente et une classe fondamentale virtuelle.*

Démonstration. Soit m un entier suffisamment grand pour que tout fibré de rang r et de degré $rm \pm d$ soit $\pi_\star$-acyclique et engendré par ses sections globales. Le schéma Quot est alors construit comme sous-schéma d'une grassmannienne en associant à un quotient $O \to E \to \mathcal{O}^N \to F \to 0$ le point correspondant au sous-espace $H^0(E(m))$ de $H^0(\mathcal{O}(m))^N$. La grassmannienne G en question est donc celle des sous-espaces de dimension $\chi(E(m)) = rm - d - r\bar{g}$ dans un espace de dimension $N\chi(\mathcal{O}(m)) = N(m + 1 - g)$. Soit ι l'immersion $Q \hookrightarrow G$.

On utilise la technique déjà vue dans 2.1 : on a une suite exacte $0 \to \mathcal{K} \to \pi^\star \pi_\star \mathcal{E}(m) \otimes \mathcal{O}(-m) \to \mathcal{E} \to 0$. On lui applique le foncteur $\mathcal{H}om_S(\bullet, \mathcal{F}) := \pi_{S\star}\, \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{F})$. On obtient :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{H}om_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) &\to \mathcal{H}om_S(\pi^\star \pi_\star \mathcal{E}(m) \otimes \mathcal{O}(-m), \mathcal{F}) \to \mathcal{H}om_S(\mathcal{K}, \mathcal{F}) \to \\ \to \mathcal{E}xt^1_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) &\to \mathcal{E}xt^1_S(\pi^\star \pi_\star \mathcal{E}(m) \otimes \mathcal{O}(-m), \mathcal{F}) \to \mathcal{E}xt^1_S(\mathcal{K}, \mathcal{F}) \to 0. \end{aligned}$$

Constatons que $\pi_\star \mathcal{E}(m)$ est localement libre, ainsi que $\pi^\star \pi_\star \mathcal{E}(m) \otimes \mathcal{O}(-m)$. Le second terme devient $\mathcal{H}om_S(\pi_\star \mathcal{E}(m), \pi_\star \mathcal{F}(m))$ par la formule de projection. Mais ceci, en un point, vaut $\mathrm{Hom}(H^0(E(m)), H^0(F(m)) = H^0(\mathcal{O}(m))^N / H^0(E(m))$ qui est l'espace tangent à la grassmannienne G. De plus $\mathcal{E}xt^1_S(\pi^\star \pi_\star \mathcal{E}(m) \otimes \mathcal{O}(-m), \mathcal{F})$ est en fait $(R^1 \pi_\star)\, \mathcal{H}om(\pi^\star \pi_\star \mathcal{E}(m) \otimes \mathcal{O}(-m), \mathcal{F}) = R^1 \pi_\star (\pi^\star (\pi_\star \mathcal{E}(m))^\vee \otimes \mathcal{F}(m)) = (\pi_\star \mathcal{E}(m))^\vee \otimes R^1 \pi_\star \mathcal{F}(m) = 0$ par la formule de projection.

On obtient en particulier que $\pi_\star\, \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F}) = \mathcal{H}om_S(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ est localement libre, puisque si $\mathcal{E}xt^1_S(\mathcal{K}, \mathcal{F})$, on a a fortiori $R^1 \pi_\star\, \mathcal{H}om(\mathcal{K}, \mathcal{F}) = 0$ (suite spectrale Ext / $\mathcal{E}xt$).

Notons $\mathcal{A}_0 = \iota^\star TG$, et $\mathcal{A}_1 = \mathcal{H}om_S(\mathcal{K}, \mathcal{F})$. On a alors une suite exacte

$$O \to T^1_f \to \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1 \to T^2_f \to 0.$$

Soit $\mathcal{I}$ un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules. On voudrait obtenir, sachant que $T^1_f(\mathcal{I}) = \mathcal{H}om_s(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I})$ et $T^2_f(\mathcal{I}) = \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{I}$, une suite exacte

$$0 \to T^1_f(\mathcal{I}) \to \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{I} \to \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{I} \to T^2_f(\mathcal{I}) \to 0.$$

Pour cela, on remplace $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I}$, ce qui ne change rien à l'application du foncteur $\mathcal{H}om_S$. On a alors :

$$0 \to \mathcal{H}om_S(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I}) \to \mathcal{H}om_S(\pi^\star \pi_\star \mathcal{E}(m) \otimes \mathcal{O}(-m), \mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I}) \to \mathcal{H}om_S(\mathcal{K}, \mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I}) \to \mathcal{E}xt^1_S(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I}) \to 0.$$

Soit $P_\bullet$ une résolution libre de $\mathcal{I}$, V un faisceau localement libre sur $C \times S$. Alors $\mathcal{E}xt^k_S(V, \mathcal{F} \otimes \pi^\star P_\bullet) = R^k \pi_\star (V^\vee \otimes \mathcal{F} \otimes \pi^\star P_\bullet) = R^k \pi_\star (V^\vee \otimes \mathcal{F}) \otimes P_\bullet = \mathcal{E}xt^k_S(V, \mathcal{F}) \otimes P_\bullet$ par la formule de projection. Puisque V et $\mathcal{F}$ sont plats sur S, la cohomologie du complexe $[V^\vee \otimes \mathcal{F} \otimes \pi^\star P_\bullet]$ est exactement $V^\vee \otimes \mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I}$. Considérons alors la suite spectrale de foncteurs hyperdérivés donnée par :

$$E_1^{p,q} = R^q \pi_\star (V^\vee \otimes \mathcal{F} \otimes \pi^\star P_{-p}) \Rightarrow R^{q+p}(V^\vee \otimes \mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I})$$

qui donne $E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}_{-p}(\mathcal{E}xt^q_S(V, \mathcal{F}), \mathcal{I})$ par le calcul précédent (et parce que la différentielle d_1 envoie (p, q) dans $(p+1, q)$, sa cohomologie est donc l'homologie par rapport à l'indice de $P_\bullet$).

Dans le cas qui nous intéresse, $\mathcal{E}xt^1_S(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ est nul, et par platitude, $\mathcal{H}om^1_S(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ est localement libre : les termes $E_2^{p,q}$ sont donc nuls pour $p < 0$ et $\mathcal{H}om_S(\mathcal{K}, \mathcal{F} \otimes \pi^\star \mathcal{I}) = \mathcal{H}om^1_S(\mathcal{K}, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{I}$. Le même raisonnement s'applique au terme précédent. Pour le dernier terme, on fait pareil (?). $\square$

Si $[\mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1]$ est un complexe d'obstruction tangente parfait, l'élément formel $\mathcal{F}^0 \ominus \mathcal{F}^1$ dans le groupe de Grothendieck est appelé *fibré tangent virtuel*. Celui du schéma Quot est d'après le calcul précédent $\mathcal{A}_0 \ominus \mathcal{A}_1 = TG \ominus \mathcal{H}om_Q(\mathcal{K}, \mathcal{F})$. Le fibré tangent virtuel est exprimé à partir de faisceau localement libres, contrairement, par exemple, au faisceau tangent de Zariski et au faisceau exprimant l'obstruction tangente. Il a également la dimension qu'on attend du schéma Quot. Il est donc facile d'exprimer ses classes caractéristiques, et la formule de localisation se généralise naturellement au cas virtuel (voir [GP99]), avec des classes fondamentales virtuelles (qui sont simplement les classes fondamentales usuelles si la dimension virtuelle coïncide avec la dimension usuelle), et des classes caractéristiques virtuelles.

4 Nombres d'intersections sur le schéma Quot

Le schéma Quot de Grothendieck étant muni d'une théorie d'obstruction tangente parfaite, on peut définir sa classe fondamentale virtuelle à l'aide de son complexe d'obstruction tangente. On va enrichir cette construction en tirant parti de l'action naturelle de GL_N sur $\mathrm{Quot}_{N-r,d}(\mathcal{O}_C^N)$: les méthodes de Li et Tian, ou de Behrend et Fantechi [BF97, LT98] se généralisent naturellement pour construire à partir d'un complexe d'obstruction tangente parfait, par exemple, naturellement linéarisé sous l'action du groupe, une classe fondamentale virtuelle dans le groupe de Chow équivariant. Cette classe virtuelle coïncide avec la classe fondamentale usuelle pour d assez grand (car Q est alors génériquement réduit, irréductible et de la bonne dimension [BDW96]), auquel cas on calcule de vrais nombres d'intersection.

4.1 Formules de résidus pour la cohomologie de la grassmannienne

On étudiera les relations qui définissent la cohomologie de la grassmannienne G des sous-espaces de rang k de $\mathbb{C}^N$. Celle-ci est munie d'une suite exacte tautologique $0 \to E \to \mathcal{O}^N \to F \to 0$.

La théorie classique du calcul de Schubert permet d'étudier l'anneau de cohomologie de la grassmannienne. On peut montrer qu'il est équivalent de faire les calculs dans l'anneau de Chow (on pourra trouver l'ensemble des résultats classiques dans [Ful98]). La technique des résidus de Severi fournit une méthode originale et très efficace d'effectuer les calculs d'intégrales en cohomologie classique comme dans la petite cohomologie quantique, construite à partir des morphismes de $\mathbb{P}^1$ dans la variété. On pourra en trouver un résumé dans [Ber96].

4.1.1 Cohomologie classique

Soit x_i la classe de Chern de degré i du fibré $E^\vee$, et y_j celle de $F^\vee$. Par la formule de Whitney, $c(E^\vee)c(F^\vee) = 1$. On sait que l'algèbre de cohomologie de la grassmannienne est engendrée librement par les x_i, y_j avec pour seules relations celles données par l'égalité précédente. Sous une forme équivalente, on peut écrire

$$H^\bullet(G) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]/I$$

où I est l'idéal engendré par des coefficients de $t^{N-k+1}, \dots, t^N$ dans la série formelle inverse de $\sum x_i t^i$.

Soient U_p les polynômes de Newton des racines de Chern de $E^\vee$: $U_p(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum \lambda_i^p$. On note abusivement $U_p(x_1, \dots, x_k)$ le polynôme correspondant en les fonctions symétriques élémentaires. Alors si $c_t(\bullet)$ désigne le polynôme de Chern

$$-\log c_t(E^\vee) = \sum_{i=1}^{k} -\log(1 + \lambda_i t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}(-1)^p U_p(x_\bullet) t^p$$

qui devient en calculant la dérivée logarithmique par rapport à x_j (coefficient de t^j dans $c_t(E^\vee)$)

$$-\frac{t^j}{c_t(E^\vee)} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}(-1)^p \frac{\partial U_p}{\partial x_j} t^p.$$

L'idéal I est engendré par les coefficients de degré $N + 1 - i$ de $c_t(E^\vee)^{-1}$ pour i entre 1 et k. Choisissons un tel i et $j = i$: le coefficient de t^{N+1} est

$$-y_{N+1-i} = \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} \frac{\partial U_{N+1}}{\partial x_i}.$$

Soit W_0 le polynôme $\frac{1}{N+1} U_{N+1}$. On vient donc d'exprimer le fait que le spectre de l'algèbre de cohomologie de la grassmannienne (qui est commutative) est le schéma affine dans $\mathbb{A}^k$ d'équation $dW_0 = 0$. C'est en fait un schéma artinien supporté par l'origine.

4.1.2 Cohomologie quantique

La petite cohomologie quantique (par opposition à la cohomologie quantique usuelle définie à partir des invariants de Gromov-Witten) permet de réunir sous forme de loi de multiplication sur la cohomologie des informations sur l'espace de modules des courbes rationnelles tracées sur la grassmannienne.

On peut montrer que celle-ci est l'anneau structurel du schéma d'équation $dW = 0$, où W est le potentiel de Landau-Ginzburg, défini par $W = W_0 + (-1)^k x_1$. Contrairement au cas classique, ce schéma est réduit et constitué d'un nombre fini de points.

Toutes les formes linéaires sur $H^d(G)$ étant proportionnelles, on peut intégrer les polynômes en les classes caractéristiques en utilisant la fonctionnelle (où l'on intègre sur un produit de cercles entourant le support de Spec $H_{\text{quantique}}(G) = \{dW = 0\}$) :

$$J(f) = (-1)^{\binom{k}{2}} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^k \oint \frac{f(z_1, \dots, z_k)}{\prod \frac{\partial W}{\partial z_i}} dz_1 \cdots dz_k$$

sur les polynômes f de degré pondéré $\dim G$. Elle est égale à l'intégrale à un coefficient de proportionnalité à déterminer.

Le théorème des résidus nous indique que

$$J(f) = (-1)^{\binom{k}{2}} \sum_{dW(x)=0} \frac{f(x_1, \dots, x_k)}{\det H_W(x)}$$

où H_W désigne la matrice hessienne de W. Utilisant maintenant le fait que les x_i sont les coordonnées de $\mathbb{C}^k/\mathfrak{S}_k \simeq \mathbb{C}^k$, on relève l'intégrale à des fonctions de λ_i. On effectue le changement de variable

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} \right) \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_j}.$$

On sait aussi que le jacobien $\det \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}$ est le déterminant de Vandermonde des λ_j. Une méthode pour effectuer ce calcul consiste à écrire explicitement la matrice jacobienne et à effectuer les mêmes opérations sur les lignes que pour le calcul du déterminant de Vandermonde usuel. Par ailleurs, on relève à un revêtement de degré $k!$, donc on trouve

$$J(f) = (-1)^{\binom{k}{2}} \frac{1}{k!} \sum_{dW=0} f(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \frac{\prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^2}{\det H_W(\lambda)}$$

c'est-à-dire en revenant à la forme intégrale sur un produit de cercles :

$$J(f) = (-1)^{\binom{k}{2}} \frac{1}{k!} \frac{1}{(2i\pi)^k} \int \prod d\lambda_i f(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \frac{\prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^2}{\prod_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}}.$$

On exploite maintenant le fait que $\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = \lambda_i^N + (-1)^k \approx \lambda_i^N - 1$ (on peut toujours intégrer sur un contour très grand). On peut donc écrire

$$J(f) = (-1)^{\binom{k}{2}} \frac{1}{k!} \sum_{\lambda_i} f(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \frac{\prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^2}{\prod_i N/\lambda_i}.$$

Constatant que seuls les k-uplets de racines distinctes comptent, et qu'ils sont pris à permutation près en raison du facteur $k!$, on trouve finalement

$$J(f) = (-1)^{\binom{k}{2}} \frac{1}{N^k} \sum_{\{\lambda_i\}} f(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_i \lambda_i$$

qui est l'énoncé de la formule de Vafa-Intriligator en genre zéro.

Pour passer en genre quelconque, on a besoin de formules de composition pour ces invariants à la Witten, ce qui permet de démontrer la formule de Vafa et Intriligator [ST97].

4.2 Localisation équivariante pour le schéma Quot

Dans cette section, on applique des techniques de localisation (du type de la formule de Berline-Vergne [AB84, Aud04]) pour réduire le calcul d'intégrales sur le schéma Quot $Q = \mathrm{Quot}_{N-r,d}(\mathcal{O}^N)$. On a sur $Q \times C$ une suite exacte universelle $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}^N \to \mathcal{F} \to 0$. On note π la projection de $Q \times C$ sur Q.

4.2.1 Décomposition du sous-schéma fixe

On étudie spécifiquement l'action du tore $T = \mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{O}^N$ par $t \mapsto (t^{-\lambda_1}, \dots, t^{-\lambda_N})$, où les λ_i sont des poids distincts. Les points fixes de Q pour cette action sont des suites exactes $0 \to E \to \mathcal{O}^N \to F \to 0$ avec E stable dans $\mathcal{O}^N$ sous l'action de T. Celle-ci étant diagonalisable à valeurs propres distinctes, E est en fait scindé en $E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, chacun étant un sous-faisceau de l'un des $\mathcal{O}$. De plus, il faut que la somme des degrés des E_i soit $-d$.

On en déduit une décomposition du lieu fixe par les $\binom{N}{r}$ choix de $\mathcal{O}$ contenant les E_i, qu'on notera $\mathcal{O}^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, r$, une répartition des degrés des E_i donnée par une paritition de d en $(d_1, \dots, d_r)$ (au nombre de $\binom{d+r-1}{d}$). Pour ces choix, un E_i (sous-fibré de $\mathcal{O}^{(i)}$ de degré $-d_i$) est paramétré par le schéma $\mathrm{Sym}^{d_i} C$, et vaut $\mathcal{O}(-D_i)$, où D_i est un diviseur effectif de degré d_i. On obtient de la sorte une composante irréductible Z du schéma fixe, isomorphe à $\prod \mathrm{Sym}^{d_i} C$.

Pour localiser les intersections sur ces sous-schémas fixes, on a besoin de connaître leur fibré normal virtuel. On a déjà le fibré tangent virtuel de Q, qui se restreint à Z, où il est équivariant sous l'action de T. Il se scinde alors en un fibré fixe (où T agit trivialement), et une partie mobile (où les poids de T sont non triviaux). La partie fixe s'identifie au fibré tangent virtuel de Z, le fibré normal qui nous intéresse étant ainsi la partie mobile.

L'étude de l'obstruction tangente de Q se restreint à Z, où on a une suite exacte universelle :

$$0 \to \bigoplus_i \mathcal{O}(-D_i) \to \bigoplus_i \mathcal{O}^{(i)} \oplus \mathcal{O}^{N-r} \to \bigoplus_i \mathcal{O}_{D_i} \oplus \mathcal{O}^{N-r} \to 0$$

où les D_i sont les diviseurs universels sur $\mathrm{Sym}^{d_i}(C)$.

Le fibré tangent virtuel de Q est égal d'après 3.8 à $\mathcal{H}om(\pi_\star\mathcal{E}(m), \pi_\star\mathcal{F}(m)) \ominus \mathcal{H}om_Q(\mathcal{K}, \mathcal{F})$, où $\mathcal{K}$ est le noyau de $\pi^\star\pi_\star\mathcal{E}(m) \otimes \mathcal{O}(-m) \twoheadrightarrow \mathcal{E}$. Sur Z, $\mathcal{K}$ lui-même se décompose selon les E_i en une somme de K_i.

On a ainsi, en développant les décompositions :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om(\pi_\star\mathcal{E}(m), \pi_\star\mathcal{F}(m)) &= \sum_{i,j\leqslant r} \mathcal{H}om(\pi_\star\mathcal{E}_i(m), \pi_\star\mathcal{F}_j(m)) \quad \oplus \sum_{i\leqslant r, j>r} \mathcal{H}om(\pi_\star\mathcal{E}_i(m), \pi_\star\mathcal{O}^{(j)}(m))\\ \mathcal{H}om_Q(\mathcal{K}, \mathcal{F}) &= \sum_{i,j\leqslant r} \mathcal{H}om_Q(\mathcal{K}_i, \mathcal{F}_j) \qquad\qquad\qquad \oplus \sum_{i\leqslant r, j>r} \mathcal{H}om_Q(\mathcal{K}_i, \mathcal{O}^{(j)})\end{aligned}$$

Les fibrés indicés par k sont de poids $-\lambda_k$ pour l'action de T. On peut donc distinguer deux types de composantes, en utilisant de plus le fait que les $\pi_\star\mathcal{E}_i(m)$ sont localement libres, ainsi que les $\mathcal{K}_i$:

- pour $i, j \leqslant r$, $\mathcal{N}_{ij} = (\pi_\star\mathcal{E}_i(m))^\vee \otimes (\pi_\star\mathcal{F}_j(m)) \ominus \pi_\star(\mathcal{K}_i^\vee \otimes \mathcal{F}_j)$
- pour $i \leqslant r$ et $j > r$, $\mathcal{N}_{ij} = (\pi_\star\mathcal{E}_i(m))^\vee \otimes H^0(C, \mathcal{O}^{(j)}(m)) \ominus \pi_\star(\mathcal{K}_i^\vee \otimes \mathcal{O}^{(j)})$.

Les $\mathcal{N}_{ij}$ étant de poids $\lambda_i - \lambda_j$, on trouve le fibré normal virtuel en sommant les composantes de poids non nul :

$$\mathcal{N}^{\mathrm{vir}} = \bigoplus_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant N\\ i\neq j}} \mathcal{N}_{ij}.$$

Pour appliquer la formule de localisation, on commence par remarquer que comme l'action de T sur Z est triviale, $Z_T = Z \times \mathbf{B}T$ et $A_T^\bullet Z = A^\bullet Z \otimes A_T^\bullet\{*\} = A^\bullet Z[h, h^{-1}]$ (où $\mathbf{B}T$ admet une décomposition cellulaire, qui justifie la formule de Künneth), où h est la première classe de Chern du fibré associé à la représentation de T de poids 1. Cependant, comme il s'agit d'étudier des nombres d'intersection, il suffit de faire les calculs en cohomologie. De plus par fonctorialité, il suffit d'étudier les $\mathcal{N}_{ij}$ sur $\mathrm{Sym}^{d_i} C \times \mathrm{Sym}^{d_j} C$ pour connaître leurs classes de Chern sur Z tout entier.

4.2.2 Étude des $\mathcal{N}_{ij}$

Ayant décomposé $\mathcal{N}^{\mathrm{vir}}$ en somme directe, il suffit de calculer la classe d'Euler équivariante de $\mathcal{N}_{ij}$. Celle-ci est la classe d'Euler du fibré correspondant sur $Z \times \mathbf{B}T$, qui est $(\mathcal{N}_{ij})_T = \mathcal{N}_{ij} \boxtimes \mathcal{O}(\lambda_i - \lambda_j)$. Soient α_k les racines de Chern de $\mathcal{N}_{ij}$. Celles de $(\mathcal{N}_{ij})_T$ sont $\alpha_k + (\lambda_i - \lambda_j)h$. Posons $h_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)h$.

Ainsi, si $c_t(\mathcal{N}_{ij}) = \prod(1 + t\alpha_k)$ est le polynôme de Chern de $\mathcal{N}_{ij}$, $e_T(\mathcal{N}_{ij}) = \prod(h_{ij} + \alpha_k) = c_t(\mathcal{N}_{ij})(h_{ij}^{-1})h_{ij}^{r_{ij}}$, où on note r_{ij} le rang de $\mathcal{N}_{ij}$.

Pour calculer le polynôme de Chern de $\mathcal{N}_{ij}$, il suffit, par la formule de Whitney, d'exprimer sa classe dans le groupe de Grothendieck. Pour le cas $j \leqslant r$, on a

$$\mathcal{N}_{ij} \equiv (\pi_\star E_i(m))^\vee \otimes (\pi_\star F_j(m)) \ominus \pi_\star(K_i^\vee \otimes F_j).$$

Notons que comme les faisceaux considérés sont $\pi_\star$-acycliques, on peut considérer l'image directe K-théorique $R\pi_\star$ à la place. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}K_i &\equiv \pi^\star\pi_\star E_i(m) \otimes \mathcal{O}(-m) \ominus E_i\\ K_i^\vee \otimes F_j &\equiv \pi^\star(\pi_\star E_i(m))^\vee \otimes F_j(m) \ominus E_i^\vee \otimes F_j\\ \pi_\star(K_i^\vee \otimes F_j) &\equiv (\pi_\star E_i(m))^\vee \otimes R\pi_\star(F_j(m)) \ominus R\pi_\star(E_i^\vee \otimes F_j)\end{aligned}$$

ce qui en remplaçant dans l'expression précédente donne :

$$\mathcal{N}_{ij} \equiv R\pi_\star(E_i^\vee \otimes F_j).$$

Comme $E_i^\vee \otimes F_j \equiv E_i^\vee \ominus E_i^\vee \otimes E_j$, on a $r_{ij} = \chi(\mathcal{O}(D_i)) - \chi(\mathcal{O}(D_i - D_j)) = d_j$, et $\mathcal{N}_{ij} = R\pi_\star(E_i^\vee) \ominus R\pi_\star(E_i^\vee \otimes E_j)$.

Dans le cas où $j > r$, on avait :

$$\mathcal{N}_{ij} \equiv (\pi_\star E_i(m))^\vee \otimes (\pi_\star\mathcal{O}(m)) \ominus \pi_\star(K_i^\vee \otimes \mathcal{O}).$$

Le même argument en remplaçant F_j par $\mathcal{O}$ donne $\mathcal{N}_{ij} \equiv \pi_\star(E_i^\vee)$. De plus $r_{ij} = \chi(\mathcal{O}(D_i)) = d_i - \bar{g}$.

On a exprimé les classes d'Euler en fonction des polynômes de Chern. Chaque $i, j \leqslant r$ a une contribution $s_t(R\pi_\star(E_i^\vee \otimes E_j))$ (polynôme de Segre), et pour tout $i \leqslant r$, et j quelconque, on a une contribution de la forme $c_t(R\pi_\star(E_i^\vee))$. Les premiers fibrés sont de la forme $\pi_\star\mathcal{O}(D_i - D_j)$ sur $\mathrm{Sym}^{d_i} C \times \mathrm{Sym}^{d_j} C \times C$. Les seconds sont de la forme $\mathcal{O}(D)$ sur un $\mathrm{Sym}^d C$, où les D désignent les diviseurs universels.

Proposition 4.1 ([ACGH85], [Ful98, 14.4.17]). Soit D le diviseur universel sur $\mathrm{Sym}^d C \times C$, et π la projection sur $S = \mathrm{Sym}^d C$. Soit θ la classe du diviseur thêta sur $\mathrm{Sym}^d C$ provenant de $\mathrm{Pic}^d C$, et x la classe de Chern de $\mathcal{O}(D) \restriction_{\mathrm{Sym}^d C \times \{*\}}$. Alors

$$c_t(R\pi_\star \mathcal{O}(D)) = (1+tx)^{d+1-g} \exp\left(-\frac{t\theta}{1+tx}\right).$$

Démonstration. On décompose $c_1(\mathcal{O}(D)) = x \otimes 1 + \sum y^j \otimes \delta_j + d \otimes \omega$, où ω est la classe d'un point de C, et δ_j une base symplectique de $H_1(C) \simeq H^1(C)$, selon les composantes de Künneth.

Par le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch,

$$\mathrm{ch}(\pi_\star \mathcal{O}(D)) \,\mathrm{Td}(TS) = \pi_\star(\mathrm{ch}\, \mathcal{O}(D) \,\mathrm{Td}(TS)\, \mathrm{Td}(TC))$$

mais $\pi_\star(\alpha \,\mathrm{Td}(TS)) = \mathrm{Td}(TS)\pi_\star(\alpha)$. Le genre de Todd est inversible (il a un terme constant), donc $\mathrm{ch}(\pi_\star\mathcal{O}(D)) = \pi_\star(\mathrm{ch}\,\mathcal{O}(D)\,\mathrm{Td}\,TC)$.

On a $\mathrm{Td}(x) = \frac{x}{1-\exp(-x)} = x/(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \cdots) = 1 + x/2 + \cdots$. En particulier $\mathrm{Td}(TC) = 1 - c_1(\Omega_C)/2 = 1 + (1-g)\omega$. On calcule aussi $\mathrm{ch}\,\mathcal{O}(D) = \exp c_1(\mathcal{O}(D)) = \exp x \exp(\sum y^j \otimes \delta_j)(1 + d\omega)$. La projection sur S est l'intégration sur les fibres : on doit prendre le coefficient de ω. On sait aussi que $(\sum y^j \otimes \delta_j)^2/2 = -\sum y^j y^{j+g} = -\theta\omega$. Ceci découle par exemple de l'expression du diviseur thêta sur la jacobienne comme $\sum \delta^j \delta^{j+g}$. Les inclusions $C \to \mathrm{Sym}^d C \to \mathrm{Jac}^{g-1} C$ données par l'addition de $(d-1)P$ et de $(g-1-d)P$ induisent des isomorphismes $H^1(C) \simeq H^1(\mathrm{Sym}^d C) \simeq H^1(\mathrm{Jac}\, C)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(\pi_\star \mathcal{O}(D)) &= \pi_\star((1 + (1-g)\omega) \exp x \cdot (1 + y^j \delta_j - \theta\omega)(1 + d\omega)) \\ &= \exp x \cdot ((1-g) - \theta + d). \end{aligned}$$

On utilise ensuite le résultat classique : $\log c_t(E) = \sum \log(1 + \alpha_i t) = \sum_k (-t)^{k-1}/k \sum_i \alpha_i^k$. Soit L le fibré en droites de classe de Chern x. Alors $\pi_\star \mathcal{O}(D) \otimes L^\vee$ a pour caractère de Chern $(d+1-g) - \theta$. Ceci nous fournit la valeur des polynômes de Newton de ses racines de Chern : on a donc $\log c_t(\pi_\star \mathcal{O}(D) \otimes L^\vee) = -\theta t$. On doit ensuite multiplier par L. Ceci ajoute x à toutes les racines de Chern. Or

$$\prod (1 + xt + \alpha_i t) = \left[\prod (1+xt)(1+\alpha_i u)\right]_{u = \frac{t}{1+tx}} = c_\tau(\pi_\star \mathcal{O}(D) \otimes L^\vee)(1+tx)^n = (1+tx)^n \exp(-\tau\theta)$$

où $\tau = \frac{t}{1+tx}$. Pour savoir ce qu'est L, considérons la section canonique de $\mathcal{O}(D)$: elle s'annule sur D, donc en restriction à $S \times \{p\}$, elle s'annule là où p est dans D, donc sur $\mathrm{Sym}^{d-1}(C) + p$: c'est le diviseur associé à L.

Il suffit maintenant de constater que $n = \mathrm{rg}\, R\pi_\star \mathcal{O}(D) = \chi(\mathcal{O}(D)) = d + 1 - g$ pour conclure. □

Proposition 4.2. Soit d_i et d_j deux entiers. On note $S_i = \mathrm{Sym}^i C$ et $S_j = \mathrm{Sym}^j C$, munis de leurs diviseurs universels D_i et D_j. On étudie sur $S_i \times S_j \times C$ le fibré $\mathcal{O}(D_i - D_j) = \mathcal{O}(D_i) \boxtimes_C \mathcal{O}(D_j)^\vee$. On note x_i la classe de cohomologie de $\mathrm{Sym}^{d_i - 1} C + p$ dans S_i (qui ne dépend pas de p modulo équivalence algébrique), et respectivement x_j sur S_j. Alors

$$c_t(R\pi_\star \mathcal{O}(D_i - D_j)) = (1 + t(x_i - x_j))^{(d_i - d_j + 1 - g)} \exp\left(-\frac{t(\theta_i + \theta_j + \sigma_{ij})}{1 + t(x_i - x_j)}\right).$$

Ici, on a décomposé $c_1(\mathcal{O}(D_i)) = x_i + \sum y_i^k \delta_k + d\omega$, ainsi que $c_1(\mathcal{O}(D_j))$, et σ_{ij} désigne le produit croisé $-\sum (y_i^k y_j^{k+g} + y_j^k y_i^{k+g}) = \left(\sum y_i^k \delta_k\right)\left(\sum y_j^k \delta_k\right)$.

Démonstration. Elle est tout à fait identique à la précédente, à l'existence près du terme croisé. On a en effet

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,\mathcal{O}(D_i - D_j) &= \mathrm{ch}\,\mathcal{O}(D_i) / \mathrm{ch}\,\mathcal{O}(D_j) \\ &= \exp(x_i)\exp(\sum y_i^k \delta_k)(1 + d_i\omega)\exp(-x_j)\exp(-\sum y_j^k \delta_k)(1 - d_j\omega) \\ &= \exp(x_i - x_j)(1 - \theta_i - \theta_j + \sigma_{ij})(1 + (d_i - d_j)\omega) \end{aligned}$$

On constate ensuite que $\mathrm{rg}\, R\pi_\star \mathcal{O}(D_i - D_j) = d_i - d_j + 1 - g$ pour la formule de Riemann-Roch, et le raisonnement de la preuve précédente donne le résultat. □

4.2.3 Détermination de la classe d'Euler

On peut enfin exprimer la classe d'Euler équivariante de $\mathcal{N}^{\mathrm{vir}}$. On avait $\mathcal{N}_{ij} \equiv \pi_\star \mathcal{O}(D_i)$ si $j > r$ et $\pi_\star \mathcal{O}(D_i) \ominus \pi_\star \mathcal{O}(D_i - D_j)$ si $j \leqslant r$. On rappelle que $h_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)h$. On a

$$\begin{aligned}
e_T(\mathcal{N}^{\mathrm{vir}}) &= \prod_{\substack{i \leqslant r, j \leqslant N \\ i \neq j}} h_{ij}^{r_{ij}} c_{h_{ij}^{-1}}(\mathcal{N}_{ij}) \\
&= \prod_{i,j \leqslant r, i \neq j} \underbrace{h_{ij}^{d_j - d_i + g - 1} (1 + h_{ij}^{-1}(x_i - x_j))^{d_j - d_i + g - 1} \exp\left(\frac{\theta_i - \theta_j + \sigma_{ij}}{h_{ij} + x_i - x_j}\right)}_{\text{classe d'Euler de } \ominus \pi_\star \mathcal{O}(D_i - D_j)} \\
&\quad \cdot \prod_{\substack{i \leqslant r, j \leqslant N \\ i \neq j}} \underbrace{h_{ij}^{d_i + 1 - g} (1 + h_{ij}^{-1} x_i)^{d_i + 1 - g} \exp\left(-\frac{\theta}{h_{ij} + x_i}\right)}_{\text{classe d'Euler de } \pi_\star \mathcal{O}(D_i)}
\end{aligned}$$

L'argument de l'exponentielle du premier produit est antisymétrique en i et j, de meme que h_{ij}. Dans le premier produit, on écrit $h_{ij}^{d_j - d_i + g - 1} h_{ji}^{d_i - d_j + g - 1} = (-1)^{d_i + d_j} h_{ij}^{2\bar{g}}$. L'exponentielle disparaît, et on a

$$e_T(\mathcal{N}^{\mathrm{vir}}) = (-1)^{\bar{g}\binom{r}{2} + d(r-1)} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} h_{ij}^{2\bar{g}} \left(1 + \frac{x_i - x_j}{h_{ij}}\right)^{2\bar{g}} \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \prod_{j \neq i} h_{ij}^{d_i + 1 - g} (1 + h_{ij}^{-1} x_i)^{d_i + 1 - g} \exp\left(-\frac{\theta}{h_{ij} + x_i}\right).$$

On veut alors contracter le dernier produit. Comme le calcul ne doit pas dépendre des poids λ_i choisis pour l'action de T, On peut poser $\lambda_p = \exp \frac{2ip\pi}{N}$ et étudier la formule de localisation obtenue formellement avec ces valeurs. Le dernier produit devient

$$\begin{aligned}
\prod_{j \neq i} h_{ij}^{d_i + 1 - g} (1 + h_{ij}^{-1} x_i)^{d_i + 1 - g} &= \prod_{j \neq i} (h_{ij} + x_i)^{d_i + 1 - g} = \left(\prod_{j \neq i} (\lambda_i h + x_i - \lambda_j h)\right)^{d_i + 1 - g} \\
&= \left(\frac{(\lambda_i h + x_i)^N - h^N}{(\lambda_i h + x_i) - \lambda_i h}\right)^{d_i + 1 - g} = \left(\frac{(\lambda_i h + x_i)^N - h^N}{x_i}\right)^{d_i + 1 - g}
\end{aligned}$$

tandis que les exponentielles se regroupent grâce à

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_i h + x_i - \lambda_j h} = \frac{N(\lambda_i h + x_i)^{N-1}}{(\lambda_i h + x_i)^N - h^N}$$

en vertu de la formule

$$\frac{d(X^N - 1)}{X^N - 1} = \sum_i \frac{dX}{X - \lambda_i}.$$

On trouve finalement

$$\begin{aligned}
e_T(\mathcal{N}^{\mathrm{vir}}) &= (-1)^{\bar{g}\binom{r}{2} + d(r-1)} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} h_{ij}^{2\bar{g}} \left(1 + \frac{x_i - x_j}{h_{ij}}\right)^{2\bar{g}} \\
&\quad \cdot \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \left(\frac{(\lambda_i h + x_i)^N - h^N}{x_i}\right)^{d_i + 1 - g} \exp\left(-\theta_i \left(\frac{N(\lambda_i h)^{N-1}}{(\lambda_i h + x_i)^N - h^N} - \frac{1}{x_i}\right)\right).
\end{aligned}$$

4.3 La formule de Vafa-Intriligator

On considère sur $\mathrm{Quot}_{r,d}(C, \mathcal{O}^N)$ le suite exacte universelle $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}^N \to \mathcal{F} \to 0$. Soit $c_i(\mathcal{E}^\vee) = a_i + \sum b_i^j \delta_j + f_i \omega$ la décomposition de Künneth des classes de Chern de $\mathcal{E}^\vee$ en cohomologie. Les a_i sont alors les classes de chern du faisceau $\mathcal{E}_p^\vee$ sur $Q \times \{p\}$, pour un point quelconque p de C.

Soit P un polynôme tel que $P(a_1, \ldots, a_r)$ soit de degré $e = Nd - r(N-r)\bar{g}$: il s'agit de la dimension attendue de Q, compte tenu de sa théorie de l'obstruction tangente. $e = \dim \mathrm{Hom}(E, F) - \dim \mathrm{Ext}^1(E, F) = \chi(\mathcal{H}om(E, F))$ (car E est localement libre). On veut calculer l'intégrale $\int_{Q^{\mathrm{vir}}} P(a_1, \ldots, a_r)$.

Théorème 4.3 (Formule de Vafa-Intriligator [MO05,Int91,Ber94]). *Soit R le polynôme symétrique tel que $R(\alpha_1,\dots,\alpha_r) = P(a_1,\dots,a_r)$, où les α_i sont les racines de Chern de $\mathcal{E}^\vee$. On pose*

$$J(x_1,\dots,x_r) = N^r(x_1\cdots x_r)^{-1}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^{-2}.$$

Alors

$$\int_{[Q^{\mathrm{vir}}]} P(a_1,\dots,a_r) = (-1)^{(g-1)\binom{r}{2}+d(r-1)}\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_r} R(\lambda_1,\dots,\lambda_r)J^{g-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$$

où la somme porte sur les r-uplets ordonnés de racines N-ièmes de l'unité distinctes.

Pour faire entrer le formalisme équivariant, on considère une section $Q \to Q\times \mathbf{E}T \to Q_T$, qui donne un morphisme d'évaluation $H^\bullet_T(Q)\to H^\bullet(Q)$ (en $h=0$). Comme $\mathcal{E}_p^\vee$ est équivariant sous l'action de T, les a_i se relèvent à des classes de Chern équivariantes, et on peut appliquer la formule de localisation. On sait alors que l'intégrale se réduit à celle sur les lieux fixes Z (formels) indicés par le choix de r poids parmi les N racines de l'unité, et de degrés d_i de sommes d pour $1\leqslant i\leqslant r$. Comme précédemment, on remarque que $\mathcal{E}$ se décompose en somme de $\mathcal{O}(-D_i)$ de poids λ_i, dont l'image dans $Z\times \mathbf{B}T$ est donc $\mathcal{O}(-D_i)\boxtimes\mathcal{O}(\lambda_i)$. On en déduit la classe de Chern T-équivariante de $\mathcal{O}(-D_i)\restriction_{Z\times\{p\}}$, qui vaut $x_i+\lambda_i h$: ce sont les racines de Chern de $\mathcal{E}\restriction_{Z\times\{p\}}$. La restriction à Z de la classe à intégrer est donc $R(x_i+\lambda_i h, 1\leqslant i\leqslant r)$. La formule étant linéaire en R, on peut se ramener au cas d'un monôme (qui n'est alors plus symétrique).

On pose $u=\pm 1 = (-1)^{(g-1)\binom{r}{2}+d(r-1)}$. On veut démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.4. Soient $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ un r-uplet de racines N-ièmes de l'unité distinctes, R un monôme de degré $e = Nd-r(N-r)\bar{g}$. Alors

$$\sum_{d_1+\cdots+d_r=d}\int_Z \frac{R(x_i+\lambda_i h)}{e_T(\mathcal{N}^{\mathrm{vir}})} = u(RJ^{\bar{g}})(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$$

où Z désigne le lieu fixe pour les poids choisis et où $\mathcal{E}_p^\vee$ est scindé suivants les degrés $-d_i$.

Démonstration. Considérons l'expression de $e_T(\mathcal{N}^{\mathrm{vir}})$ obtenue à la section précédente. Comme on n'est intéressé que par un nombre d'intersection, on peut se contenter de faire le calcul en remplaçant θ par un cycle numériquement équivalent (du moins en ce qui concerne les fonctions de x).

On a en particulier la relation $\theta^l x^k = x^{l+k}\frac{g!}{(g-l)!}$ si $k+l=d$ et $l\leqslant g$, avec $x^d=1$ (on peut constater, par exemple, que x est défini par l'équation $p\in D$ pour D un élément de $\mathrm{Sym}^d C$ et p un point de C). Ainsi, vis-à-vis de l'algèbre engendrée par x, θ^l est équivalent à $\frac{g!}{(g-l)!}x^l$ si $l\leqslant g$.

L'exponentielle dans l'expression de la classe d'Euler devient ainsi pour i entre 1 et r

$$\begin{aligned}\exp\left(\theta\left(\frac{N(\lambda h+x)^{N-1}}{(\lambda h+x)^N-h^N}-\frac{1}{x}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{g}\frac{\theta^k}{k!}\left(\frac{N(\lambda h+x)^{N-1}}{(\lambda h+x)^N-h^N}-\frac{1}{x}\right)^k\\ &\equiv \sum_{k=0}^{g}\binom{g}{k}x^k\left(\frac{N(\lambda h+x)^{N-1}}{(\lambda h+x)^N-h^N}-\frac{1}{x}\right)^k\\ &\equiv \left(1+x\left(\frac{N(\lambda h+x)^{N-1}}{(\lambda h+x)^N-h^N}-\frac{1}{x}\right)\right)^g\\ &\equiv \left(\frac{Nx(\lambda h+x)^{N-1}}{(\lambda h+x)^N-h^N}\right)^g.\end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\int_{Z(d_1,\dots,d_r)}\frac{R(x_i+\lambda_i h)}{e_T(\mathcal{N}^{\mathrm{vir}})} = \int_{Z(d_1,\dots,d_r)} & R(x_i+\lambda_i h)u\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left((\lambda_i-\lambda_j)^{-2\bar{g}}h^{-2\bar{g}}\right)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left(1+\frac{x_i-x_j}{h_{ij}}\right)^{-2\bar{g}}\\ &\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{(\lambda_i h+x_i)^N-h^N}{x_i}\right)^{g-1-d_i}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{Nx_i(\lambda_i h+x_i)^{N-1}}{(\lambda_i h+x_i)^N-h^N}\right)^g\end{aligned}$$

où le dernier produit correspond aux exponentielles. On peut noter que

$$J^{g-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_r) = \frac{N^{r(g-1)}}{(\lambda_1\cdots\lambda_r)^{g-1}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(\lambda_i-\lambda_j)^{-2\bar{g}}$$

ce qui permet de réécrire

$$\int_{Z(d_1,\ldots,d_r)} \frac{R(x_i+\lambda_i h)}{e_T(\mathcal{N}^{\mathrm{vir}})} = uJ^{g-1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\int_{Z(d_1,\ldots,d_r)} R(x_i+\lambda_i h)h^{-\bar{g}r(r-1)}(\lambda_1\cdots\lambda_r)^{g-1}$$
$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left(1+\frac{x_i-x_j}{h_{ij}}\right)^{-2\bar{g}}\prod_{i=1}^{r}\frac{Nx_i^{d_i+1}(\lambda_i h+x_i)^{g(N-1)}}{((\lambda_i h+x_i)^N-h^N)^{d_i+1}}.$$

On posera $x=\lambda h\bar{x}$ et $R=\prod X_i^{\alpha_i}$. Alors $(\lambda_i h+x_i)^N-h^N=(\lambda_i h)^N((1+\bar{x}_i)^N-1)$ car $\lambda_i^N=1$. On remplacera aussi $x_i^{d_i+1}$ par $x_i^{d_i}\lambda_i h x_i$. Ce qui permet d'écrire le tout sous la forme

$$uJ^{g-1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\int_{Z(d_1,\ldots,d_r)} R(1+\bar{x}_i)R(\lambda_i)R(h)h^{-\bar{g}r(r-1)}(\lambda_1\cdots\lambda_r)^{g-1}$$
$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left(1+\frac{\lambda_i\bar{x}_i-\lambda_j\bar{x}_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)^{-2\bar{g}}\prod_{i=1}^{r}\frac{Nx_i^{d_i}\bar{x}_i(1+\bar{x}_i)^{g(N-1)}(\lambda_i h)^{g(N-1)+1}}{h^{N(1+d_i)}((1+\bar{x}_i)^N-1)^{d_i+1}}$$
$$=u(RJ^{g-1})(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\int_{Z(d_1,\ldots,d_r)} h^{\deg R-\bar{g}r(r-1)+rg(N-1)+r-rN-Nd}(\lambda_1\cdots\lambda_r)^{g-1}$$
$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left(1+\frac{\lambda_i\bar{x}_i-\lambda_j\bar{x}_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)^{-2\bar{g}}\prod_{i=1}^{r}\frac{Nx_i^{d_i}\bar{x}_i(1+\bar{x}_i)^{\alpha_i+g(N-1)}(\lambda_i)^{g(N-1)+1}}{((1+\bar{x}_i)^N-1)^{d_i+1}}$$

On doit avoir $\deg R=Nd-r(N-r)\bar{g}$. L'exposant de h est donc

$$\begin{aligned}&Nd-r(N-r)\bar{g}-r(r-1)\bar{g}+rg(N-1)+r-rN-Nd\\=&\bar{g}(r(r-N)-r(r-1)+r(N-1))+r(N-1)+r-rN=0.\end{aligned}$$

De plus $\lambda_i^{1-g}=\lambda_i^{g(N-1)+1}$, ce qui permet d'éliminer encore quelques facteurs. On doit donc montrer que

$$1=\sum_{\sum d_i=d}\int_{Z(d_i)}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}x_i^{d_i}\left(1+\frac{\lambda_i\bar{x}_i-\lambda_j\bar{x}_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)^{-2\bar{g}}\prod_{i=1}^{r}\frac{N\bar{x}_i(1+\bar{x}_i)^{\alpha_i+g(N-1)}}{((1+\bar{x}_i)^N-1)^{d_i+1}}$$

sachant que $\int_Z\prod x_i^{d_i}=\prod\int_{\mathrm{Sym}^{d_i}C}x_i^{d_i}=1$. Cela revient à calculer le coefficient constant dans le reste, comme fait ci-dessous. □

Lemme 4.5. On a

$$\mathrm{Res}_{x=0}\,x^m\cdot\frac{N(1+x)^{\alpha+N-1}}{((1+x)^N-1)^{d+1}}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\binom{\frac{\alpha+k}{N}}{d}.$$

Démonstration. Comme $x^m=\sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}\binom{m}{k}(1+x)^k$, il suffit de considérer le cas où $m=0$. De plus, le dénominateur est d'ordre $x^{-(N-1)(d+1)}$, le résidu ne dépend que d'un nombre fixé (environ Nd) de termes du développement du numérateur, c'est donc un polynôme en α. On a donc seulement besoin de vérifier la formule pour $m=0$ et $\alpha=lN$, à savoir

$$\mathrm{Res}_{x=0}\frac{N(1+x)^{N-1+lN}}{((1+x)^N-1)^{d+1}}=\binom{l}{d}.$$

Posons $u=(1+x)^N-1$. On est ramenés à calculer $\mathrm{Res}_{u=1}\frac{(1+u)^l du}{u^{d+1}}=\binom{l}{d}$ par la formule du binôme. □

On développe alors brutalement

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left(1+\frac{\lambda_i\bar{x}_i-\lambda_j\bar{x}_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)^{-2\bar{g}}&=\sum_{k_{ij}}\prod_{i<j}\binom{-2\bar{g}}{k_{ij}}\left(\frac{\lambda_i\bar{x}_i-\lambda_j\bar{x}_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)^{k_ij}\\&=\sum_{k_{ij}\geqslant 0}\sum_{m_{ij}+m_{ji}=k_{ij}}\prod_{i<j}\binom{-2\bar{g}}{k_{ij}}\binom{k_{ij}}{m_{ji}}(-1)^{m_{ji}}\frac{(\lambda_i\bar{x}_i)^{m_{ij}}(\lambda_j\bar{x}_j)^{m_{ji}}}{(\lambda_i-\lambda_j)^{k_{ij}}}.\end{aligned}$$

Rappelons qu'on veut montrer que le coefficient de $(\bar{x}_1\cdots\bar{x}_r)^{-1}$ (le résidu en $\bar{x}_i=0$) vaut 1 dans

$$\begin{aligned}&\sum_{\sum d_i=d}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left(1+\frac{\lambda_i\bar{x}_i-\lambda_j\bar{x}_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)^{-2\bar{g}}\prod_{i=1}^{r}\frac{N(1+\bar{x}_i)^{\alpha_i+g(N-1)}}{((1+\bar{x}_i)^N-1)^{d_i+1}}\\=&\sum_{k_{ij}\geqslant 0}\sum_{m_{ij}+m_{ji}=k_{ij}}\prod_{i<j}\binom{-2\bar{g}}{k_{ij}}(-1)^{m_{ji}}\binom{k_{ij}}{m_{ji}}\frac{(\lambda_i\bar{x}_i)^{m_{ij}}(\lambda_j\bar{x}_j)^{m_{ji}}}{(\lambda_i-\lambda_j)^{k_{ij}}}\sum_{\sum d_i=d}\prod_{i=1}^{r}\frac{N(1+\bar{x}_i)^{\alpha_i+g(N-1)}}{((1+\bar{x}_i)^N-1)^{d_i+1}}.\end{aligned}$$

Un terme de la première somme est un monôme en les $\bar{x}_i$ de degrés $m_i = \sum_{j\neq i} m_{ij}$. Sa contribution est donc pondérée par le résidu de la deuxième multipliée par $\prod \bar{x}_i^{m_i}$ qui vaut par le lemme précédent

$$\sum_{\sum d_i=d} \prod_{i=1}^{r} \sum_{q_i=0}^{m_i} (-1)^{m_i-q_i} \binom{m_i}{q_i} \binom{\frac{\alpha_i+(N-1)\bar{g}+q_i}{N}}{d_i}.$$

On utilise ensuite le lemme combinatoire suivant. D'abord, on constate que $\sum d_i = d$ et $\sum \alpha_i + (N-1)\bar{g} + k_i = Nd - r(N-r)\bar{g} + r(N-1)\bar{g} + \sum q_i = Nd + \bar{g}r(r-1)$, ce qui donne

$$\prod_{i=1}^{r} \sum_{q_i=0}^{m_i} (-1)^{m_i-q_i} \binom{m_i}{q_i} \binom{d + \frac{\bar{g}r(r-1)+\sum q_i}{N}}{d} = \sum_n \binom{d + \frac{\bar{g}r(r-1)+n}{N}}{d} \sum_{\sum q_i=n} \prod_{i=1}^{r} (-1)^{m_i-q_i} \binom{m_i}{q_i}$$

On pose alors $\sum m_i = \sum_{i,j} k_{ij} = k$, ce qui donne

$$\sum_n \binom{d + \frac{\bar{g}r(r-1)+n}{N}}{d} (-1)^{k-n} \binom{k}{n}.$$

Remarquons que k est le degré du terme qu'on a considéré, qui est nul si $k > d$.

Lemme 4.6. Soit $d, e_1 \ldots, e_r$ des entiers positifs et $e = e_1 + \cdots + e_r$. Alors

$$\sum_{d_1+\cdots+d_r=d} \binom{e_1}{d_1} \cdots \binom{e_r}{d_r} = \binom{e}{d}.$$

Démonstration. On peut classer les parties à d élements d'un ensemble de cardinal e partitionné en parties de cardinal e_i selon le nombre éléments qu'elles ont dans chaque partie. □

On est donc ramenés à démontrer

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{d} \sum_{\sum_{i<j} k_{ij}=k} \sum_{m_{ij}+m_{ji}=k_{ij}} \left(\prod_{i<j} \binom{-2\bar{g}}{k_{ij}} \binom{k_{ij}}{m_{ji}} (-1)^{m_{ji}} \frac{\lambda_i^{m_{ij}} \lambda_j^{m_{ji}}}{(\lambda_i - \lambda_j)^{k_{ij}}} \right) \sum_{n=0}^{k} \binom{d + \frac{\bar{g}r(r-1)+n}{N}}{d} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{d} \sum_{n=0}^{k} \binom{d + \frac{\bar{g}r(r-1)+n}{N}}{d} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \sum_{\sum_{i<j} k_{ij}=k} \prod_{i<j} \binom{-2\bar{g}}{k_{ij}} (\lambda_i - \lambda_j)^{-k_{ij}} \sum_{m_{ij}+m_{ji}=k_{ij}} \prod_{i<j} \binom{k_{ij}}{m_{ji}} (-1)^{m_{ji}} \lambda_i^{m_{ij}} \lambda_j^{m_{ji}} \end{aligned}$$

où la dernière somme fait exactement $(\lambda_i - \lambda_j)^{k_{ij}}$. On peut aussi contracter la somme précédente en $\binom{-r(r-1)\bar{g}}{k}$. La somme à calculer est en fait, en posant $s = r(r-1)\bar{g}$

$$\sum_{k=0}^{d} \sum_{n=0}^{d} (-1)^{k-n} \binom{d + \frac{s+n}{N}}{d} \binom{-s}{k} \binom{k}{n}$$

(on peut toujours ajouter les termes $n > k$).

Soit $c_n = \sum_{k=0}^{d} (-1)^{k-n} \binom{-s}{k} \binom{k}{n}$. On travaille dans $\mathbb{C}[y]/(y^{d+1})$. On cherche le coefficient de y^d dans

$$\sum_{q=0}^{d} \sum_{n=0}^{d} c_n \binom{q + \frac{s+n}{N}}{q} y^q = \sum_{q=0}^{d} \sum_{n=0}^{d} c_n \binom{-\frac{s+n}{N} - 1}{q} (-y)^q = \sum_{n=0}^{d} c_n (1-y)^{-\frac{s+n}{N}-1}$$

Soit $(1+x) = (1-y)^{-1/N}$. Comme x est de l'ordre de y/N, x est un générateur de l'algèbre modulo y^{d+1}. Ceci permet d'écrire notre série génératrice comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-y} \sum_{n=0}^{d} c_n (1+x)^{s+n} &= \frac{1}{1-y} \sum_{n=0}^{d} \sum_{k=0}^{d} (-1)^{k-n} \binom{-s}{k} \binom{k}{n} (1+x)^{s+n} \\ &= \frac{1}{1-y} \sum_{k=0}^{d} \binom{-s}{k} (1+x)^s \sum_{n=0}^{d} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} (1+x)^n \\ &= \frac{1}{1-y} \sum_{k=0}^{d} \binom{-s}{k} (1+x)^s x^k = \frac{1}{1-y} (1+x)^s (1+x)^{-s} = \sum_{q=0}^{d} y^q \end{aligned}$$

Le coefficient cherché est donc 1. Ceci termine la démonstration de la formule de Vafa et Intriligator.

4.3.1 Application à la formule de Verlinde

La formule de Verlinde permet d'exprimer la caractéristique d'Euler des fibrés déterminants sur l'espace de modules des fibrés semi-stables de rang r et de degré d. Si r et d sont premiers entre eux, tout fibré de rang r et degré d semi-stable est en fait stable, et l'espace de modules est lisse. La connaissance des nombres d'intersection sur cet espace permet ainsi d'en déduire la formule de Verlinde en utilisant la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch. Dans le cadre de la géomtrie différentielle (symplectique), ces techniques ont été utlisées par succès par Jeffrey et Kirwan [JK98] et par Bismut et Labourie pour un résultat similaire [BL99]. Dans le cadre algébrique, la formule de Vafa et Intriligator est utilisée par Marian et Oprea [MO06a] pour obtenir le résultat.

Soit $\mathcal{M}$ l'espace de modules lisse des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et de déterminant fixé L de degré d. Comme r et d sont premiers entre eux, on a un fibré de Poincaré $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{M} \times C$ [DN89, 5]. On décompose les classes de Chern de $\mathcal{V}$ selon les composantes de Künneth

$$c_r(\mathcal{V}) = a_r \otimes 1 + \sum b_r^j \delta_j + f_r \otimes \omega.$$

D'après les travaux d'Atiyah et Bott sur la cohomologie de $\mathcal{M}$ [AB83], la classe de la forme symplectique canonique sur $\mathcal{M}$ est $f_2 \in H^2(\mathcal{M})$, pour une normalisation convenable de $\mathcal{V}$. On sait aussi [DN89, Théorèmes E, F] que $c_1(\mathcal{M}) = 2c_1(\Theta_F)$, où Θ_F est le fibré déterminant associé à un fibré F sur C de rang r et de pente $g - 1 - \mu$ (donc de degré $r(g-1) - d$). De plus, on a $c_1(\Theta_F) = rf_2$. Ici, le fibré déterminant peut tre construit comme dans [DN89] ou à la manière de Quillen [Kvi85].

Soit $\mathcal{L}$ le fibré déterminant. En remarquant que $\omega_{\mathcal{M}} = \mathcal{L}^{-2}$, le théorème d'annulation de Kodaira montre que $\mathcal{L}^k$ est acyclique pour tout $k > 0$, et on a :

$$h^0(\mathcal{M}, \mathcal{L}^k) = \chi(\mathcal{M}, \mathcal{L}^k) = \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{ch} \mathcal{L}^k)(\operatorname{Td} \mathcal{M})$$

Par définition de $\operatorname{Td} X = \prod \frac{X_i}{1-\exp(-X_i)}$ et de $\hat{A}(X) = \prod \frac{X_i/2}{\sinh(X_i/2)}$, on a $\operatorname{Td} \mathcal{M} = \exp(c_1(\mathcal{M})/2)\hat{A}(\mathcal{M})$, ce qui permet d'écrire

$$h^0(\mathcal{M}, \mathcal{L}^k) = \int_{\mathcal{M}} \exp((k+1)rf_2)\hat{A}(\mathcal{M}).$$

Remarquons ensuite que le fibré tangent de $\mathcal{M}$ en un fibré V est donné par $T\mathcal{M} = R^1\pi_\star \mathfrak{sl}(V)$ (par les résultats classiques de théorie des déformations, avec ici un déterminant fixé). Les calculs de certaines classes caractéristiques de ce fibré sont faits dans [New72] pour le cas $r = 2$ et dans [AB83] dans le cas général. La classe de Pontryagin est très facile à calculer. On sait que $\operatorname{End} V = \mathcal{O} \oplus \mathfrak{sl}(V)$, et $\pi_\star \operatorname{End} V = \mathcal{O}$ (les fibrés de rang r et degré d sont simples), et $R\pi_\star \mathcal{O} \equiv (1-g)\mathcal{O}$. La dualité de Serre relative s'écrit $(R\pi_\star F)^\vee = -R\pi_\star(F^\vee \otimes \Omega)$. On en déduit

$$\begin{aligned} T\mathcal{M} &= (2-g)\mathcal{O} \ominus R\pi_\star(\operatorname{End} V) \\ T^\vee\mathcal{M} &= (2-g)\mathcal{O} \oplus R\pi_\star(\operatorname{End} V \otimes \Omega_C) \\ T\mathcal{M} \oplus T^\vee\mathcal{M} &= (4-g)\mathcal{O} \oplus R\pi_\star(\operatorname{End} V \otimes (\mathcal{O}(K_C) \ominus \mathcal{O})). \end{aligned}$$

Maintenant, $\operatorname{End} V \otimes \mathcal{O}_K$ est $2g-2$ fois le faisceau structurel d'un point, donc on calcule la classe de Pontryagin par :

$$p(\mathcal{M}) = c(T\mathcal{M} \oplus T^\vee\mathcal{M}) = c((2g-2) \operatorname{End} V \restriction_{\mathcal{M}\times\{*\}})$$

Soient θ_i les composantes dans $H^\bullet(\mathcal{M}) \otimes 1$ des racines de Chern de V (c'est-à-dire les racines de Chern de V restreint à $\mathcal{M} \times \{*\}$). Les racines de Pontryagin de $\operatorname{End} V_{\text{restreint}}$ sont toutes les différences $\theta_j - \theta_i$. On en déduit le genre $\hat{A}$ (sans oublier de mettre à la puissance $2g-2$) :

$$\hat{A}(\mathcal{M}) = \prod_{i<j} \frac{\theta_j - \theta_i}{2\sinh(\theta_j - \theta_i)}.$$

C'est un polynôme est les classes a_r.

Les formules de résidus obtenues dans [JK98] et [MO06a] permettent de retrouver le formule de Verlinde pour SL_r. L'approche de Marian et Oprea consiste en particulier à transférer le calcul sur un schéma Quot comme dans [BDW96] et à appliquer la formule de Vafa et Intriligator.

5 La dualité étrange

La preuve de la connjecture de dualité étrange par Alina Marian et Dragos Oprea [MO06b] utilise l'interprétation de formules de type Verlinde comme nombres d'intersection et invariants de Gromov-Witten de grassmanniennes. Cette conjecture a été démontrée par Prakash Belkale dans le cas où on peut se ramener par dégénerescences à une courbe rationnelle, et on obtient le résultat génériquement [Bel06]. Plus récemment, Belkale [Bel07] a montré que le morphisme de dualité étrange était projectivement parallèle (pour la connection de Hitchin projectivement plate sur $\mathfrak{M}_g$). Ceci exprime de manière plus forte sa fonctorialité, et son isomorphie en un point l'implique partout.

5.1 Le morphisme étrange et ses variantes

5.1.1 Conjecture de Beauville-Donagi-Tu

Soient r et k deux entiers. Le morphisme de dualité étrange met en relation les espaces de sections de rang et de niveau échangés sur l'espace de modules des fibrés semi-stables.

Ici, X désigne une courbe projective lisse complexe, de genre $g = \bar{g} + 1$. On note $\Theta_{k,M}$ le fibré déterminant sur $U(r, d)$ associé à un M de pente $\bar{g} - \mu$ et $\theta_{k,M}$ le fibré restreint à un $SU(r, \Lambda)$ avec $\Lambda \in \mathrm{Jac}^d X$.

On utilisera intensivement le lemme suivant :

Lemme 5.1 (Lemme de va-et-vient [Mum70, II.5 Cor. 6 (Seesaw principle)]). Soit X une variété complète, T un schéma et L un fibré en droites sur $X \times T$. Alors l'ensemble des $t \in T$ tels que L_t soit trivial sur X forme un sous-schéma fermé $Z \subseteq T$.

De plus, il existe un fibré en droites L' sur Z tel que $L = p^\star L'$ en restriction à $Z \times T$ et tout morphisme $f : S \to T$ tel que $f^\star L$ soit trivial sur chaque fibre X_s se factorise par Z.

Corollaire 5.2. Soit L un fibré en droites sur $S \times T$ avec S ou T complète, isomorphe à N sur chaque fibre $\{s\} \times T$ et à M sur chaque fibre $S \times \{t\}$. Alors $L = M \boxtimes N$.

Proposition 5.3. Soit τ le produit tensoriel :

$$\begin{array}{rcl} \tau : SU_X(r) \times U_X^*(k) & \to & U_X^*(kr) \\ (E, F) & \mapsto & E \otimes F \end{array}$$

Alors $\tau^\star \Theta_{kr} = \theta_r^k \boxtimes \Theta_k^r$.

Démonstration. Sur $SU(r) \times \{F\}$, le fibré se restreint en $\theta_{r,F} = \theta_r^k$ car F est de rang k et θ_r engendre $\mathrm{Pic}\, SU(r)$, tandis que sur $\{E\} \times U_X^*(k)$, il s'agit de $\Theta_{k,E} = \Theta_k^r$ car c'est vrai pour E trivial et les autres ont même déterminant. Le principe de va-et-vient donne alors le résultat. □

Le fibré sur le produit possède une section canonique, qui est un élément de $H^0(SU(r) \times U_X^*(k), \tau^\star\Theta_{kr}) = H^0(SU(r), \theta_r^k) \otimes H^0(U_X^*(k), \Theta_k^r)$. Elle induit donc un morphisme SD.

Théorème 5.4 (Formule de Verlinde). *La dimension des espaces de fonctions thêta généralisées vaut*

$$h^0(SU_X(r), \theta_r^k) = \frac{r^g}{(r+k)^g} \sum_{\substack{S \subseteq \{0,\ldots,r+k-1\} \\ \mathrm{card}\, S = k}} \prod_{\substack{s \in S, t \notin S \\ 0 \leqslant s,t < r+k}} \left| 2 \sin\left(\pi \frac{s-t}{r+k}\right) \right|^{g-1}$$

Démonstration. Voir la formule générale 2.11. On sait que

$$h^0(SU_X(r), \theta_r^k) = (\mathrm{card}\, T_k)^{g-1} \sum_{\mu \in P_k} \prod_{\alpha \in R^+} \left| 2 \sin\left(\pi \frac{(\alpha | \mu + \rho)}{k + h^\vee}\right) \right|^{2-2g}.$$

Le nombre de Coxeter dual vaut r et $\rho = (r, \ldots, 1)$. Les racines positives sont les $e_i - e_j$ pour $i < j$. Enfin, le cardinal de T_k est $(k+r)^{r-1} \cdot r \cdot 1$. La formule devient alors

$$h^0(SU(r, \mathcal{O}), \theta_r^k) = r^{g-1}(r+k)^{(r-1)\bar{g}} \sum_{w \in P_k} \prod_{i<j} \left| 2 \sin \frac{\langle e_i - e_j, w + \rho \rangle}{k+r} \right|^{2-2g}.$$

Les poids dominants de niveau k sont les $(p_1, \ldots, p_r)$ qui sont des suites décroissantes, avec $p_1 - p_r \leqslant k$. On peut en fait supposer $p_r = 0$, car ils faut les voir modulo $(1, \ldots, 1)$. Donc les $w + \rho$ (où $\rho = (r-1, \ldots, 0)$) sont les suites strictement décroissantes $(w_1, \dots w_r)$ d'entiers entre 1 et $k+r$ avec $w_r = 1$. Ceci permet de récrire la formule comme

$$h^0(SU_X(r), \theta_r^k) = r^{g-1}(r+k)^{(r-1)\bar{g}} \sum_{\{s_1=1,\dots,s_r\}\subseteq\{1,\dots,r+k\}} \prod_{i\neq j} \left|2\sin\frac{s_j - s_i}{k+r}\right|^{1-g}.$$

On a besoin alors de remarquer que pour un s fixé, en posant $\zeta = \exp\frac{2i\pi}{r+k}$,

$$\begin{aligned}\prod_{t\neq s, t\in\{1,\dots,r+k\}} \left|2\sin\pi\frac{s-t}{r+k}\right| &= \prod_{u=1}^{r+k-1}\left(2\sin\frac{u\pi}{r+k}\right)\\ &= \prod_{u=1}^{r+k-1}(-i)\exp\frac{u\pi}{r+k}(1-\zeta^u)\\ &= (-i)^{r+k-1}\exp((r+k-1)\pi/2)P_{r+k}(1) = r+k\end{aligned}$$

où $P_n = \prod(X-\zeta^u) = X^{r+k-1} + \dots + X + 1$. En conséquence

$$\prod_{t\neq s, s\in S, t\in S}\left|2\sin\pi\frac{s-t}{r+k}\right|^{1-g} = (r+k)^{-r\bar{g}}\prod_{t\neq s, s\in S, t\notin S}\left|2\sin\pi\frac{s-t}{r+k}\right|^{g-1}$$

en appliquant la formule aux r valeurs de s. Donc

$$h^0(SU_X(r), \theta_r^k) = \left(\frac{r}{r+k}\right)^{g-1} \sum_{1\in S\subseteq\{1,\dots,r+k\}} \prod_{s\in S, t\notin S}\left|2\sin\frac{s-t}{k+r}\right|^{g-1}.$$

La formule est invariante par translation de S modulo $r+k$. On peut donc sommer sur tous les ensembles à condition de multiplier par $\frac{r}{r+k}$ (car chaque ensemble est translaté $r+k$ fois mais du coup on a chacun en r exemplaires). □

La formule de Verlinde permet de constater l'égalité entre les dimensions des espaces mis en relation par le morphisme étrange. Pour le voir, considérons le revêtement étale de degré k^{2g} donné par le produit tensoriel τ : $SU_X(k) \times \mathrm{Jac}^{g-1}(X) \to U_X^*(k)$ [TiBT92]. On a en réalité un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} SU(k)\times \mathrm{Jac}^{g-1}(X) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d] & U_X^*(k) \arrow[d, "\det"] \\ \mathrm{Jac}^{g-1}(X) \arrow[r, "\times k"] & \mathrm{Jac}^{k(g-1)}(X) \end{tikzcd}$$

qui est cartésien, puisque le choix d'un $E \in U(k, k\bar{g})$ et d'une racine k-ième L du déterminant permet de construire $E\otimes L^{-1}$ qui est de déterminant trivial. Le morphisme du haut est donc un revêtement étale de degré k^{2g}, et les remarques précédentes dans le cas $r=1$ montrent que $\otimes^\star\Theta_k = \theta_k \boxtimes \Theta_{\mathrm{Jac}}^k$. On en déduit la relation

$$\begin{aligned}h^0(U_X^*(k), \Theta_k^r)\times k^{2g} &= h^0(SU_X(k), \theta_k^r)h^0(\mathrm{Jac}^{g-1}(X), \Theta_{\mathrm{Jac}}^{rk})\\ &= \frac{k^g}{(k+r)^g}q(rk)^g = \frac{r^g}{(k+r)^g}q = h^0(SU_X(r), \theta_r^k)\end{aligned}$$

où q désigne la somme dans la formule de Verlinde.

La conjecture suivante est alors naturelle.

Conjecture 5.5 (Beauvile-Donagi-Tu). *Le morphisme étrange* SD : $H^0(SU(r, \mathcal{O}_X), \theta_r^k)^\vee \to H^0(U(r,d), \Theta_k^r)$ *est un isomorphisme.*

5.1.2 Un autre morphisme étrange

Pour les besoins de la démonstration de [MO06b], on construit un second morphisme de dualité valable entre deux espaces de modules de fibrés avec déterminant variable : soit K le faisceau canonique et L et M deux fibrés en droites de degré $\bar{g}$. On a un morphisme :

$$\pi\begin{cases} U_X(r)\times U_X(k) & \to \quad U_X^*(kr)\times \mathrm{Jac}^{g-1}(X)\\ (E,F) & \mapsto \quad (E\otimes F\otimes M, \det E^\vee \otimes \det F\otimes K\otimes L^{-1})\end{cases}$$

qui donne un fibré en droites canonique sur $U(r,0)\times U(r,0)$ donné par $\mathcal{O}(\Delta_{L,M})=\pi^\star(\Theta_{kr}\boxtimes\Theta_1)$. Par construction, le lieu des zéros de la section canonique est

$$\Delta_{L,M}=\left\{(E,F)\text{ tels que }h^0(E\otimes F\otimes M)\neq 0\text{ ou }h^0(\det E^\vee\otimes\det F\otimes K\otimes L^{-1})\neq 0\right\}$$

Lemme 5.6. On a $\mathcal{O}(\Delta_{L,M})=(\Theta^k_{r,M}\otimes\det^\star\Theta_{1,L})\boxtimes(\Theta^r_{k,M}\otimes\det^\star\Theta_{1,K\otimes L^{-1}})$.

Démonstration. La preuve repose également sur le principe de va-et-vient.

Sur une fibre de la forme $\{E\}\times U_X(k)$, il reste $\Theta_{k,E\otimes M}\otimes\det^\star\Theta_{1,KL^{-1}\det E^\vee}$. On utilise la formule de torsion :

$$\Theta_{E\otimes M}=\Theta^r_M\otimes\det^\star(\det(E\otimes M)\otimes(\det M)^{-r})=\Theta^r_{k,M}\otimes\det^\star\det E$$

Par ailleurs, sur la jacobienne, comme E est de degré 0, on a $\Theta_{1,KL^{-1}\det E^\vee}=\Theta_{1,KL^{-1}}\otimes\det E^\vee$. Il reste donc $\Theta^r_{k,M}\otimes\det^\star\Theta_{1,KL^{-1}}$.

Sur une fibre de la forme $U_X(r)\times F$, on a par symétrie (au signe près sur la jacobienne) : $\Theta^k_{r,M}\otimes\det^\star(-1)^\star\Theta_{1,KL^{-1}}$. Mais par dualité de Serre, $(-1)^\star\Theta_{1,L}=\Theta_{1,K\otimes L^{-1}}$. D'où le résultat final. □

On obtient par cette construction un morphisme de dualité

$$\mathsf{D}:H^0(U(r,0),\Theta^k_{r,M}\otimes\det^\star\Theta_{1,L})^\vee\to H^0(U(k,0),\Theta^r_{k,M}\otimes\det^\star\Theta_{1,KL^{-1}}).$$

Celui-ci présente l'avantage d'être beaucoup plus symétrique. Par exemple, si L est une thêta-caractéristique, les espaces accouplés ne diffèrent que par l'échange de r et de k. Par ailleurs, ils ont bien même dimension, comme expliqué dans la proposition suivante.

Proposition 5.7. Soient A et B des fibrés en droites de degré $g-1$. Alors

$$h^0(U_X(r),\Theta^k_{r,A}\otimes\det^\star\Theta_{1,B})=q=\sum_{\substack{S\subseteq\{0,\dots,r+k-1\}\\ \operatorname{card}S=k}}\prod_{\substack{s\in S,t\notin S\\ 0\leqslant s,t<r+k}}\left|2\sin\left(\pi\frac{s-t}{r+k}\right)\right|^{g-1}.$$

Démonstration. Comme pour l'étude du morphisme étrange originel, on a un revêtement étale $\tau:SU_X(r)\times\operatorname{Jac}X\to U_X(r)$, de degré r^{2g}, donné par le produit tensoriel. On a $\tau^\star\Theta_{r,A}=\theta_r\boxtimes\Theta^r_{1,A}$ par le principe de va-et-vient.

De plus $\tau^\star\det^\star\Theta_{1,B}=p_2^\star r^\star\Theta_{1,B}$ car si E est de rang r et de déterminant trivial, $\det E\otimes B=(\det B)^r$. On a alors l'égalité $\tau^\star(\Theta^k_{r,A}\otimes\det^\star\Theta_{1,B})=\theta^k_r\boxtimes(\Theta^{rk}_{1,A}\otimes r^\star\Theta_{1,B})$. Comme on a un revêtement étale, on en déduit :

$$r^{2g}\chi(\Theta^k_{r,A}\otimes\det^\star\Theta_{1,B})=\chi(\theta^k_r)\chi(\Theta^{rk}_{1,A}\otimes r^\star\Theta_{1,B}).$$

Si q désigne la somme de la formule de Verlinde, $\chi(\theta^k_r)=\frac{r^g}{(r+k)^g}q$, et sur la Jacobienne, on a $\chi(\Theta^{rk}_{1,A}\otimes r^\star\Theta_{1,B})=(rk\Theta_{1,A}+r^\star\Theta_{1,B})^g/g!=(rk\Theta_{1,A}+r^2\Theta_{1,B})^g/g!=(rk+r^2)^g(\Theta)^g/g!=(rk+r^2)^g$ par les formules habituelles sur les variétés abéliennes et les diviseurs thêta. On a utilisé que $r^\star\Theta$ et $r^2\Theta$ étaient numériquement équivalents (le calcul peut se faire en cohomologie et la multiplication par r agit par multiplication par r sur le H^1).

En fin de compte, on obtient $r^{2g}\chi(\Theta^k_{r,A}\otimes\det^\star\Theta_{1,B})=\frac{r^g}{(r+k)^g}q(rk+r^2)^g$. Avec le fait que le fibré en droites sur $U_X(r)$ est acyclique (il suffit de le vérifier après traction par τ, auquel cas la formule de Künneth conclut), on obtient $q=h^0(\Theta^k_{r,A}\otimes\det^\star\Theta_{1,B})$. □

5.1.3 Lien entre les deux morphismes de dualité

Le nouveau morphisme D est plus symétrique que le morphisme SD d'origine. On peut assez facilement se ramener de D à SD en remarquant que la restriction ρ de $U(r,0)$ à $SU_X(r)$ induit un morphisme

$$\sigma=\rho^\dagger:H^0(SU_X(r),\theta^k_r)^\vee\to H^0(U_X(r),\Theta^k_{r,M}\otimes\det^\star\Theta_{1,L})^\vee$$

Par ailleurs, on a également un isomorphisme entre $H^0(U_X(k),\Theta^r_{k,M})$ et $H^0(U^*_X(k),\Theta^r_k)$ donné par le morphisme de tensorisation par M sur les espaces sous-jacents.

Lemme 5.8. Le morphisme σ est injectif pour un choix de L et M générique.

Démonstration. Il suffit pour cela de montrer que ρ est surjectif, ce qui revient à montrer que toute section de θ_r^k sur $SU(r,\mathcal{O})$ peut se prolonger sur $U_X(r)$ tout entier. On appellera $\mathcal{L} = \Theta_{r,M}^k \otimes \det^\star \Theta_{1,L}$. On notera également r la multiplication par r sur la jacobienne. En tirant par r, $U_X(r)$ devient $SU_X(r) \times \operatorname{Jac} X$ et $\mathcal{L}$ devient $\theta_r^k \boxtimes (\Theta_{1,M}^{kr} \otimes r^\star\Theta_{1,L})$ par le principe de va-et-vient.

La méthode naturelle pour prolonger la section consiste donc à la multiplier par une section de $\Theta_{1,M}^{kr} \otimes r^\star\Theta_{1,L}$ sur la jacobienne nulle sur le groupe J_r de r-torsion sauf en zéro. En moyennant sur J_r, on obtient sur la fibre en zéro une section proportionnelle à celle qu'on voulait étendre.

C'est équivalent à la surjectivité de la tensorisation $H^0(\operatorname{Jac}^0(X), r^\star\Theta_{1,L}) \to H^0(\operatorname{Jac}^0(X), r^\star\Theta_{1,L} \otimes \mathcal{O}_{J_r})$. Et la dimension de ces deux espaces est r^{2g} (pour le premier, on peut utiliser la formule de Riemann-Roch). Celle-ci peut s'obtenir par la suite exacte $0 \to \mathfrak{I}_{J_r} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{J_r} \to 0$, une fois qu'on aura vu que le premier terme n'a pas de sections globales (il suffit d'écrire la suite exacte longue).

On étudie donc $r^\star\Theta_{1,L} \otimes \mathfrak{I}_{J_r}$. Il a les mêmes sections globales de $r_\star(r^\star\Theta_{1,L} \otimes \mathfrak{I}_{J_r}) = \Theta_{1,L} \otimes r_\star\mathfrak{I}_{J_r}$ (par la formule de projection).

L'image directe par r de $\mathcal{O}$ est une somme de T_i indexée par J_r (le groupe de Galois du revêtement), et ce raisonnement appliquée à la suite exacte du sous-schéma J_r donne $r_\star\mathfrak{I}_{J_r} = \bigoplus_{i\in J_r} T_i \otimes \mathfrak{I}_{\{\mathcal{O}\}}$, où les T_i sont les fibrés de r-torsion.

En particulier, $H^0(\operatorname{Jac}^0(X), r^\star\Theta_{1,L} \otimes \mathfrak{I}_{J_r} = \bigoplus H^0(J, \Theta_{1,L} \otimes T_i \otimes \mathfrak{I}_{\{\mathcal{O}\}}) = 0$, si on s'arrange pour que le diviseur thêta de $L \otimes T_i$ ne passe pas par zéro.

On obtient une section de $r^\star\Theta_{1,L}$ nulle sur tout J_r sauf en zéro. Pour un choix générique de M, on a aussi une section de $\Theta_{1,M}^{kr}$ ne s'annulant pas en zéro.

Soit s une section de θ_r^k quelconque, qu'on va chercher à étendre. On la multiplie de façon externe par la section de $\Theta_{1,M}^{kr} \otimes r^\star\Theta_{1,L}$ d'avant, puis on fait une moyenne sur J_r pour la rendre J_r-invariante. Et sa valeur sur $SU(r,\mathcal{O}) \times \{\mathcal{O}\}$ est encore s, à une constante près. □

On obtient ainsi un magnifique diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^0(SU_X(r), \theta_r^k)^\vee \arrow[r, "\mathsf{SD}"] \arrow[d, hook, "\sigma"] & H^0(U_X^*(k), \Theta_k^r) \arrow[r, "(\otimes M)^\star", "\sim"'] & H^0(U_X(k), \Theta_{k,M}^r) \arrow[d, hook, "\iota = \otimes s_{1,K\otimes L^{-1}}"] \\
H^0(U_X(r), \Theta_{r,M}^k \otimes \det^\star\Theta_{1,L})^\vee \arrow[rr, "\mathsf{D}"] & & H^0(U_X(k), \Theta_{k,M}^r \otimes \det^\star\Theta_{1,K\otimes L^{-1}})
\end{tikzcd}$$

où SD relie deux espaces vectoriels de même dimension (d'après la formule de Verlinde).

Proposition 5.9. Le diagramme ci-dessus est commutatif, à une constante multiplicative près.

Démonstration. On interprète $\mathsf{D}\circ\sigma$ et $\iota\circ\mathsf{SD}$ comme des morphismes de dualité provenant de sections sur $SU_X(r) \times U_X(k)$ du fibré $\theta_r^k \boxtimes (\Theta_{k,M}^r \otimes \det^\star\Theta_{1,K\otimes L^{-1}})$.

Comme σ est simplement un comorphisme de restriction, $\mathsf{D}\circ\sigma$ est associé à la section naturelle s'annulant sur $\Delta_{L,M} \cap SU_X(r)$, là où $h^0(E \otimes F \otimes M)$ et $h^0(\underbrace{\det E^\vee}_{\mathcal{O}} \otimes \det F \otimes KL^{-1})$ sont non nuls.

Par ailleurs, $\iota\circ\mathsf{SD}$ provient de la section naturelle s'annulant sur Θ_{kr} ou sur $\Theta_{1,KL^{-1}}$ (à cause du morphisme de tensorisation ι). Mais c'est exactement le lieu où $h^0(E \otimes (F \otimes M))$ ou $h^0(\det F \otimes KL^{-1})$ est non nul (F étant l'élément de $U_X(k)$).

On déduit de cela la proportionnalité entre les deux morphismes. □

Ainsi, il suffit de prouver l'injectivité de SD, qui résultera de celle de D.

5.1.4 Interprétation par la transformée de Fourier-Mukai

L'article de M. Popa [Pop02] présente quelques applications de la transformée de Fourier-Mukai (utilisée sur la jacobienne de la courbe). Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
U_X(r) \arrow[d, "\det"] & \operatorname{Jac} X \times U_X(k) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\det"] & U_X(k) \arrow[d, "\det"] \\
\operatorname{Jac} X & \operatorname{Jac} X \times \operatorname{Jac} X \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & \operatorname{Jac} X
\end{tikzcd}$$

Soit M un fibré en droites de degré $g-1$ sur X, et $\Theta_{r,M}$ le fibré déterminant associé sur $U_X(r)$. Alors $E_{r,k} = \det_\star \mathcal{O}(k\Theta_{r,M})$ a pour fibre en $\mathcal{L}$ l'espace $H^0(SU(r,\mathcal{L}),\theta_M^k)$ (θ_M est acyclique ainsi que ses puissances).

À droite, on a un faisceau $E_{k,r} = \det_\star \mathcal{O}(r\Theta_{k,M})$, qui donne par transformée de Fourier, un fibré $\widehat{E_{k,r}}$ à gauche, qui est (sachant que det est à valeurs dans la jacobienne de droite)

$$\begin{aligned}(p_1)_\star(\mathcal{P}\otimes p_2^\star E_{k,r}) &= (p_1)_\star(\mathcal{P}\otimes p_2^\star \det_\star \mathcal{O}(r\Theta_{k,M})) \\ &= (p_1)_\star(\det_\star(\det^\star \mathcal{P}\otimes \pi_2^\star\mathcal{O}(r\Theta_{k,M}))) \quad = (p_1)_\star(\det_\star(\mathcal{O}(r\Theta_{k,M\otimes\mathcal{P}^{1/r}})))\end{aligned}$$

dont la fibre en $\mathcal{L}$ est $H^0(U_X(k),\mathcal{O}(r\Theta_{k,M\otimes\mathcal{L}^{1/r}}))$. La conjecture de dualité étrange (dans une version relative) revient à dire que $\widehat{E_{k,r}}$ et $E_{r,k}$ sont canoniquement duaux l'un de l'autre.

5.2 Preuve de la dualité étrange

5.2.1 Interprétation énumérative des nombres de Verlinde

On va en fait montrer que D est un isomorphisme, en montrant que l'accouplement

$$H^0(U_X(r),\Theta_{r,M}^k\otimes\det^\star\Theta_{1,L})^\vee\otimes H^0(U_X(k),\Theta_{k,M}^r\otimes\det^\star\Theta_{1,K\otimes L^{-1}})^\vee\to\mathbb{C}$$

est non dégénéré. Pour cela, rien de plus efficace que de trouver une base de chacun des espaces, où la forme bilinéaire aura une matrice diagonale. Si (φ,ψ) est un couple de formes linéaires, leur produit est défini en considérant $\varphi\otimes\psi$ comme une forme linéaire sur $H^0(U_X(r)\times U_X(k),\Delta_{L,M})$, et en l'évaluant sur la section canonique. Les morphismes d'évaluations fournissent par ailleurs des formes linéaires faciles à interpréter géométriquement : étant donnés (A_i) et (B_i) deux suites de fibrés de degré 0 et de rangs r et k, on cherche à vérifier la condition suivante : $h^0(A_i\otimes B_j\times M)$ et $h^0(\det A_i^\vee\otimes\det B_j\otimes L^{-1}\otimes K)$ sont nuls si et seulement si $i=j$ (car alors, (A_i,B_j) n'est pas dans $\Delta_{L,M}$, et la section canonique ne s'annule pas si et seulement si $i=j$).

Alors, (B_i) est un système dual de (A_i), et il suffira de les prendre de la bonne dimension, et de vérifier que les dimensions sont les mêmes. Pour simplifier, on cherchera à avoir $h^0(\det A_i^\vee\otimes\det B_i\otimes L^{-1}\otimes K)=0$ quel que soit i, de sorte qu'il ne reste à vérifier l'orthogonalité que pour $h^0(A\otimes B\otimes M)$.

Soit $Q=\mathrm{Quot}_{r,d}(\mathcal{O}^{r+k},X)$ le schéma de Grothendieck paramétrant les quotients cohérents de $\mathcal{O}^{r+k}$ de rang r et degré d. On a une suite exacte universelle sur $Q\times X$ de la forme $0\to\mathcal{E}\to\mathcal{O}^{r+k}\to\mathcal{F}\to 0$. Pour d suffisamment grand, Q possède la dimension attendue [BDW96] valant $\chi(\mathcal{H}om(E,F))$. La pente de $\mathcal{H}om(E,F)$ vaut $d/r+d/k$, son rang est rk, d'où la dimension $d(r+k)-rk\bar g$, où $\bar g = g-1$.

Proposition 5.10. Soit a_k la classe de Chern de degré k du fibré vectoriel $\mathcal{E}$ restreint à $Q\times\{*\}$ (il s'agit aussi de la composante de Künneth $a_k\otimes 1$ de la classe de Chern de $\mathcal{E}^\vee$ dans $CH^k(Q)\otimes CH^0(X)$). Soit $s=\dim Q/k$ (on suppose d multiple de k).

$$\text{Alors } \int_Q a_k^s = h^0(\Theta_{r,A}^k\otimes\det^\star\Theta_{1,B}) = \sum_{\substack{S\subseteq\{0,\dots,r+k-1\}\\ \operatorname{card} S=k}}\ \prod_{\substack{s\in S,t\notin S\\ 0\leqslant s,t<r+k}}\left|2\sin\left(\pi\frac{s-t}{r+k}\right)\right|^{g-1}$$

Démonstration. On applique la formule de Vafa et Intriligator (4.3) pour calculer l'intégrale. La classe à intégrer vaut en termes de racines de Chern $R(\lambda_1,\dots,\lambda_k)=(\prod\lambda_i)^s$. On obtient donc

$$(-1)^{\bar g\binom{k}{2}+d(k-1)}\sum_{\lambda_1,\dots\lambda_k}(r+k)^{k\bar g}\prod\lambda_i^{s-\bar g}\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)^{-2\bar g}$$

Remarquons que $s=(d/k)(r+k)-r\bar g$ et que les racines de l'unité considérées sont des racines $(r+k)$-ièmes. On peut donc écrire

$$\prod_i\lambda_i^{s-\bar g}=\prod_i\lambda_i^{(k-1)\bar g}=\prod_{i<j}\lambda_i^{\bar g}\lambda_j^{\bar g}.$$

Il reste alors

$$(-1)^{\bar g\binom{k}{2}+d(k-1)}\sum_{\lambda_1,\dots\lambda_k}(r+k)^{k\bar g}\prod_{i<j}\left(\frac{\lambda_i\lambda_j}{(\lambda_i-\lambda_j)^2}\right)^{\bar g}$$

où $\frac{\lambda_i\lambda_j}{(\lambda_i-\lambda_j)^2}=(\lambda_i/\lambda_j+\lambda_j/\lambda_i-2)^{-1}$. Soit $\lambda_i=\exp(2i\pi\frac{s}{r+k})$ et $\lambda_j=\exp(2i\pi\frac{t}{r+k})$, où s et t appartiennent à un ensemble S de cardinal k représentant les racines de l'unité choisies. L'expression devient $\left(2\cos\left(2\pi\frac{s-t}{r+k}\right)-2\right)^{-1}=$

$-\left(2\sin\left(\pi\frac{s-t}{r+k}\right)\right)^{-2}$. On en déduit

$$\int_Q a_k^s = (-1)^{\bar{g}\binom{k}{2}+d(k-1)} \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,r+k\}\\ \text{card } S=k}} (r+k)^{k\bar{g}} \prod_{\{s<t\}\subseteq S} \left(-\left(2\sin\pi\frac{s-t}{r+k}\right)^{-2}\right)^{\bar{g}}$$
$$= (-1)^{\bar{g}\binom{k}{2}+d(k-1)}(r+k)^{k\bar{g}} \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,r+k\}\\ \text{card } S=k}} (-1)^{\bar{g}\binom{k}{2}} \prod_{t\neq s, s\in S, t\in S} \left|2\sin\pi\frac{s-t}{r+k}\right|^{-\bar{g}}.$$

D'un autre côté, on a vu lors de la preuve précédente (5.4) que

$$h^0(SU(r,\mathcal{O}),\theta_r^k) = r^{g-1}(r+k)^{(r-1)\bar{g}} \sum_{\{s_1=1,\dots,s_r\}\subseteq\{1,\dots,r+k\}} \prod_{i\neq j} \left|2\sin\frac{s_j-s_i}{k+r}\right|^{1-g}$$
$$\text{soit } q = \left(\frac{r+k}{r}\right)^g h^0(SU(r,\mathcal{O}),\theta_r^k)$$
$$= (r+k)^{r\bar{g}}\frac{r+k}{r} \sum_{\{s_1=1,\dots,s_r\}\subseteq\{1,\dots,r+k\}} \prod_{i\neq j} \left|2\sin\frac{s_j-s_i}{k+r}\right|^{1-g}$$
$$= (r+k)^{r\bar{g}} \sum_{S\subseteq\{1,\dots,r+k\}} \prod_{s\neq t\in S} \left|2\sin\frac{s-t}{k+r}\right|^{-\bar{g}}.$$

□

5.2.2 Réalisation géométrique des nombres d'intersections

L'égalité entre le nombre de fibrés à trouver et le nombre d'intersections ci-dessus pousse naturellement à vouloir réaliser géométriquement ce nombre. La réalisation géométrique de la classe de Chern devrait être le schémas des zéros d'une section de $\mathcal{E}$ restreinte à $Q\times\{p\}$, où p est un point de X.

Choisissons donc s points de X, notés $p_1,\dots,p_s$ dans la suite (où $s=\frac{1}{k}\dim Q$ comme dans la proposition précédente). On choisit également s droites L_i dans $(\mathbb{C}^{r+k})^\vee$, qui donnent des sections $\varphi_i : L_i\otimes\mathcal{O}\to(\mathcal{O}^{r+k})^\vee\to\mathcal{E}^\vee$. Ces sections ont l'avantage d'avoir un sens géométrique clair : leurs zéros sont les fibrés vectoriels tels que le morphisme de X dans la grassmannienne $G(k,r+k)$ envoie p_i dans l'annulateur de L_i (qui est certain hyperplan).

Soit Z_i le schéma des zéros de φ_i restreinte à $Q\times\{p_i\}\simeq Q$. Il est montré dans [Ber94] que les Z_i sont bien de codimension k et que leur classe de cycle est bien l'évaluation de la classe de Chern voulue sur la classe fondamentale de Q.

Proposition 5.11 ([Ber94], [MO06b]). Pour un choix générique des L_i, les Z_i s'intersectent proprement, en des points réduits de Q correspondant à des fibrés stables.

Démonstration. Génériquement, les intersections sont limitées au schéma $U=\mathrm{Mor}_d(X,G(k,r+k))$ des morphismes vers la grassmannienne, qui correspond à l'ouvert du schéma de Grothendieck des quotients localement libres.

Considérons un point p_i fixé. On a un morphisme d'évaluation canonique $e_i : U\to G(k,r+k)$. Le lieu Z_i d'annulation de φ_i est l'ensemble des points où l'image de $\mathcal{E}$ est contenue dans l'hyperplan $L_i^\perp$, c'est-à-dire $Z_i=e_i^{-1}(W_i)$, avec W_i la sous-grammannienne $G(k,L_i^\perp)\simeq G(k,r+k-1)$.

Soit Y le sous-schéma complémentaire des fibrés stables de U : on veut que Y ne rencontre pas l'intersection des $e_i^{-1}(W_i)$. On se restreint à des sous-schémas où e est de dimension relative constante. Les images réciproques de W_i sont alors de dimensions bien définies, et pour un choix générique, chacune intersecte les précédentes proprement (par le théorème de transversalité de Kleiman). En particulier, l'intersection maximale des W_i ne doit pas rencontrer le lieu instable qui est de codimension non nulle.

Pour le lieu stable, $e_i : U^s\to G(k,r+k)$ est lisse car U^s est lisse pour d assez grand : l'obstruction est $\mathrm{Ext}^1(E,F)$ et on a une suite exacte longue

$$\mathrm{Ext}^1(F,F)\to\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}^{r+k},F)\to\mathrm{Ext}^1(E,F)\to\mathrm{Ext}^2(F,F)$$

où $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}^{r+k},F)=H^1(F)^{r+k}=0$ et $\mathrm{Ext}^2(F,F)=H^2(\mathrm{End}(F))=0$.

Comme e_i est génériquement lisse et équivariant pour l'action de GL_{r+k}, e_i est partout lisse. En particulier e_i est de dimension relative constante : les images réciproques de W_i ont une dimension bien définie. Par la transversalité de Kleiman, elles s'intersecteront génériquement proprement.

On raisonne de la même façon avec la lissité générique, pour montrer que l'intersection totale est lisse, donc réduite. ☐

Comme $Z = \bigcap_i Z_i$ n'est rien d'autre que l'espace de modules fin des sous-fibrés de rang k et de degré $-d$ de $\mathcal{O}^{r+k}$ dont la fibre en p_i est contenue dans l'orthogonal de L_i, on peut l'écrire $\mathrm{Quot}_{r,d-s}(S)$, où S est le sous-faisceau de $\mathcal{O}^{r+k}$ des sections s'annulant sur L_i en p_i.

On a ainsi sur Z (qui est une réunion finie de points lisses), le diagramme suivant où l'on a exprimé la définition de S par un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\bigoplus_i L_i^\vee \otimes \mathcal{O}(-p_i) \arrow[dd, hook] & & & S \arrow[lll] \arrow[r] \arrow[dd, hook] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[dd, hook] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[ull] \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & & \\
\bigoplus_i L_i^\vee \otimes \mathcal{O} \arrow[d] & & & \mathcal{O}^{r+k} \arrow[lll] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bigoplus_i L_i^\vee \otimes \mathcal{O}_{p_i} \arrow[rrr, equal] \arrow[d] & & & \bigoplus_i L_i^\vee \otimes \mathcal{O}_{p_i} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \bigoplus_i L_i^\vee \otimes \mathcal{O}_{p_i} \arrow[d] & \\
0 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

qui permet de voir que S est de degré $-s$ et que comme Z est un schéma Quot lisse de dimension zéro, on a en fait $\chi(\mathcal{H}om(\mathcal{E}_z, \mathcal{F}'_z)) = h^0(\mathcal{H}om(\mathcal{E}_z, \mathcal{F}'_z)) = 0$ en tout point z de Z.

5.2.3 Retour à la dualité étrange

On a donc trouvé un sous-schéma Z constitué de q points, représentant des suites exactes de fibrés vectoriels $0 \to E_i \to S \to F'_i \to 0$, avec E_i et F'_i stables, E_i de degré $-d$ et rang k, F'_i de degré $d - s$ et rang r (on a plus précisément $\det S = \mathcal{O}(-\sum p_i)$). On a de plus $\det(E_i \otimes F'_i) = \mathcal{O}(-\sum p_i)$ et $h^0(E_i^\vee \otimes F'_i) = 0$ par ce qui précède. On veut construire à partir de ceci des fibrés A_i et B_i vérifiant les propriétés suivantes (avec L et M des fibrés en droites de degré $g-1$) :

– $h^0(\det A_i^\vee \otimes \det B_j \otimes L^{-1} \otimes K) = 0$
– $h^0(A_i \otimes B_j \otimes M) = 0$ si et seulement si $i = j$.

Les propriétés que l'on a déjà trouvées en sont très proches. Par exemple, $h^0(E_i^\vee \otimes F'_j) \neq 0$ pour $i \neq j$. En effet, on a des morphismes $E_i \to S \to F'_j$, qui ne forment pas une suite exacte, car c'est F'_i le conoyau de $E_i \to S$ et non pas F'_j.

Posons donc $A_i = E_i^\vee \otimes N$ et $B_i = F'_i \otimes M^{-1} \otimes N^{-1}$, où N est un fibré en droites de degré δ à fixer plus tard. Alors on a bien $h^0(A_i \otimes B_i \otimes M) = h^0(E_i^\vee \otimes F'_j) = 0$ ssi $i = j$, quel que soit notre choix de N.

Pour les degrés, on a $\deg A_i = k\delta - \deg E_i = k\delta + d$ et $\deg B_i = d - s - r(g - 1 + \delta)$. Mais $ks = d(r+k) - rk(g-1)$, donc $k(d - s - r(g-1)) = -rd$ et $\deg B_i = -\frac{r}{k}(k\delta + d)$. Ainsi il suffit de choisir $\delta = -d/k$ pour avoir des fibrés de degré 0, stables par construction (et d était supposé multiple de k).

Il reste à s'assurer que $\det A_i^\vee \otimes \det B_i \otimes L^{-1} \otimes K$ n'a pas de section. Il s'agit en fait de $\det E_i \otimes N^{-k} \otimes \det F'_i \otimes N^{-r} \otimes M^{-r} \otimes L^{-1} \otimes K$ qui est aussi

$$N^{-r-k} \otimes M^{-r} \otimes L^{-1} \otimes K(-\sum p_i).$$

Comme $\det A_i^\vee \otimes \det B_i$ est de degré zéro, ce fibré a pour degré $\deg(K - L) = g - 1$. Pour qu'il n'ait pas de section, il faut qu'il soit en dehors du diviseur thêta canonique de $\mathrm{Jac}^{g-1}(X)$. Pour un choix générique de N, ceci est vérifié.

Enfin, sous ces conditions, les A_i et B_i sont automatiquement semi-stables, par le lemme suivant :

Lemme 5.12 (voir [Ses93]). Soit E et F deux fibrés vectoriels sur X, tels que $R\Gamma(E \otimes F) = 0$. Alors E et F sont semi-stables.

Démonstration. Supposons que E ne soit pas stable. Alors E contient un sous-fibré E' de pente strictement plus grande, et $\chi(E' \otimes F) > 0$. En particulier, on peut trouver une section non nulle de $E' \otimes F$, donc de $E \otimes F$, ce qui est absurde. ☐

Ceci prouve la bijectivité de D.

6 Vers une dualité étrange pour les fibrés symplectiques

Dans le prolongement des résultats exposés précédemment, on peut se demander à quel point la dualité étrange peut se généraliser à d'autres groupes de structure. On pourra se reporter à [Sor00] pour avoir un aperçu de la construction et des propriétés des espaces de modules correspondants, et à [Bea06] pour des remarques plus récentes sur la dualité étrange notamment.

6.1 Construction des espaces de modules

Soit G un groupe algébrique semi-simple. Les G-fibrés principaux correspondent à des fibrés vectoriels éventuellement munis de structures supplémentaires, à déterminant trivial. Un tel fibré est trivial sur la courbe épointée X^*.

Théorème 6.1 ([DS95, Theorem 3]). *Soit U un k-schéma de type fini, et E un G-fibré sur $X \times U$. Alors il existe un changement de base localement fppf $V \to U$ tel que E soit trivial sur $X^* \times_U V$. Si on suppose que la caractéristique de k n'est pas un diviseur de* $\operatorname{card} \pi_1(G(\mathbb{C}))$, *on peut même obtenir le résultat pour $V \to U$ étale.*

Ceci permet de paramétrer les G-fibrés sur X par le champ algébrique $G(X^*)\backslash LG/L^+G$ où $LG = G(\mathbb{C}((z)))$ et $L^+G = G(\mathbb{C}[[z]])$. Le caractère algébrique de ce champ découle de l'algébricité du champ de modules $\mathcal{SU}(r)$ des SL_r-fibrés, et de la représentabilité du foncteur d'oubli $\mathcal{M}_{G,X} \to \mathcal{M}_{GL_r,X}$.

6.2 Espace de modules des fibrés orthogonaux

Soit $\mathcal{M}_{SO_r}$ l'espace de modules des fibrés vectoriels de rang r sur X, munis d'une forme quadratique non dégénérée $q \in H^0(\operatorname{Sym}^2 E^\vee)$ et d'une section trivialisante de $\bigwedge^r E$. C'est aussi l'espace de modules des SO_r-fibrés principaux sur X. On s'intéressera aussi particulièrement à l'espace de modules $\mathcal{M}'_{SO_r}$ des fibrés munis d'une *1-forme* à valeurs dans les formes quadratiques non dégénérées.

L'espace de modules $\mathcal{M}'_{SO_r}$ possède un fibré *pfaffien*, c'est-à-dire une racine carrée canonique du fibré déterminant. Soit σ la 1-forme quadratique sur une famille de fibrés E paramétrée par S. Elle introduit un isomorphisme $E \simeq \mathcal{H}om(E, \omega_X)$. La dualité de Serre relative pousse donc à chercher un représentant $K^\bullet$ de $R\pi_\star E$ spécial, au sens où il possède un quasiisomorphisme symétrique $K^\bullet \xrightarrow{\sim} (K^\bullet)^\vee[-1]$ équivalent à σ. Pour ce faire, choisissons une représentation quelconque de $R\pi_\star E$ muni d'un quasi-isomorphisme vers son dual. Le symétrisé du quasi-isomorphisme convient.

Sur l'espace de modules des fibrés orthogonaux ordinaires, on peut choisir une thêta-caractéristique κ (une racine carrée du fibré canonique). Le produit tensoriel par κ fournit un isomorphisme de $\mathcal{M}_{SO_r}$ sur $\mathcal{M}'_{SO_r}$. Le fibré pfaffien donne une racine carrée du faisceau dualisant (qui est le fibré déterminant).

6.3 Espace de modules des fibrés symplectiques

Comme pour les fibrés orthogonaux, on distingue $\mathcal{M}_{Sp_r}$ et $\mathcal{M}'_{Sp_r}$, les espaces de modules de fibrés vectoriels de rang r respectivement de déterminant trivial et munis d'une 2-forme non dégénérée, ou de déterminant K_X^r et munis d'une 2-forme non dégénérée à valeurs dans le fibré canonique. L'application $E \to E \otimes \kappa$ (où κ est une thêta-caractéristique) fournit un isomorphisme entre les deux espaces. On note $\mathcal{L}_r$ et $\mathcal{L}'_r$ les fibrés déterminants (obtenus en tirant ceux de $\mathcal{U}(r, 0)$ et $\mathcal{SU}(r)$. On sait (voir [LS97]) que le fibré déterminant engendre le groupe de Picard de l'espace de modules (ou du champ de modules).

Si J_r et J_s sont les matrices symplectiques standard, $J_r \otimes J_s$ est une matrice symétrique composée de 1 et de -1 sur *l'autre diagonale*. On déduit de cela que le produit tensoriel de deux fibrés symplectiques est naturellement muni d'une forme quadratique. On obtient ainsi une application naturelle $\pi : \mathcal{M}_{Sp_r} \times \mathcal{M}'_{Sp_s} \to \mathcal{M}'_{SO_{4rs}}$.

Par le principe de va-et-vient, on voit facilement que $\pi^\star \mathcal{L}'_{SO_{4rs}} = \mathcal{L}_r^{2s} \boxtimes \mathcal{L}'^{2r}_s$. En fait, la construction du fibré pfaffien [LS97, §7; Sor00] permet d'obtenir à un signe près un fibré $\mathcal{P}f$ muni d'une section canonique tel que $\pi^\star \mathcal{P}f = \mathcal{L}_r^s \boxtimes \mathcal{L}'^r_s$, fournit ainsi le morphisme de dualité étrange $\delta : H^0(\mathcal{M}_{Sp_r}, \mathcal{L}_r^s) \to H^0(\mathcal{M}'_{Sp_s}, \mathcal{L}'^r_s)$.

Conjecture 6.2. *Le morphisme de dualité étrange est un isomorphisme.*

6.4 La formule de Verlinde pour les fibrés symplectiques

Rappelons la formule de Verlinde (2.11) :

$$h^0(\mathcal{M}_{Sp_r}, \mathcal{L}_r^k) = (\operatorname{card} T_l)^{g-1} \sum_{w \in P_k} \prod_{\alpha \in R^+} \left| 2 \sin\left(\frac{\pi \langle w + \rho | \alpha \rangle}{k + h^\vee}\right) \right|^{2-2g}$$

On renverra à [OW96] pour différentes expressions de la formule de Verlinde pour les groupes classiques et leurs symétries.

Ici $\operatorname{card} T_k = (k+h^\vee)^r(\operatorname{card}\Lambda/\Lambda_R)[\Lambda_R : \Lambda_{R_{\text{long}}}]$, où $\operatorname{card}\Lambda/\Lambda_R$ est l'ordre du centre du groupe, qui vaut deux, et $[\Lambda_R : \Lambda_{R_{\text{long}}}] = 2^{r-1}$. On se souvient également que pour un choix de base $(e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, 2e_n)$, la somme des poids fondamentaux est $\rho = (r, \dots, 1)$, $h^\vee = r+1$ et les poids dominants de niveau k sont les vecteurs $(x_1, \dots, x_r)$ dont les coordonnées sont décroissantes, avec $x_r \geqslant 0$ et $x_1 \leqslant k$. Ainsi les $w + \rho$ sont les suites strictement décroissantes de coordonnées entre 1 et $r+k$. Les racines positives sont les $2e_i$, les $e_i + e_j$, et les $e_j - e_i$ pour $i < j$. On trouve ainsi

$$h^0(\mathcal{M}_{Sp_r}, \mathcal{L}_r^k) = (2^r(k+r+1)^r)^{g-1} \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,r+k\} \\ \operatorname{card} S = r}} \left(\prod_i 2\sin\frac{\pi s_i}{r+k+1} \prod_{i<j} 2\sin\frac{\pi(s_j - s_i)}{2(r+k+1)} 2\sin\frac{\pi(s_j+s_i)}{2(r+k+1)} \right)^{2-2g}.$$

Lemme 6.3 ([OW96]). Soit S une partie de $\{1, \dots, N-1\}$. On pose

$$\Delta(S) = \prod_{s\in S} 4\sin^2\left(\frac{s\pi}{N}\right) \prod_{s<t\in S} 4\sin^2\left(\frac{(t-s)\pi}{2N}\right) 4\sin^2\left(\frac{(t+s)\pi}{2N}\right).$$

Alors si T est le complémentaire de S,

$$\frac{\Delta(S)}{\Delta(T)} = \frac{(2N)^{\operatorname{card} S}}{(2N)^{\operatorname{card} T}}.$$

Démonstration. On comptera librement les indices modulo $2N$. Commençons par isoler

$$\Pi(S) = \prod_{s<t\in S} 4\sin^2\left(\frac{(t-s)\pi}{2N}\right) 4\sin^2\left(\frac{(t+s)\pi}{2N}\right)$$

$$\text{et } P(S) = \prod_{s\in S} 4\sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right) \quad Q(S) = \prod_{s\in S} 4\sin^2\left(\frac{s\pi}{N}\right)$$

Alors

$$\frac{\Pi(S)}{\Pi(T)} = \frac{(2N)^{\operatorname{card} S - \operatorname{card} T + 2}}{4P(S)^2 P(N-S)^2}.$$

On démontre l'identité par récurrence sur le cardinal de S. Si S est vide, on doit calculer $\Pi(E)$ où $E = \{1, \dots, N-1\}$.

$$\begin{aligned}
\Pi(E)^2 &= \prod_{s\neq t\in E} 4\sin^2\left(\frac{(t-s)\pi}{2N}\right) 4\sin^2\left(\frac{(t+s)\pi}{2N}\right) \\
&= \prod_{|s|\neq t\in E} 4\sin^2\left(\frac{(t+s)\pi}{2N}\right) \\
\Pi(E)^2 Q(E) &= \prod_{|s|, t\in E, s+t\neq 0} 4\sin^2\left(\frac{(t+s)\pi}{2N}\right) \\
\Pi(E)^4 Q(E)^2 &= \prod_{|s|, |t|\in E, s+t\neq 0} 4\sin^2\left(\frac{(t+s)\pi}{2N}\right)
\end{aligned}$$

Le produit contient chaque facteur $4\sin^2\left(\frac{u\pi}{2N}\right)$ avec $2N-4$ occurences si $u \neq 0$ et $u \neq N$ (on a les valeurs interdites $s = 0$, $s = N$, $t = 0$, $t = N$), et $2N-2$ occurences pour $u = N$ (les valeurs interdites apparaissent par couple). On trouve ainsi

$$\Pi(E)^4 Q(E)^2 = (2N)^{4N-8} \cdot 16$$

car $P(\{1, \dots, 2N-1\}) = (2N)^2$, et comme $Q(E) = N^2$, on en déduit

$$\frac{\Pi(E)}{\Pi(\varnothing)} = 2^{N-1} N^{N-3}.$$

De plus $P(E) = \sqrt{P(\{1, \dots, 2N-1\})/4} = N$, et on a bien :

$$\frac{\Pi(E)}{\Pi(\varnothing)} = \frac{(2N)^{N+1}}{4N^2N^2}.$$

Supposons maintenant le résultat vrai pour S d'un certain cardinal. On veut montrer

$$\frac{\Pi(S \cup x)}{\Pi(T \setminus x)} = \frac{\Pi(S)}{\Pi(T)} \frac{(2N)^2}{(4\sin^2 \frac{x\pi}{2N} \cdot 4\sin^2 \frac{(N-x)\pi}{2N})^2}.$$

Or si $T' = T \setminus x$, $S \cup T' = E \setminus x$ et

$$\frac{\Pi(S \cup x)}{\Pi(S)} \frac{\Pi(T)}{\Pi(T \setminus x)} = P(x+S)P(x-S)P(x+T')P(x-T') = P((x+E) \setminus \{2x\})P((x-E) \setminus \{0\}).$$

De plus $(x+E) \cup (x-E) = \{1, \ldots, 2N\} \setminus \{x, x+N\}$. On obtient donc finalement, en remplaçant $P(\{2x\})$ par $P(\{x, N-x\})$ (c'est-à-dire $\sin 2x = 2\sin x \cos x$)

$$\frac{P(\{1, 2N-1\})}{P(0)P(2x)P(x)P(N-x)} = \frac{(2N)^2}{4P(x)^2 P(N-x)^2},$$

ce qu'on voulait démontrer.

Il ne reste plus qu'à voir que

$$\frac{\Pi(S)}{\Pi(T)} = \frac{\Delta(S)Q(T)}{\Delta(T)Q(S)} = \frac{(2N)^{\operatorname{card} S}}{(2N)^{\operatorname{card} T}} \frac{N^2}{P(S)^2 P(N-S)^2}.$$

On veut donc calculer $Q(T)/Q(S) = Q(E)/Q(S)^2$. Comme $Q(E) = N^2$, on doit voir que $Q(S)^2 = P(S)P(N-S)$, ce qui est encore un avatar de $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. $\square$

Reprenons l'expression de la formule de Verlinde :

$$h^0(\mathcal{M}_{Sp_r}, \mathcal{L}_r^k) = (2k+2r+2)^{r(g-1)} \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, r+k\} \\ \operatorname{card} S = r}} \Delta(S)^{1-g}$$

D'après ce qui précède, si T est le complémentaire de S, $\operatorname{card} S - \operatorname{card} T = r-k$ et $\Delta(S) = \sqrt{\Delta(S)\Delta(T)}\sqrt{\frac{\Delta(S)}{\Delta(T)}}$. En appliquant la formule précédente avec $N = r+k+1$, on trouve

$$\Delta(S) = \sqrt{\Delta(S)\Delta(T)}(2r+2k+2)^{(r-k)/2}.$$

On récrit ainsi la formule de Verlinde sous la forme plus symétrique :

$$h^0(\mathcal{M}_{Sp_r}, \mathcal{L}_r^k) = (2k+2r+2)^{(r+k)\bar{g}/2} \sum_{\substack{S \sqcup T = \{1, \ldots, r+k\} \\ \operatorname{card} S = r}} (\Delta(S)\Delta(T))^{-\bar{g}/2}.$$

Avec les notations précédentes, on a aussi $\Delta(S)\Delta(T) = Q(S)Q(T)\Pi(S)\Pi(T) = (r+k+1)^2\Pi(S)\Pi(T)$, d'où

$$h^0(\mathcal{M}_{Sp_r}, \mathcal{L}_r^k) = (2k+2r+2)^{\bar{g}\left(\frac{r+k}{2}-1\right)} \sum_{\substack{S \sqcup T = \{1, \ldots, r+k\} \\ \operatorname{card} S = r}} (\Pi(S)\Pi(T))^{-\bar{g}/2}.$$

Notons à présent que $\Pi(S)\Pi(T) = \Pi(E)/\Pi(S,T)$ (où $\Pi(S,T)$ est le produit des facteurs croisés, et que $\Pi(E) = 4(2r+2k+2)^{r+k-2}$. Ceci fait disparaître le préfacteur, et on obtient

$$h^0(\mathcal{M}_{Sp_r}, \mathcal{L}_r^k) = 2^{1-g} \sum_{\substack{S \sqcup T = \{1, \ldots, r+k\} \\ \operatorname{card} S = r}} \prod_{s \in S, t \in T} \left| 4 \sin \frac{(s-t)\pi}{2r+2k+2} \sin \frac{(s+t)\pi}{2r+2k+2} \right|^{g-1}.$$

Références

[ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 267, Springer-Verlag, New York, 1985.

[AK70] Allen Altman and Steven Kleiman, *Introduction to Grothendieck duality theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 146, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Ati90] Michael Atiyah, *The geometry and physics of knots*, Lezioni Lincee. [Lincei Lectures], Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[AB83] M. F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), no. 1505, 523–615.

[AB84] ———, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), no. 1, 1–28.

[Aud04] Michèle Audin, *Torus actions on symplectic manifolds*, Second revised edition, Progress in Mathematics, vol. 93, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[BL94] Arnaud Beauville and Yves Laszlo, *Conformal blocks and generalized theta functions*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 2, 385–419.

[Bea96] Arnaud Beauville, *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula*, Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), Israel Math. Conf. Proc., vol. 9, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1996, pp. 75–96.

[Bea06] ———, *Orthogonal bundles on curves and theta functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 5, 1405–1418, disponible à arXiv:math/0504449.

[BF97] K. Behrend and B. Fantechi, *The intrinsic normal cone*, Invent. Math. **128** (1997), no. 1, 45–88, disponible à arXiv:alg-geom/9601010.

[Bel06] Prakash Belkale, *The strange duality conjecture for generic curves* (2006), disponible à arXiv:math/0602018v2.

[Bel07] ———, *Strange duality and the Hitchin/WZW connection* (2007), disponible à arXiv:0705.0717v2.

[Ber96] Aaron Bertram, *Computing Schubert's calculus with Severi residues : an introduction to quantum cohomology*, Moduli of vector bundles (Sanda, 1994 ; Kyoto, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 179, Dekker, New York, 1996, pp. 1–10.

[Ber94] ———, *Towards a Schubert calculus for maps from a Riemann surface to a Grassmannian*, Internat. J. Math. **5** (1994), no. 6, 811–825, disponible à arXiv:alg-geom/9403007.

[BDW96] Aaron Bertram, Georgios Daskalopoulos, and Richard Wentworth, *Gromov invariants for holomorphic maps from Riemann surfaces to Grassmannians*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 529–571, disponible à arXiv:alg-geom/9306005.

[BL99] Jean-Michel Bismut and François Labourie, *Symplectic geometry and the Verlinde formulas*, Surveys in differential geometry : differential geometry inspired by string theory, Surv. Differ. Geom., vol. 5, Int. Press, Boston, MA, 1999, pp. 97–311.

[Don83] S. K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 269–277.

[DN89] J.-M. Drezet and M. S. Narasimhan, *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 53–94.

[DS95] V. G. Drinfel′d and Carlos Simpson, *B-structures on G-bundles and local triviality*, Math. Res. Lett. **2** (1995), no. 6, 823–829.

[EG98] Dan Edidin and William Graham, *Localization in equivariant intersection theory and the Bott residue formula*, Amer. J. Math. **120** (1998), no. 3, 619–636, disponible à arXiv:alg-geom/9508001.

[Fal94] Gerd Faltings, *A proof for the Verlinde formula*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 2, 347–374.

[Ful98] William Fulton, *Intersection theory*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[FGI+05] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli, *Fundamental algebraic geometry : Grothendieck's FGA explained*, Mathematical Surveys and Monographs, 123, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2005.

[GP99] T. Graber and R. Pandharipande, *Localization of virtual classes*, Invent. Math. **135** (1999), no. 2, 487–518, disponible à arXiv:alg-geom/9708001.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Hus94] Dale Husemoller, *Fibre bundles*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Int91] Kenneth Intriligator, *Fusion residues*, Modern Phys. Lett. A **6** (1991), no. 38, 3543–3556, disponible à arXiv:hep-th/9108005.

[JK98] Lisa C. Jeffrey and Frances C. Kirwan, *Intersection theory on moduli spaces of holomorphic bundles of arbitrary rank on a Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 1, 109–196, disponible à arXiv:alg-geom/9608029.

[Kac90] Victor G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Kum87] Shrawan Kumar, *Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting*, Invent. Math. **89** (1987), no. 2, 395–423.

[LS97] Yves Laszlo and Christoph Sorger, *The line bundles on the moduli of parabolic G-bundles over curves and their sections*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **30** (1997), no. 4, 499–525, disponible à arXiv:alg-geom/9507002v3.

[LP95] Joseph Le Potier, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Publications Mathématiques de l'Université Paris 7—Denis Diderot, vol. 35, Université Paris 7—Denis Diderot U.F.R de Mathématiques, Paris, 1995. With a chapter by Christoph Sorger.

[LP96] ———, *Module des fibrés semi-stables et fonctions thêta*, Moduli of vector bundles (Sanda, 1994 ; Kyoto, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 179, Dekker, New York, 1996, pp. 83–101.

[VLP85] Jean-Louis Verdier and Joseph Le Potier (eds.), *Module des fibrés stables sur les courbes algébriques*, Progress in Mathematics, vol. 54, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Papers from the conference held at the École Normale Supérieure, Paris, 1983.

[LT98] Jun Li and Gang Tian, *Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 1, 119–174, disponible à arXiv:alg-geom/9602007v6.

[MO05] Alina Marian and Dragos Oprea, *Virtual intersection on the* Quot *scheme and Vafa-Intriligator formulas* (2005), disponible à arXiv:math/0505685.

[MO06a] ———, *Counts of maps to Grassmannians and intersections on the moduli space of bundles* (2006), disponible à arXiv:math/0602335.

[MO06b] ———, *The rank-level duality for nonabelian theta functions* (2006), disponible à arXiv:math/0605097.

[Mat88] Olivier Mathieu, *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, Astérisque (1988), no. 159-160, 267.

[Mum70] David Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[NS65] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **82** (1965), 540–567.

[New72] P. E. Newstead, *Characteristic classes of stable bundles of rank* 2 *over an algebraic curve*, Trans. Amer. Math. Soc. **169** (1972), 337–345.

[OW96] W. M. Oxbury and S. M. J. Wilson, *Reciprocity laws in the Verlinde formulae for the classical groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 7, 2689–2710.

[Pop02] Mihnea Popa, *Verlinde bundles and generalized theta linear series*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 5, 1869–1898 (electronic), disponible à arXiv:math/0002017.

[Kvi85] D. Kvillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators on Riemann surfaces*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **19** (1985), no. 1, 37–41, 96.

[Ses93] C. S. Seshadri, *Vector bundles on curves*, Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992), Contemp. Math., vol. 153, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 163–200.

[ST97] Bernd Siebert and Gang Tian, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, Asian J. Math. **1** (1997), no. 4, 679–695.

[Sor00] Christoph Sorger, *Lectures on moduli of principal G-bundles over algebraic curves*, School on Algebraic Geometry (Trieste, 1999), ICTP Lect. Notes, vol. 1, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2000, pp. 1–57.

[TiBT92] Montserrat Teixidor i Bigas and Loring W. Tu, *Theta divisors for vector bundles*, Curves, Jacobians, and abelian varieties (Amherst, MA, 1990), Contemp. Math., vol. 136, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 327–342.

[TUY89] Akihiro Tsuchiya, Kenji Ueno, and Yasuhiko Yamada, *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, Adv. Stud. Pure Math., vol. 19, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 459–566.

[Uhl82] Karen K. Uhlenbeck, *Connections with L^p bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. **83** (1982), no. 1, 31–42.

[Wei38] André Weil, *Généralisation des fonctions abéliennes*, Journal de Math. Pures et Appl., IX^e série **17** (1938), 47–87.

[Wit95] Edward Witten, *The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian*, Geometry, topology, & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 357–422, disponible à arXiv:hep-th/9312104.