Géométrie plane

Rémy Oudompheng

Résumé. Ce texte vise à regrouper des résultats fondamentaux concernant la géométrie plane, à l'attention des étudiants qui s'intéressent aux Olympiades de Mathématiques ou des mathématiciens souhaitant se replonger dans la géométrie classique. Merci à Johan Yebbou qui m'a initié en premier aux secrets du triangle, et à Bodo Lass et Benjamin Scellier pour m'avoir fait redécouvrir la géométrie projective.

Table des matières

1. Géométrie affine 2
1.1. Points, vecteurs 2
1.2. Barycentres 2
1.3. Transformations affines 2
1.4. Compléments : espaces vectoriels et espaces affines 3
2. Géométrie euclidienne 3
2.1. Produit scalaire 3
2.2. Transformations du plan euclidien 4
2.3. La droite projective complexe 4
2.4. Compléments : espace euclidien, groupe orthogonal 5
3. Géométrie du triangle 5
3.1. Points remarquables dans le triangle 5
3.2. Triangles particuliers 11
3.3. Autres points remarquables 12
3.4. Isogonalité 13
4. Géométrie projective 15
4.1. Le plan projectif 15
4.2. Birapport 16
4.3. Transformations projectives 18
4.4. Complément : le groupe projectif linéaire 19
4.5. Coniques et polarité 19
4.6. Complément : formes quadratiques et coniques projectives 21
Table des figures 23
Références 23

1. Géométrie affine

1.1. Points, vecteurs. Le plan *affine* est un ensemble de *points* sans origine fixée et sans notion d'angle ou de perpendiculaire. On a toutefois, dans un plan affine, une notion de droites parallèles, et on peut définir le rapport de deux longueurs (algébriques) mesurées sur des droites de même direction.

Définition 1.1. Un *vecteur* du plan est la donnée d'un *bipoint*, c'est-à-dire un couple de points (A, B). Deux bipoints (A, B) et (D, C) représentent le même vecteur si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme, c'est-à-dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, et $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Contrairement aux points, les vecteurs n'appartiennent pas à une région précise du plan, mais représentent le déplacement entre deux points. On peut les ajouter et les multiplier par un nombre :

Définition 1.2. La somme de deux vecteurs représentés par des bipoints (A, B) et (B, C) et le vecteur représenté par le vecteur (A, C) (relation de Chasles). Si k est un nombre réel et $\overrightarrow{v}$ un vecteur représenté par un bipoint (A, B), $k\overrightarrow{v}$ est le vecteur représenté par le bipoint (A, C) où C est le point de la droite (AB) tel que $\overline{AC} = k\overline{AB}$.

On note usuellement $\overrightarrow{AB}$ le vecteur représenté par le bipoint (A, B).

1.2. Barycentres. La notion de *barycentre* permet de parler de moyenne pondérée de point. Le milieu d'un segment, le symétrique par rapport à un point, le centre de gravité d'un triangle, sont ainsi des cas particuliers de barycentre.

Définition 1.3. Soient (A_i) des points du plan (pour i entre 1 et n) et (k_i) des nombres dont la somme est non nulle. Le barycentre des A_i affectés des coefficients k_i est le point M, unique tel que

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Si O est un point fixé du plan, on peut construire le point M en remarquant que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i}\sum_{i=1}^{n} k_i\overrightarrow{OA_i}$$

Par exemple, le barycentre de points A et B affectés de coeffients a et b est le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{a+b}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB})$.

La barycentre de points définis comme barycentres de points base peut lui-même s'exprimer comme barycentre des points-base.

Proposition 1.4. Le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c), est aussi le barycentre de (A, a) et $(M, b + c)$ où M est le barycentre de (B, b) et (C, c).

1.3. Transformations affines. Les transformations affines sont les transformations préservant les structures et les propriétés du plan affine. Elles conservent ainsi les relations de barycentre, l'alignement des points, le parallélisme, et plus généralement, toutes les relations vectorielles.

Proposition 1.5. Toute transformation affine f induit sur les vecteurs une transformation *linéaire*, définie par $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

Les transformations linéaires vérifient les relations $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$.

Définition 1.6. Les *translations* sont les transformations affines représentées par les vecteurs. L'image d'un point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'unique point B tel que le bipoint (A, B) représente le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Définition 1.7. L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation définie par la relation vectorielle $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ où M' est l'image de M.

Les translations et les homothéties sont les seules transformations affines qui envoient toute droite sur une droite parallèle. La composée de deux homothéties est encore une homothétie,

1.4. Compléments : espaces vectoriels et espaces affines. La notion d'espace affine est fortement liée à celle d'un espace vectoriel : il est plus facile mathématiquement de définir formellement l'ensemble des vecteurs.

Définition 1.8. Un espace vectoriel E est un ensemble (dont les éléments sont les *vecteurs*) muni d'une opération d'addition qui en fait un groupe commutatif (on peut ajouter et soustraire, et il y a un élément nul dont l'addition est neutre), et d'une opération de multiplication par les nombres réels (les *scalaires*).

Définition 1.9. Un espace affine de direction E (où E est un espace vectoriel) est un ensemble (dont les éléments sont les points) muni d'une opération de translation par les vecteurs de E, qui vérifie des conditions de compatibilité naturelles $(M + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = M + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, tels que pour tout couple de points (M, N) il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $M + \overrightarrow{u} = N$. On dit que $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Remarque. Un espace affine est un cas particulier d'espace principal homogène pour l'action d'un groupe (ici, le groupe de l'addition de E).

2. Géométrie euclidienne

2.1. Produit scalaire. La géométrie euclidienne introduit la notion d'angle droit et permet de comparer des distances orientées dans des directions différentes. Sa formalisation mathématique passe par la notion de produit scalaire, qui permet d'exprimer de manière algébrique certaines identités, et fait apparaître de nouvelles structures.

Notre point de départ est le

Théorème 2.1 (Théorème de Pythagore). *Soit ABC un triangle rectangle en B. Alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$.*

On peut à partir de là calculer la longueur d'un vecteur arbitraire par des opérations algébriques.

Définition 2.2 (Produit scalaire). Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le produit des mesures algébriques de $\overrightarrow{u}$ et de la projection orthognale de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$.

Le produit scalaire est symétrique, et on a $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$. On peut également le calculer par la formule, plus symétrique

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}.$$

Il permet de calculer des longueurs en remarquant que $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Proposition 2.3 (Relation d'Al Kashi). Si A, B, C sont trois points quelconques du plan, on a

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, AB \cdot BC \cos \widehat{ABC}$$

Démonstration. Il faut écrire $AC^2 = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2$. □

L'utilisation de produits scalaires dans les calculs permet de démontrer facilement l'orthognalité de deux droites :

Proposition 2.4. Deux vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si ils sont portés par deux droites perpendiculaires.

2.2. Transformations du plan euclidien. On distingue les isométries, qui préservent les distances, comme les translations et les rotations, et les similitudes, qui ne préservent que l'orthogonalité (les homothéties, par exemple).

Proposition 2.5. Toute similitude s'écrit de mainère unique comme la composée d'une homothétie et d'une rotation de mêmes centres.

L'angle de la composée de deux rotations est la somme de leurs angles. Si deux rotations ont des angles opposés, leur composée est une translation.

2.3. La droite projective complexe. Le plan euclidien peut être repéré par la droite affine complexe, en choisissant un repère orthonormal, et en associant à un point de coordonnées (x, y) son affixe $z = x + iy$.

L'ajout d'un point à l'infini permet d'étudier dans un même cadre les droites et les cercles, et d'inclure naturellement d'autres transformations que les similitudes. L'objet géométrique étudié est alors la droite projective complexe. Dans la suite, le mot « cercle » désignera indifféremment un véritable cercle ou une droite (cercle passant par l'infini).

Définition 2.6. Le birapport de quatre points A, B, C, D d'affixes a, b, c, d, est le nombre

$$[A, B, C, D] = \frac{c-a}{c-d}\frac{b-d}{b-a}$$

qui vérifie $[0, 1, t, \infty] = t$.

Proposition 2.7. Soit a, b, c trois affixes de points A, B, C. Un point d'affixe z appartient au cercle circonscrit à ABC si et seulement si le birapport $[a, b, c, z]$ est réel (l'infini étant réel).

Démonstration. Cet énoncé est équivalent au théorème de l'angle inscrit. □

Théorème 2.8. *Les transformations de la droite projective complexe sont les homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Elles préservent le birapport et transforment donc les cercles en cercles.*

Parmi toutes les homographies, les similitudes sont obtenues par la formule $z \mapsto az + b$, où $|a|$ est le rapport de la similitude et $\arg a$ son angle. Les transformations indirectes sont obtenues en composant avec la conjugaison complexe.

La transformation nouvelle qui intervient est l'inversion. Une inversion de pôle O et de puissance k^2 est la transformation qui à M associe le point M' de la droite (OM) tel que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k^2$, tandis que le point O et le point à l'infini sont échangés. La formule correspondante sur la droite complexe est $z \mapsto k^2/\bar{z}$.

Une inversion de puissance p est la composée de l'inversion de puissance P et de l'homothétie de rapport p/P.

Proposition 2.9. Si la puissance de O par rapport à un cercle Γ vaut P, l'image de Γ par l'inversion de pôle O et de puissance p est aussi l'image de Γ par l'homothétie de centre O et de rapport p/P.

Démonstration. D'après la remarque précédente, il suffit de vérifier que le cercle est stable sous l'action de l'inversion de puissance P. Or si M est un point du cercle et N la seconde intersection de (OM) avec Γ, on a $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = P$, donc l'image de M est N. □

Proposition 2.10. Soit O le pôle d'une inversion de puissance Π, et M et N deux points, d'images M' et N'. Alors M, N, M', N' sont cocycliques et OMN et $OM'N'$ sont inversement semblables. De plus $M'N' = \frac{\Pi \cdot MN}{OM \cdot ON}$.

Démonstration. On a $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{ON} \cdot \overline{ON'} = P$, donc $\frac{OM}{ON} = \frac{ON'}{OM'}$. Par ailleurs

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{OM'}{ON} = \frac{\Pi}{OM \cdot ON}.$$

□

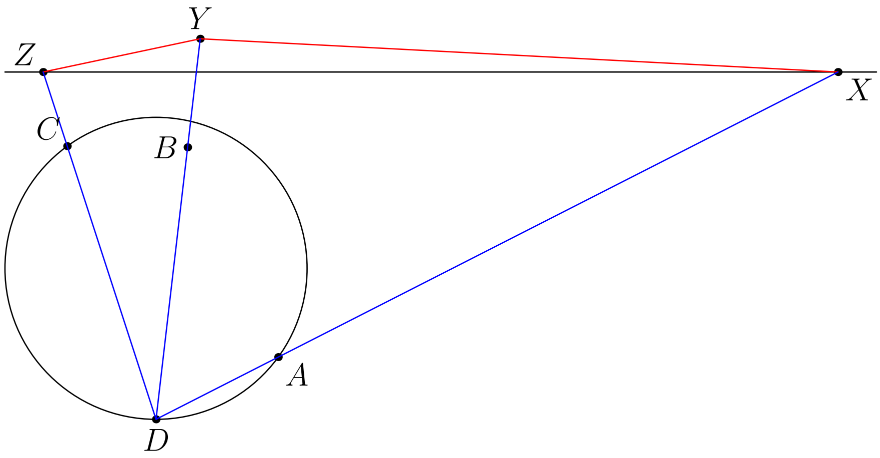

FIG. 1. Le thorème de Ptolémée et sa preuve

Théorème 2.11 (Inégalité de Ptolémée). *Soit A, B, C et D quatre points du plan. Alors*

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

avec égalité si et seulement si les points A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre (i.e. $[A, B, C, D] \geqslant 1$).

DÉMONSTRATION. Considérons une inversion de pôle D et de puissance 1. Elle envoie D à l'infini, et A, B, C sur des points X, Y, Z. On a alors $XZ \leqslant XY + YZ$ avec égalité si et seulement si X, Y, Z et l'infini sont alignés dans cet ordre, donc si et seulement si A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre.

Or

$$XZ = \frac{AC}{AD \cdot CD} \quad XY = \frac{AB}{AD \cdot BD} \quad YZ = \frac{BC}{BD \cdot CD}$$

et en multipliant l'inégalité $XZ \leqslant XY + YZ$ par $AD \cdot BD \cdot CD$, on obtient le résultat.

□

2.4. Compléments : espace euclidien, groupe orthogonal. Un espace affine euclidien, mathématiquement, est un espace affine dont l'espace vectoriel associé possède un produit scalaire vérifiant les propriétés du produit scalaire usuel.

Définition 2.12. Un espace vectoriel E *euclidien* est un espace muni d'un produit scalaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, vérifiant les propriétés de distributivité (aussi appelée bilinéarité) et de symétrie. On demande en outre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ soit strictement positif (sauf pour le vecteur nul).

Tous les espaces euclidiens de dimension donnée sont isomorphes. Le *groupe orthogonal* est le groupe des isométries d'un espace euclidien (la distance étant définie par la norme des vecteurs $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Les isométries de l'espace euclidien sont les translations, les rotations autour d'un axe, les vissages (composées d'une rotation et d'une translation le long de l'axe), les réflexions par rapport à des plans, les composées de réflexions et de translations le long des plans, et enfin, les composées d'une rotation et d'une réflexion par rapport à un plan orthogonal à son axe.

3. Géométrie du triangle

3.1. Points remarquables dans le triangle.

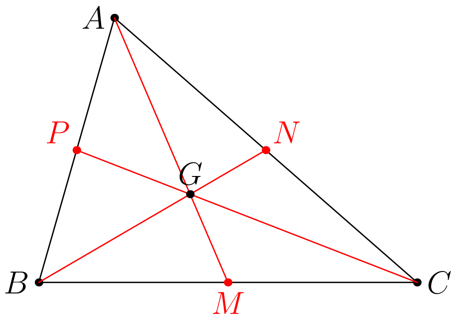

FIG. 2. Centre de gravité d'un triangle

3.1.1. *Centre de gravité.* Le *centre de gravité* d'un triangle est l'isobarycentre de ses sommets (le barycentre des trois sommets afectés du même coefficient).

Proposition 3.1. Le centre de gravité est le point d'intersection des trois médianes du triangle.

On peut retrouver cette propriété en voyant que la médiane issue d A est l'ensemble des points M tels que MAB et MAC soient des triangles de même aire.

Proposition 3.2. Si G est le centre de gravité d'un triangle et M, N, P les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, les six triangles GMB, GMC, GNC, GNA, GPA, GPB ont même aire.

3.1.2. *Orthocentre.*

Proposition 3.3. Les trois hauteurs (perpendiculaires aux côtés issues du sommet opposé) sont concourantes.

DÉMONSTRATION. La hauteur issue de A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$. Il est alors évident que si M appartient à deux hauteurs, il appartient à la troisième. Ceci revient à dire que l'axe radical des cercles de diamètres $[AB]$ et $[AC]$ est la hauteur issue de A. $\square$

L'*orthocentre* d'un triangle est le point de concours de ses trois hauteurs.

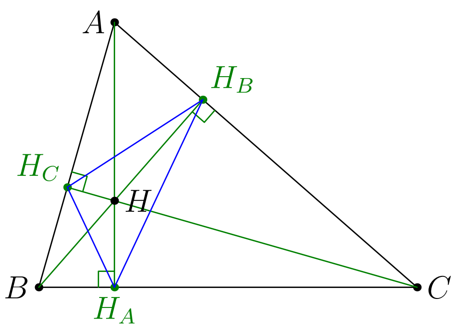

FIG. 3. Orthocentre d'un triangle

Les pieds des hauteurs forment le *triangle orthique* : c'est le seul triangle dont les sommets appartiennent aux côtés qui modélise la réflexion d'un rayon lumineux sur les côtés : les côtés du triangle ABC sont les bissectrices extérieures de $H_AH_BH_C$, et H est le centre de son cercle inscrit.

3.1.3. *Cercle circonscrit.*

Proposition 3.4. Soit ABC un triangle. Il existe un unique cercle passant par les trois sommets du triangle.

Démonstration. Soit O le point d'intersection de deux médiatrices des côtés. Alors O est à égale distance des trois sommets. Réciproquement, si O est à égale distance des trois sommets, alors O est équidistant des trois sommets. Le cercle recherché est alors le cercle de centre O et de rayon OA. □

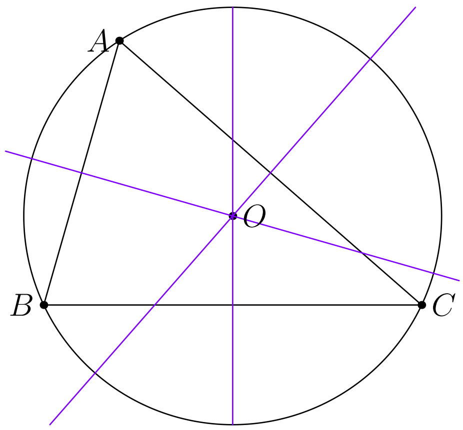

Fig. 4. Cercle circonscrit à un triangle

On appelle O le centre du cercle circonscrit (lequel désigne le cercle passant par les sommets). C'est le point de concours des trois médiatrices des côtés du triangle.

Proposition 3.5. Les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit.

Démonstration. Si α, β, γ désignent les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$, on a $\widehat{BAH} = \pi/2 - \gamma$ et $\widehat{HBA} = \pi/2 - \alpha$, d'où $\widehat{AHB} = \pi - \widehat{BAH} - \widehat{HBA} = \pi - \beta$. On en déduit que le symétrique S_C de H par rapport à (AB) vérifie $\widehat{AS_AB} = \alpha - \pi \equiv \widehat{ACB} \mod \pi$, donc A, B, C, S_C sont cocycliques. □

Proposition 3.6. Les bissectrices du triangle coupent les médiatrices des côtés opposés sur le cercle circonscrit.

Démonstration. If suffit de voir que la bissectrice de l'angle en A et la médiatrice db $[BC]$ passent toutes deux par le milieu de l'arc BC. □

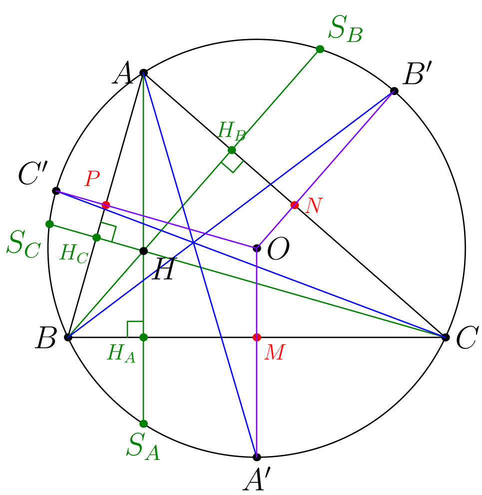

Fig. 5. Points remarquables du cercle circonscrit

Théorème 3.7 (Droites de Simson et de Steiner)**.** *Un point est sur le cercle circonscrit si et seulement si ses projetés orthogonaux sur les côtés du triangle sont alignés. On appelle leur droite la* droite de Simson *du point.*

Les symétriques d'un point du cercle circonscrit par rapport aux côtés sont alignés sur une droite passsant par l'orthocentre, la droite de Steiner.

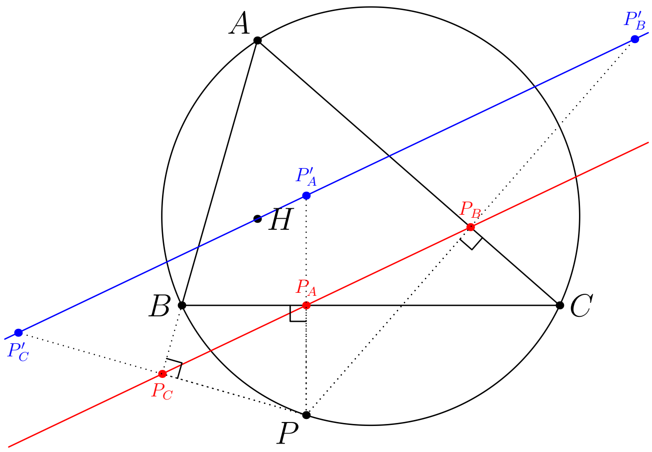

FIG. 6. Droite de Simson et droite de Steiner

DÉMONSTRATION. Soit P un point du plan. Notons P_A, P_B, P_C les projetés de P sur (BC), (CA), (AB). Puisque les angles $\widehat{PP_AC}$ et $\widehat{PP_BC}$ sont droits, les points P, C, P_A et P_B sont cocycliques.

Ainsi, $\widehat{PP_BP_A} = \widehat{PCB}$. De même, $\widehat{PP_BP_C} = \widehat{PCB}$ (à $180°$ près).

Donc si P, A, B, C sont cocycliques, il s'agit du même angle et les projetés sont alignés. Si les projetés sont alignés, les angles sont encore égaux et P, A, B, C sont cocycliques.

Par ailleurs, on sait que le symétrique S_A de H par rapport à (BC) est sur le cercle circonscrit. Si P est aussi sur le cercle, on déduit que H, B, C, P'_A sont cocycliques, où P'_A est le symétrique de P par rapport à (BC). On calcule ainsi $\widehat{BP'_AH} = \widehat{BCH} = \pi/2 - \beta$. De même $\widehat{BP'_CH} = \pi/2 - \beta$, et comme B est le centre du cercle circonscrit à $PP'_AP'_C$, $\widehat{P'_APP'_C} = 2\widehat{P'_APP'_C} = 2\beta$ car les points P, B, P_A, P_C sont cocycliques. □

3.1.4. *Cercles inscrits et exinscrits.*

Proposition 3.8. Il existe 4 cercles tangents aux trois droites portant les côtés du triangle.

DÉMONSTRATION. Le point d'intersection de deux bissectrices (intérieures ou extérieures) à deux angles du triangle est à égale distance de deux paires de droites, donc à égale distance des trois droites : c'est donc le centre d'un cercle tangent aux trois droites.

Mesurons les distances positivement du côté de l'intérieur du triangle et négativement à l'extérieur. Les bissectrices intérieures correspondent à la relation $d_i = d_j$ où d_k est la distance à la droite k, tandis que les bissectrices extérieures correspondent à la relation $d_i + d_j = 0$. On obtient alors 4 relations possibles : $d_1 = d_2 = d_3$, $d_1 = d_2 = -d_3$, $d_1 = -d_2 = d_3$ et $-d_1 = d_2 = d_3$ (on peut changer le signe de tous les membres pour obtenir les 4 autres). □

On appelle *cercle inscrit* le cercle intérieur au triangle, et *cercles exinscrits* les trois autres. On peut noter que $I_AI_BI_C$ (le triangle formé par les centres des cercles exinscrits) est le triangle dont ABC est le triangle orthique, et I est son orthocentre.

La configuration suivante présente de nombreuses propriétés :

Proposition 3.9. Soit ABC un triangle, A' le milieu de l'arc BC sur le cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit et I_A le centre du cercle exinscrit dans l'angle A. Le point A' est

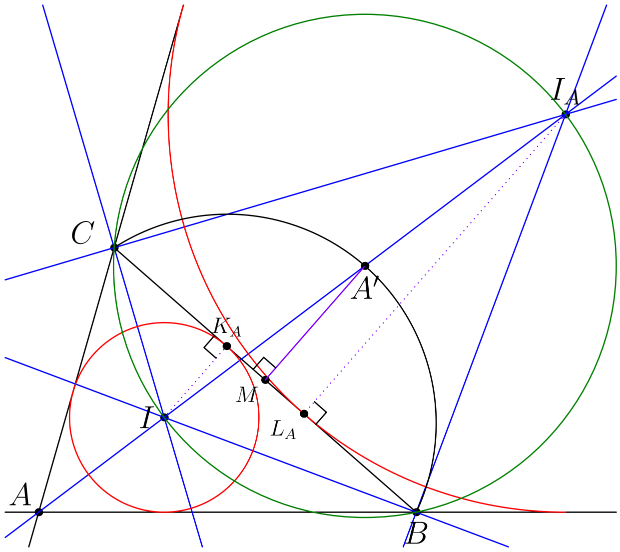

FIG. 7. Autour du milieu de l'arc...

équidistant de B, C, I, I_A, et les points de contact des cercles inscrits et exinscrits sur la droite (BC) sont équidistants du milieu M de (BC).

DÉMONSTRATION. Les points I, B, C, I_A sont cocycliques à cause des angles droits en B bt C. Comme ICI_A est un triangle rectangle en C, il suffit de montrer que A' est sur la médiatrice de $[IC]$ pour montrer que c'est le milieu de l'hypoténuse. On est donc ramenés à montrer que $IA'C$ est isocèle en A'. L'angle $\widehat{CA'I}$ vaut β, et l'angle $\widehat{ICA'}$ intercepte la moitié de l'arc CB et la moitié de l'arc CA. Il vaut donc $\pi/2 - \beta$, ce qui conclut.

Enfin, par projection orthogonale sur $[BC]$, M est le milieu de K_AL_A puisque A' est le milieu de II_A. □

3.1.5. *Cercle d'Euler.*

Théorème 3.10. *Soit ABC un triangle. Il existe un cercle, le* cercle d'Euler, *passant par les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$. Son centre est au milieu de $[OH]$, et on a*
$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$
La droite passant par O, G et H est appelée droite d'Euler.

DÉMONSTRATION. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Elle envoie les sommets du triangle sur les milieux des côtés opposés, et le cercle circonscrit sur le cercle recherché, dont le rayon est $R/2$. Elle envoie les hauteurs du triangle ABC sur les hauteurs du triangle MNP formé par les milieux des côtés, qui ne sont autres que les médiatrices du triangles ABC donc O est l'orthocentre de MNP et H est envoyé sur O. Ceci démontre que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ et que le centre du cercle d'Euler est le mielieu de $[OH]$.

Maintenant considérons l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ qui envoie le cercle circonscrit sur un cercle de rayon $R/2$ centré au milieu de $[OH]$, c'est-à-dire sur le cercle d'Euler. Elle envoie les symétriques de H par rapport aux côtés (qui sont sur le cercle circonscrit) sur ses projetés : ce sont les pieds des hauteurs, et ils sont sur le cercle d'Euler. De même, elle envoie les sommets sur les miieux de $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$. □

Théorème 3.11 (Théorème de Feuerbach)**.** *Le cercle d'Euler est tangent aux cercles inscrits et exinscrits.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'inversion ι de pôle M (le milieu de $[BC]$) de puissance la puissance de M par rapport au cercle inscrit. Le cercle inscrit est laissé fixe, et le cercle

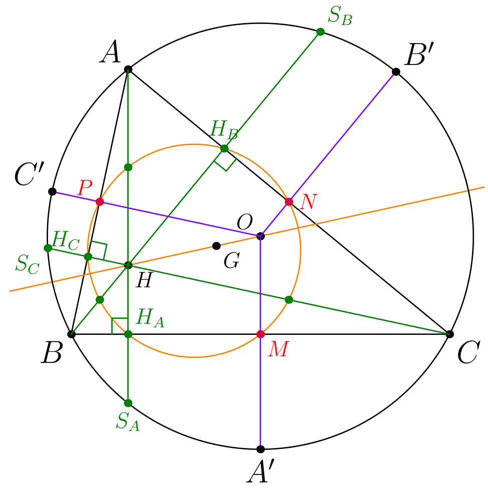

FIG. 8. Le cercle et la droite d'Euler

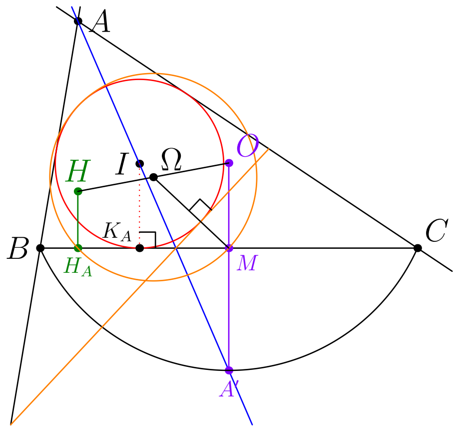

FIG. 9. Le théorème de Feuerbach

d'Euler est envoyé sur une droite Δ perpendiculaire à $M\Omega$, où Ω est le milieu de $[OH]$, qui est le centre du cercle d'Euler. On peut remarquer que comme M est le milieu de la tangente commune aux deux cercles inscrits dans l'angle $\widehat{A}$, M est sur l'axe radical des deux cercles, et l'inversion ι laisse également fixe le cercle exinscrit.

On doit donc montrer que le cercle d'Euler est envoyé sur une droite tangente aux deux cercles, et la seule candidate est la symétrique de (BC) par rapport à la bissectrice (cette symétrie préserve les deux cercles, donc la droite image leur est encore tangente).

L'homothétie de centre G de rapport $-1/2$ envoie le triangle HAO sur $OM\Omega$, donc

$$\widehat{OM\Omega} = \widehat{HAO} = \alpha - 2(\pi/2 - \beta) = \beta - \gamma.$$

Soit D le pied de la bissectrice issue de A. La différence $\widehat{ADC} - \widehat{ADB}$ vaut également $\beta - \gamma$, donc $(M\Omega)$ est bien perpendiculaire à Δ, puisque (OM) est perpendiculaire à (BC) et que chaque paire de droites forme le même angle.

Alors il suffit de montrer que $\iota(H_A) = D$ pour démontrer que le cercle d'Euler est envoyé sur Δ, car D est sur Δ et Δ est perpendiculaire à $M\Omega$.

On doit donc montrer que $MK_A^2 = MD \cdot MH_A$, où H_A est le pied de la hauteur et K_A le point de contact du cercle inscrit. Ceci revient à montrer que $A'I^2 = A'D \cdot A'A$, en projetant sur la bissectrice perpendiculairement à (BC). On peut réécrire l'égalité à démontrer comme $A'D/A'B = A'B/A'A$ puisque $A'I = A'B$. Or les triangles $A'BD$ et $A'BA$ sont semblables, puisqu'ils partagent l'angle en A' et que $\widehat{A'BD} = \widehat{A'AB} = \alpha/2$.

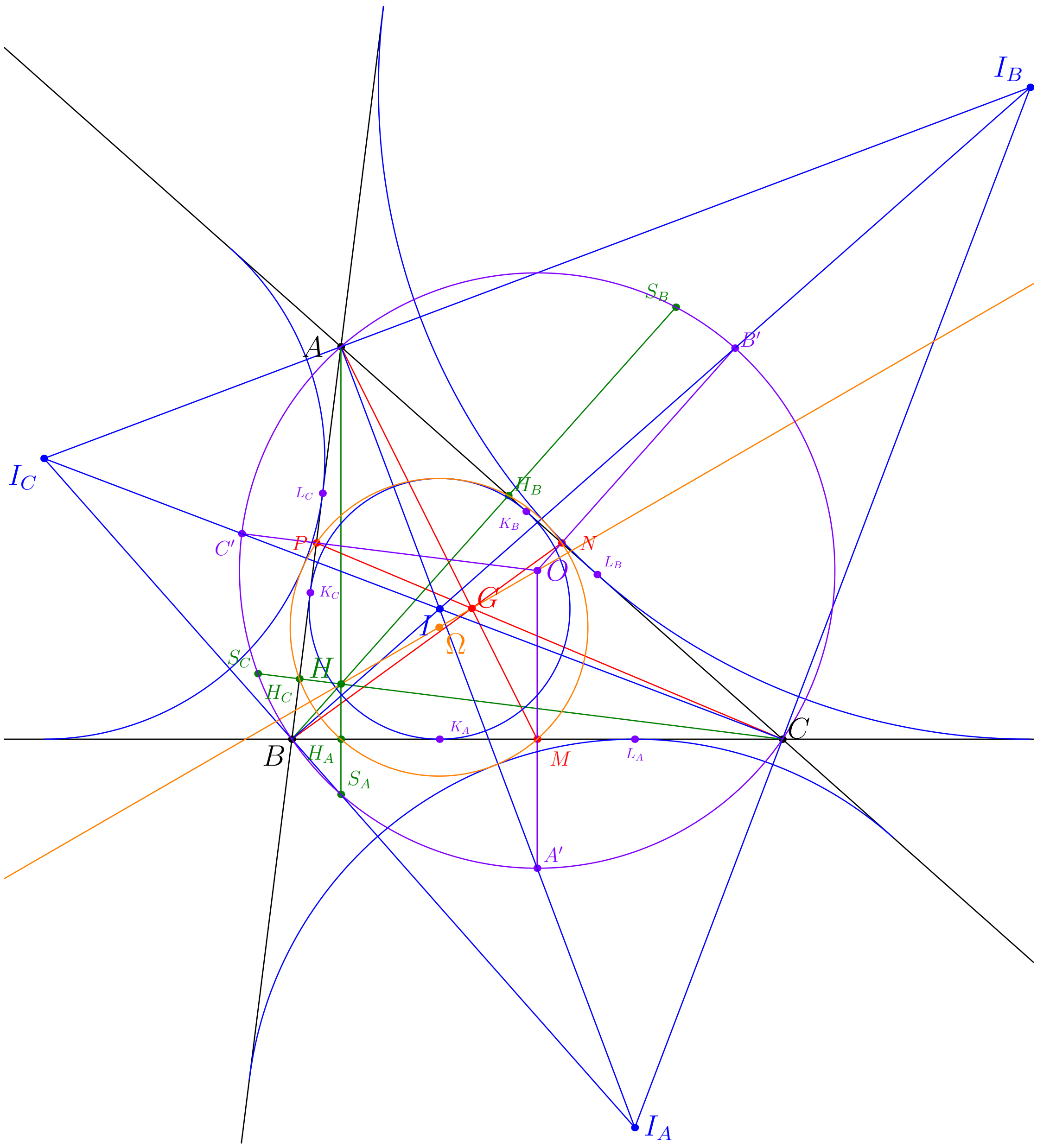

FIG. 10. Le triangle quelconque et ses points remarquables

Donc le cercle d'Euler est envoyé sur Δ, qui est tangente aux deux cercles inscrits, ce qui signifie que le cercle d'Euler lui-même leur est tangent. □

3.1.6. *Récapitulatif.* La figure 10 récapitule les différents points remarquables du triangle. Les points K_A, K_B, K_C sont les points de contact du cercle inscrit, tandis que L_A, L_B, L_C sont ceux des cercles exinscrits.

3.2. Triangles particuliers.

3.2.1. *Triangle rectangle.* Un triangle *rectangle* est un triangle possédant un angle droit. Les médiatrices des côtés de l'angle droit soont donc en fait les droites des milieux et le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. Ceci permet de montrer qu'un angle inscrit dans un cercle est la moitié de l'angle au centre. L'orthocentre est le sommet qui porte l'angle droit.

3.2.2. *Triangle isocèle.* Un triangle isocèle possède deux côtés de même longueur. En particulier, la hauteur, la bissectrice, la médiane et la médiatrice associées au sommet sont confondus. En revanche, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit, du cercle circonscrit et le centre de gravité sont différents si le triangle n'est pas équilatéral. La droite d'Euler est donc également confondue avec toutes ces droites.

3.2.3. *Triangle équilatéral.* Le triangle équilatéral est celui dont les trois côtés sont de même longueur. Toutes les droites et points remarquables classiques sont confondues, le cercle d'Euler et le cercle inscrit sont confondues.

Proposition 3.12. Soit ABC un triangle équilatéral. La somme des distances aux trois côtés d'un point M situé à l'intérieur du triangle ne dépend pas de M.

Démonstration. Soit O le centre du triangle, N et P les images de M par les rotations de centre O et d'angles $2\pi/3$ et $-2\pi/3$. Alors $d(M, AB) + d(M, BC) + d(M, CA) = d(M, AB) + d(P, AB) + d(N, AB) = 3d(O, AB)$. □

Proposition 3.13. Soit ABC un triangle équilatéral, et M un point du plan. Alors $MA+MB \geqslant MC$ avec égalité si et seulement si M est sur l'arc AB du cercle circonscrit au triangle.

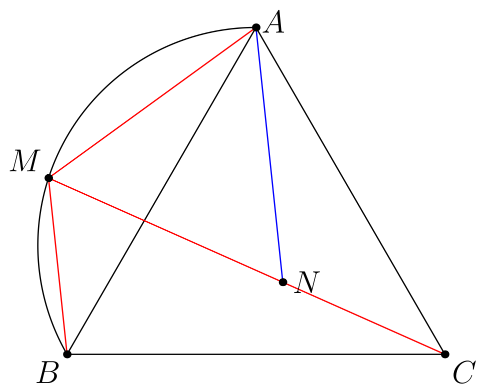

Fig. 11. Le triangle équilatéral

Démonstration. Soit N l'image de M par la rotation de centre A qui envoie B sur C. Alors $MA + MB = MN + NC \geqslant MC$ par l'inégalité triangulaire (remarquer que ANM est équilatéral). L'égalité a lieu si et seulement si N est sur le segment $[CM]$, c'est-à-dire si $\widehat{ANC} = \widehat{AMB} = 2\pi/3$, c'est-à-dire si M est sur l'arc AB. □

3.3. Autres points remarquables.

Proposition 3.14 (Point de Fermat ou de Torricelli)**.** Soit ABC un triangle acutangle. Il existe un unique point, intérieur au triangle qui minimise la quantité $MA+MB+MC$. On a de plus $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA}$, et le point recherché est le point de concours des droites joignant un sommet au sommet du triangle équilatéral construit à l'extérieur du côté opposé.

Démonstration. Des considérations analytiques permettent de montrer qu'un tel point forme des angles de $2\pi/3$ avec les côtés. De façon plus géométrique, construisons sur les côtés des triangles équilatéraux ABT_C, BCT_A, CAT_B. On a alors $MA+MB+MC \geqslant MA+MT_A \geqslant AT_A$. Le minimum sera atteint si M se trouve sur les trois droites simultanément et si M forme des angles de $2\pi/3$ avec les côtés.

Soit F le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux ABT_C et BCT_A. Alors $\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = 2\pi/3$. Donc $\widehat{CFA}$ mesure également $2\pi/3$, et on en déduit que F se situe sur le dernier cercle circonscrit. Par ailleurs, par cocyclicité, on a $\widehat{AFT_B} = \widehat{T_BFC} = \pi/3$, et de même pour les 4 autres angles en F, d'où l'on déduit que les droites AT_A, BT_B, CT_C sont concourantes en F.

On a de plus $FA + FB + FC = AT_A = BT_B = CT_C$. □

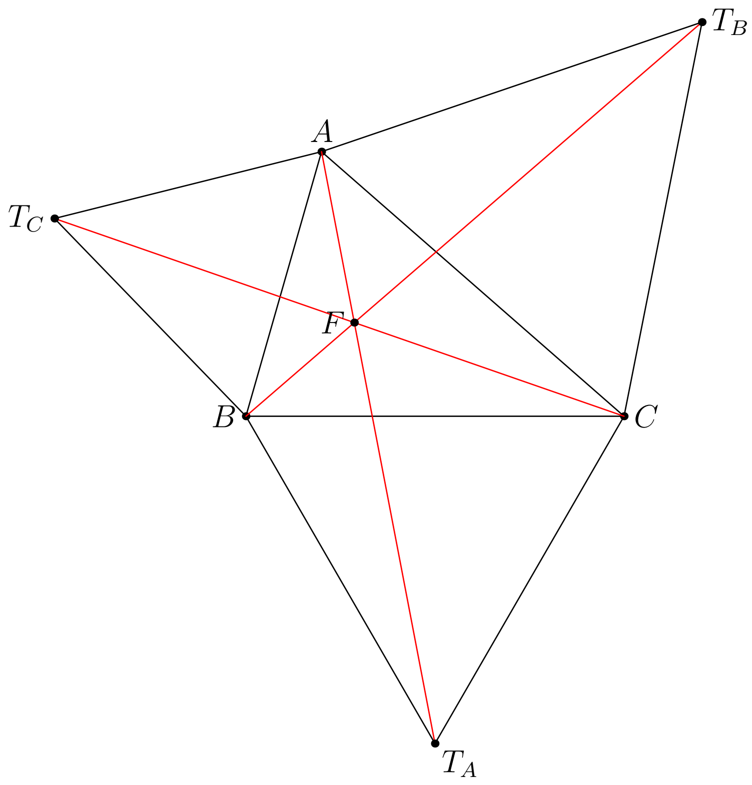

FIG. 12. Le point de Fermat-Torricelli

3.4. Isogonalité.

3.4.1. *Propriétés fondamentales.*

Proposition 3.15. Soit ABC un triangle, et M un point du plan. Les symétriques des droites (AM), (BM), (CM), par rapport aux bissectrices des angles en A, B, C (dites droites isogonales de (AM), (BM), (CM)) sont concourantes en un point N, dit *isogonal* à M. La relation d'isogonalité est symétrique.

L'exemple le plus instructif de points isogonaux est le couple (O, H) (l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit). Le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits sont isogonaux à eux-mêmes. La transformation isogonale associe à un point celui qui est son isogonal.

On peut également donner une autre définition, qui au lieu de considérer les symétriques par rapport aux bissectrices considère les droites coupant le côté opposé symétriquement par rapport au milieu. Cette notion d'isogonalité est invariante par transformations affines et correspond en coordonnées barycentriques à la transformation $(x, y, z) \mapsto (yz, zx, xy)$.

Proposition 3.16. Si M et N sont deux points isogonaux dans un triangle ABC, leurs six projetés sur les côtés sont cocycliques sur un cercle dont le centre est le milieu de $[MN]$.

DÉMONSTRATION. Notons M_A, M_B les projetés de M sur (BC) et (CA). On note de même N_A et N_B les projetés de N. Les quadrilatères CM_AMM_B et CN_ANN_B sont inversement semblables. On a donc $CM_A \cdot CN_A = CM_B \cdot CN_B$, et les angles $\widehat{CM_AM_B}$ et $\widehat{CN_BN_A}$ sont égaux, c'est-à-dire que $N_A\widehat{M_AM_B}$ et $N_A\widehat{N_BM_B}$ sont supplémentaires, donc M_A, M_B, N_A, N_B sont cocycliques. $\square$

Dans le cas particulier de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit, on retrouve le cercle d'Euler, et le cercle adéquat pour les centres des cercles inscrits et exinscrits.

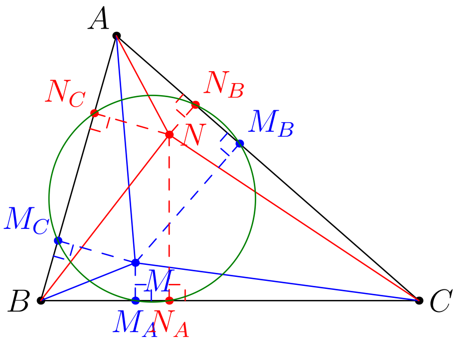

FIG. 13. Cercle des 6 points associé à des points isogonaux

Proposition 3.17. Si P est un point du cercle circonscrit, les droites isogonales aux droites (AP), (BP) et (CP) sont les perpendiculaires à la droite de Simson de P passant par les sommets.

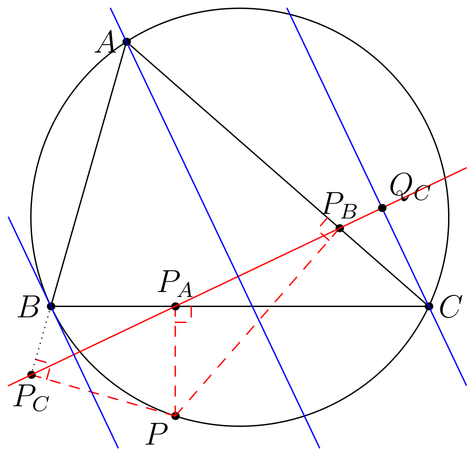

FIG. 14. Isogonal d'un point du cercle circonscrit

DÉMONSTRATION. Soient P_A et P_B les projetés de P sur (BC) et (AC). On appelle Q_C le point d'intersection entre la droite de Simson de P et l'isogonale de (CP). Les points PP_AP_BC étant cocycliques, $\widehat{P_APC} = \widehat{QP_BC}$, et comme (CQ) est isogonale de (CP), $\widehat{QCP_B} = \widehat{P_ACP}$. Les triangles PP_AC et PQP_B sont donc semblables, et (CQ) est perpendiculaire à (P_AP_B).

Un raisonnement similaire montre que les autres isogonales sont perpendiculaires à la droite de Simson. □

3.4.2. *Compléments : action de l'isogonalité sur le plan projectif.* Les coordonnées barycentriques fournissent une identification du plan projectif avec le plan projectif standard $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, en envoyant un point sur ses coordonnées barycentriques à un facteur multiplicatif près.

L'intérêt de travailler sur le plan projectif permet de définir correctement l'isogonal d'un point du cercle circonscrit comme le point à l'infini dans la direction orthogonale à la droite de Simson. La transformation isogonale envoie le point de coordonnées barycentriques $[x : y : z]$ sur le point de coordonnées $[a^2yz : b^2zx : c^2xy]$ (où a, b, c sont les longueurs des côtés). On en déduit une équation du cercle circonscrit en coordonnées barycentriques : c'est l'ensemble des points dont l'image est sur la droite à l'infini $x + y + z = 0$, donc son équation est

$$a^2xy + b^2yz + c^2zx = 0.$$

La transformation isogonale n'est pas à proprement parler une transformation du plan projectif, car les sommets du triangle n'ont pas d'image bien défini, et les côtés du triangle sont tous envoyés sur le sommet opposé. Le bon domaine de définition de cette transformation est l'éclaté du plan projectif en les trois sommets du triangle. Il s'agit du plan projectif où l'on a remplacé chaque sommet du triangle par une collection de points indiquant une direction.

Ceci permet de définir correctement l'isogonal d'un point M de la droite (BC). D'après la définition naïve, ce devrait être A, mais sur l'éclaté du plan, il s'agit du point A précisé par la direction de l'isogonale de (AM). Réciproquement, un point A précisé par une direction Δ a pour image le point de (BC) situé sur l'isogonale de Δ.

En coordonnées barycentriques, on doit imaginer que les coordonnées ne peuvent plus avoir qu'une seule composante nulle, mais ont le droit à une composante infinie. Ainsi les sommets, qui avaient pour coordonnées $[1 : 0 : 0]$ sont remplacés par des points de la forme $[\infty : y : z]$ et les coordonnées $[y : z]$ (définies à une constante près) indiquent la direction du point par rapport à A.

La transformation isogonale échange alors les trois droites projective paramétrant les directions possibles aux sommets avec les trois droites représentant les côtés opposés.

4. Géométrie projective

4.1. Le plan projectif. La droite projective complexe tire sa structure de l'existence d'une droite réelle, qui permet de fabriquer tous les cercles par l'intermédiaire de similitudes et d'inversions. Elle n'est cependant pas le bon cadre pour un certain nombre de problèmes, notamment parce que deux droites quelconques s'y coupent en deux points (un dans le plan et un à l'infini), et que toutes les droites sont concourantes.

Dans le plan projectif, deux droites distinctes se coupent en un et un seul point. L'ensemble des droites du plan projectif forme également un plan projectif, et on peut par *dualité* à partir d'un énoncé obtenir son dual où les points prennent la place des droites et réciproquement. Ainsi, deux points distincts sont sur une et une seule droite.

Le théorème de Desargues est emblématique de la géométrie projective. Son énoncé est auto-dual : il reste le même après échange des points et des droites.

Théorème 4.1 (Théorème de Desargues)**.** *Deux triangles du plan projectif sont en perspective axiale (les points d'intersection de côtés correspondants sont alignés) si et seulement si ils sont en perspective centrale (les droites reliant les sommets correspondants sont concourantes).*

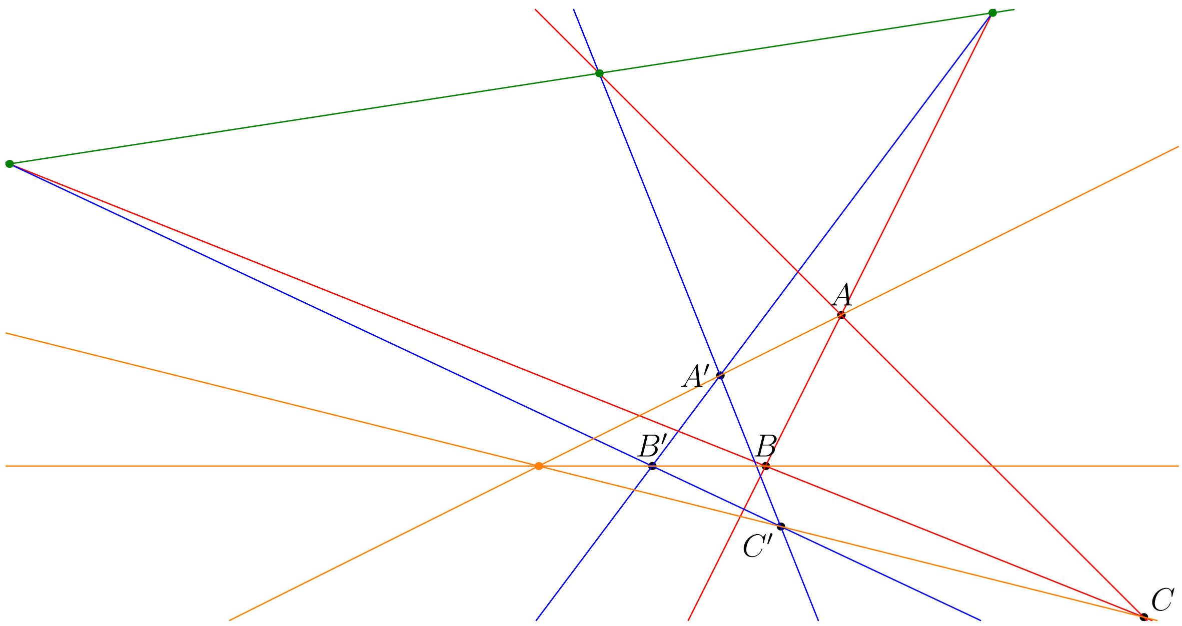

FIG. 15. Le théorème de Desargues

Démonstration. Fixons dans l'espace à trois dimensions une origine et un plan P n'y passant pas. Alors par projection centrale à partir de l'origine, on peut obtenir tout point du plan projectif $\bar{P}$ qui contient P (les points à l'infini étant obtenus par projection parallèlement à P).

Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ de l'espace sont en perpective centrale de centre O, alors (AB) et $(A'B')$ sont dans le plan (OAB) et se coupent donc. Leur point d'intersection est sur la droite d'intersection des plans (ABC) et $(A'B'C')$. Les 3 points obtenus de la sorte sont donc alignés.

Supposons les triangles en projection centrale dans le plan projectif, avec un point de concours X. On plonge le plan dans un espace à trois dimensions, et on cherche des triangles en projection centrale (non coplanaires) se projetant sur les triangles de départ par la projection de centre O (où O est un point arbitraire choisi à l'extérieur du plan).

Pour cela, il suffit de remplacer C et C' par des points qui s'y projettent, situés à l'extérieur du plan. Choisissons une droite extérieure au plan se projetant sur (CC') : n'importe quelle droite Δ du plan (OCC') passant par X convient. On y place Γ et Γ' intersections de (OC) et (OC') avec Δ. Alors $AB\Gamma$ et $A'B'\Gamma'$ sont en perspective centrale par rapport à X, ils sont donc en perspective axiale, et par projection à partir de O sur P, il en est de même des triangles initiaux. □

4.2. Birapport.

4.2.1. *Définitions.*

Définition 4.2. Le *birapport* de 4 points sur une droite est le nombre

$$[A, B, C, D] = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{BD}}{\overline{CD} \cdot \overline{BA}}$$

Proposition 4.3. Trois point étant fixés, un choix de birapport fixe la position du quatrième.

Proposition 4.4. Étant données 4 droites concourantes Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 en un point O, le birapport des 4 points d'intersections avec une droite D ne passant pas par O est indépendant du choix de D. On note $[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4]$ ce nombre.

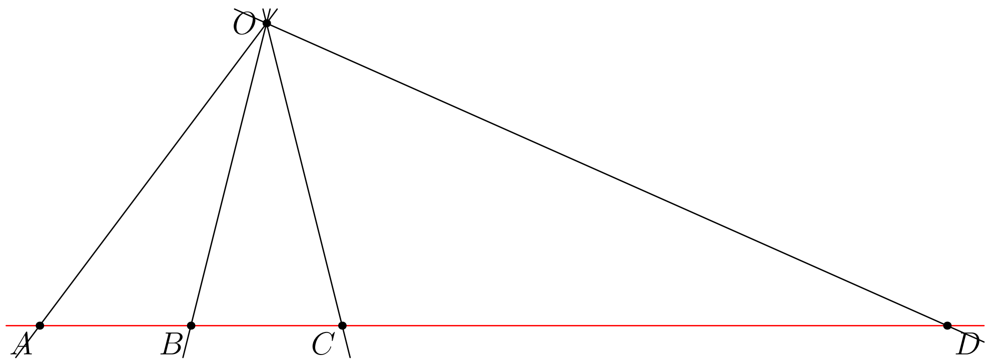

Fig. 16. Calcul du birapport de 4 droites

Démonstration. Si O est un point à l'infini, les quatre droites sont parallèles, et les rapports étant constants, les birapports le sont *a fortiori*.

Si O est dans le plan, on peut munir le plan de sa structure euclidienne : on pourra ainsi exprimer le birapport en termes d'angles. Soient A, B, C, D quatre ponts d'une droite (projective) et O un point externe. La loi des sinus donne $AC = \sin \widehat{AOC} \frac{OA}{\sin \hat{C}}$, d'où

$$\frac{CA}{CD} = \frac{\sin \widehat{COA}}{\sin \widehat{COD}} \frac{OA}{OD}$$

On en déduit

$$[A,B,C,D] = \frac{\sin\widehat{COA}}{\sin\widehat{COD}}\frac{\sin\widehat{BOD}}{\sin\widehat{BOA}}$$

qui ne dépend effectivement pas de la position de la droite portant A, B, C, D. □

On peut encore définir le birapport de 4 points sur un cercle. C'est un cas particulier de birapport de points sur une conique, mais pour le cas particulier des cercles, on obtient une définition qui permet de relier la géométrie projective à la géométrie euclidienne, comme pour les droites.

Proposition 4.5. Soit A, B, C, D quatre points cocycliques. Le birapport des points A, B, C, D est défini comme le birapport des droites (MA), (MB), (MC), (MD), où M est un point quelconque du cercle. Cette définition ne dépend pas du choix du point M. Si deux points sont confondus, on convient le droite qui les relie est la tangente au cercle.

De plus, on a

$$[A,B,C,D] = \frac{CA\cdot BD}{CD\cdot BA}$$

où les distances sont affectées des signes adéquats selon la position relative des points sur le cercle.

Démonstration. Soit M un point quelconque du cercle. Alors le birapport des droites (MA), (MB), (MC), (MD) vaut

$$\frac{\sin\widehat{CMA}}{\sin\widehat{CMD}}\frac{\sin\widehat{BMD}}{\sin\widehat{BMA}}.$$

Mais la relation des sinus nous apprend également que $\sin\widehat{CMA} = AC/\mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est le diamètre du cercle. On obtient ainsi la définition métrique du birapport de points sur un cercle, qui ne dépend manifestement pas du point M. □

Remarque. Cette définition coïncide avec la définition du birapport de points sur un cercle dans la droite projective complexe.

Proposition 4.6. Une projection centrale d'une droite sur une droite préserve les birapports, une projection centrale d'un cercle sur une droite (centrée sur un point du cercle) aussi.

Remarque. Selon les permutations des 4 objets, le birapport peut prendre la valeur λ, $1-\lambda$, $1/\lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $1-1/\lambda$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$. Il est préservé lorsqu'on permute les arguments par paires.

4.2.2. *Divisions harmoniques.*

Définition 4.7. On dit que 4 objets sont en division harmonique si leur birapport est égal à -1.

Puisque le birapport dépend de l'ordre des objets, le birapport d'objets en division harmonique peut aussi valoir 2 ou $1/2$.

Proposition 4.8. Quatre points distincts A, B, C, D sur une droite sont harmoniques si et seulement si $BA/BD = CA/CD$.

Proposition 4.9. Quatre points distincts A, B, C, D sur une droite sont harmoniques si et seulement si il existe un point O extérieur à la droite tel que (OA) et (OD) soient les bissectrices de l'angle $\widehat{BOC}$.

Démonstration. Le théorème de la bissectrice nous donne $AB/AC = -OB/OC$ et $DB/DC = OB/OC$. Réciproquement, si les points sont en division harmoniques, il existe un point O tel que (OA) soit la bissectrice de $\widehat{BOC}$ (l'ensemble des points O qui conviennent est le cercle d'Apollonius de diamètre $[AD]$), et (OD) est alors automatiquement l'autre bissectrice (utiliser l'expression du birapport par des sinus). □

4.3. Transformations projectives. Une transformation projective est une tranformation qui envoie les droites projectives sur des droites projectives. Elle possède la propriété de préserver le birapport de 4 points sur une droite.

Définition 4.10. Une *perpective*, ou *projection centrale*, est la transformation du plan projectif induite par la projection à partir d'un point de l'espace (éventuellement à l'infini) d'un plan sur un autre.

Proposition 4.11. Étant données deux droites du plan projectif, il existe une perspective envoyant l'une sur l'autre. De plus, si on marque trois points sur la première droite et trois points sur la seconde, on peut exiger que la perspective envoie dans l'ordre les trois points de la première sur les trois points de la seconde.

Démonstration. Plongeons la plan projectif dans l'espace de deux façons, de sorte à placer d'une part la première droite, d'autre part la seconde droite dans un plan fixé $\mathcal{P}$. Alors la projection centrale de centre un point quelconque de $\mathcal{P}$ situé en dehors des deux droites induit sur le plan projectif une transformation projective qui envoie bien la première droite sur la seconde. Une telle transformation est appelée une *perspective*.

Soient A, B, C les points marqués sur la première droite et D, E, F les points marqués sur la seconde. On note O le centre de la projection centrale, et on veut placer la seconde droite de sorte que si A' est l'intersection avec (OA), B' avec (OB) et C' avec (OC), $B'C'/B'A' = EF/ED$. Il suffit alors d'une homothétie de centre O pour retrouver les bonnes longueurs.

Or

$$\frac{B'C'}{B'A'} = \frac{OC' \sin \widehat{BOC}}{OA' \sin \widehat{BOA}}$$

Il suffit donc de choisir judicieusement C' et A', ce qui est manifestement possible. □

Proposition 4.12. Toute transformation projective peut s'écrire comme la composée d'une perspective et d'une transformation projective préservant la droite à l'infini, et trois points fixés à l'infini.

Démonstration. Soit f une transformation projective, I, J, K trois points fixés à l'infini, et p une perspective envoyant I, J, K, sur $f(I)$, $f(J)$, $f(K)$. Alors f est la composée de p et de $p^{-1} \circ f$. □

Proposition 4.13. Une transformation projective préservant 3 points à l'infini est la composée d'une homothétie-translation et d'une transformation projective préservant 3 points à l'infini et deux points alignés suivant l'une de ces 3 directions.

Démonstration. Soient X et Y deux points alignés avec l'un des points fixes à l'infini. Leurs images sont encore alignés avec ce point à l'infini, donc (XY) et $(f(X)f(Y))$ sont parallèles, et on peut trouver une homothétie-translation h envoyant X, Y sur $f(X)$, $f(Y)$, et f est la composée de h avec une transformation projective laissant fixes trois points à l'infini et les points X, Y. □

Proposition 4.14. Une transformation projective préservant 2 points à l'infini et deux points fixés X et Y (et donc un troisième point à l'infini correspondant à la direction de (XY)) est l'identité.

Démonstration. L'existence de deux points X et Y sur un axe (qui reste fixe), permet de définir une abscisse valant 0 en X et 1 en Y et associe à la transformation f une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui associe à m, l'abscisse de M le nombre $f(m)$ qui est l'abscisse de $f(M)$.

La droite à l'infini étant préservée par f, f en voie des droites parallèles sur des droites parallèles. Pour plus de commodité, on peut supposer que les trois axes sont l'axe horizontal, vertical et diagonal. par projection, on peut définir une graduation sur les deux autres axes, et celle-ci subit exactement la même transforamtion sous l'action de f. Si on repère les points par leurs coordonnés dans le repère usuel, l'image de (x, y) est $(f(x), f(y))$. Puisque

f préserve les parallèles, on a de plus $f(xy) = f(x)f(y)$ en utilisant le théorème de Thalès : on a proportionnalité entre $[1, f(x)]$ et $[f(y), f(xy)]$.

La projection sur l'axe diagonal, puis sur l'axe vertical, puis sur l'axe horizontal, permet de démontrer que $f(-x) = f(x)$.

Enfin, plaçons le point d'abscisse x et le point d'abscisse y sur les axes horizontaux et verticaux. Alors l'axe diagonal partant de x coupe l'axe horizontal de y au point $(x + y, y)$ qui se projette verticalement au pont $(x + y)$. Cette construction étant préservée, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. D'où l'on déduit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'identité. □

En conclusion, les seules transformations projectives sont les composées de perspectives et de transformations affines.

4.4. Complément : le groupe projectif linéaire. On peut donner une construction plus algébrique du plan projectif, qui permet d'étudier ses symétries de manière plus systématique.

Définition 4.15. Le plan projectif $\mathbb{P}^2$ est l'ensemble des droites de l'espace à trois dimensions, passant par une origine fixée. Une droite du plan projectif est un plan de l'espace à trois dimensions.

On retrouve la vision du plan projectif comme plan affine complété par une droite à l'infini, en choisissant un plan affine de l'espace à 3 dimensions, et en associant à chaque droite qui ne lui est pas parallèle le point d'intersection avec le plan. Les droites parallèles au plan définissent les points à l'infini.

Les transformations projectives sont celles qui préservent les plans de l'espace : le *groupe projectif linéaire* est le groupe des transformations linéaires de l'espace à homothétie près (les homothéties n'ont aucun effet sur les droites). On le note PGL_3, pour le plan projectif.

Il est d'usage de repérer le plan projectif par ses coordonnées homogènes $[x : y : z]$, qui représentent la droite passant par le point (x, y, z). On y retrouve un plan affine $[x : y : 1]$ et une droite à l'infini $[x : y : 0]$ qui est une droite projective (repérée par deux coordonnées homogènes).

Les transformations projectives linéaires sont donc des homographies, qui s'écrivent

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

que l'on écrit généralement sous forme d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La compositions de transformations projectives se traduit sur leurs matrices par la multiplication.

4.5. Coniques et polarité. On sait que tout énoncé de géométrie projective admet un dual. Les coniques permettent de réaliser de manière effective cette dualité, en définissant une bijection canonique entre points et droites, la *polarité*, telle que le point polaire de la droite passant par deux points est exactement l'intersection des droites polaires de ces deux points.

Définition 4.16. Une conique est une courbe du plan projectif obtenue par section d'un cône de révolution par un plan. Un *cône* de révolution est la surface décrite par une droite tournant autour d'un axe qui la coupe.

Proposition 4.17. Les différentes coniques obtenues par section d'un cône fixé se déduisent les unes des autres par une projection centrale de centre le sommet du cône. En particulier, toute conique peut être envoyée sur un cercle par une transformation projective.

Ceci permet de définir la notion de birapport de 4 points sur une conique, qui se définit également comme birapport des 4 droites issues d'un point donné sur la conique.

Définition 4.18. On définira la polarité par rapport à un cercle, le cas général s'en déduisant par transformations projectives. Considérons le plan affine comme le plan euclidien, et le cercle défini par l'équation $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = R^2$. La droite polaire d'un point X est l'ensemble des Y tels que $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY} = R^2$, et le point polaire d'une droite est l'unique X tel que $\overrightarrow{OX} \cdot OY = R^2$ pour tous les Y de la droite.

La polarité échange points et droites, et vérifie des propriétés naturelles vis-à-vis de la structure du plan projectif.

Proposition 4.19. Un point P est sur la polaire d'un point Q si et seulement si Q est sur la polaire de P. Le point polaire d'une droite (MN) est l'intersection des polaires de M et N.

On peut obtenir d'autres caractérisations plus géométriques de la polarité.

Proposition 4.20. Un point P et une droite Δ sont polaires par rapport à une conique si et seulement si les points d'intersection de Δ avec la conique sont ceux où la tangente à la conique passe par le point P.

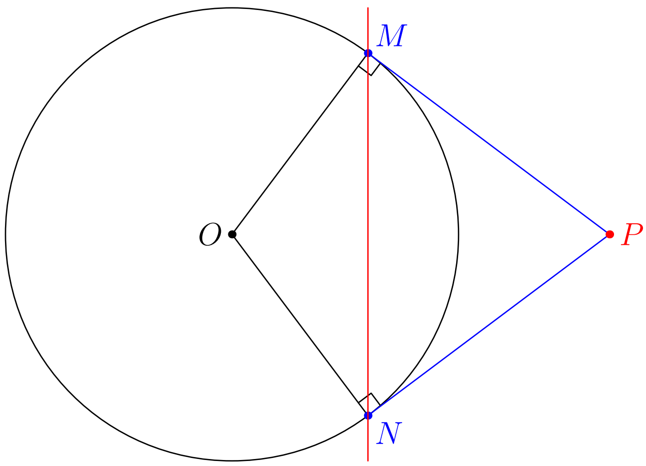

FIG. 17. Polarité par rapport à un cercle

DÉMONSTRATION. Soient M et N les points de tangence avec le cercle des droites issues de P. Alors $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = OM^2 = R^2$ puisque OMP est rectangle en M. On a un calcul identique pour N, et la polaire de P est la droite (MN). □

Proposition 4.21. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans une conique, X et Y les sommets restants du quadrilatère complet, et Z l'intersection de (AC) et (BD) (figure 18). Alors les points X, Y, Z sont les polaires des droites (YZ), (ZX), (XY). L'énoncé dual donne un résultat analogue pour un quadrilatère complet circonscrit à une conique.

DÉMONSTRATION. Soit T l'intersection des diagonales (AC) et (XY). On note U le point d'intersection de la tangente en A avec (XY), et V le point d'intersection de la tangente en C avec (XY).

On veut montrer que Z a pour polaire (XY). Comme Z est l'intersection de (AC) et (BD), il suffit de montrer que les polaires de ces deux droites sont sur la droite (XY). Avec les notations introduites plus haut, le polaire de (AC) est le point d'intersection des tangentes en A et C, et il est sur (XY) si et seulement si $U = V$.

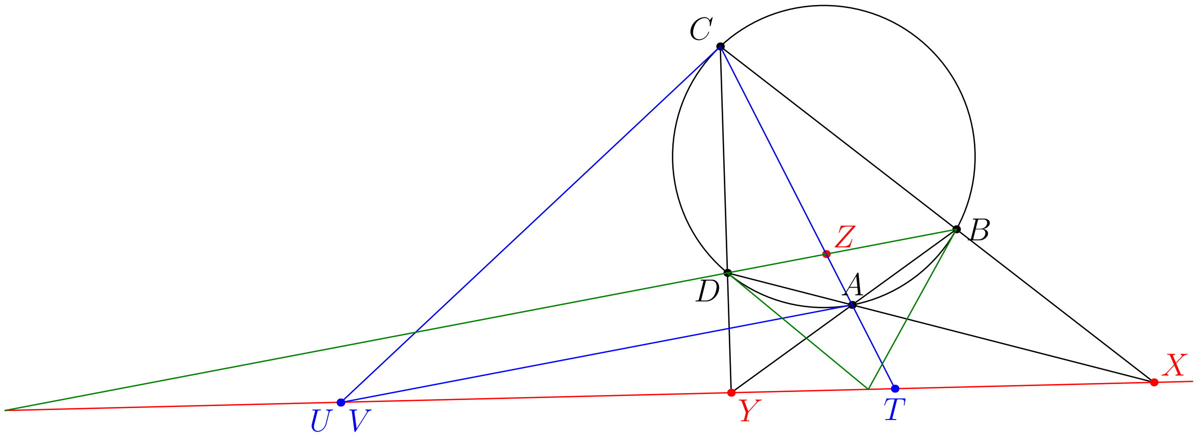

FIG. 18. Polarité dans un quadrangle complet inscriptible

Or la projection de centre A de la conique sur la droite envoie A, B, C, D respectivement sur U, Y, T, X, et la projection de centre C les envoie sur T, X, V, Y. On a donc

$$[U, X, T, Z] = [A, B, C, D] = [T, Z, V, X] = [V, X, T, Z]$$

donc $U = V$.

Un raisonnement similaire tient pour le polaire de (BD). Enfin, les permutations de X, Y, Z sont obtenues en échangeant deux sommets du quadrilatère. □

Remarque. On a en fait, dans la preuve, démontré le cas particulier du théorème de Pascal pour les triplets de points (A, B, C) et (C, D, A), qui donne l'alignement de X, Y et U.

Théorème 4.22 (Théorème de Pascal). *Soit (A, B, C) et (D, E, F) deux triplets de points d'une conique. Alors les intersections de (AE) et (BD), de (BF) et (CE), de (CD) et (AF) sont alignées.*

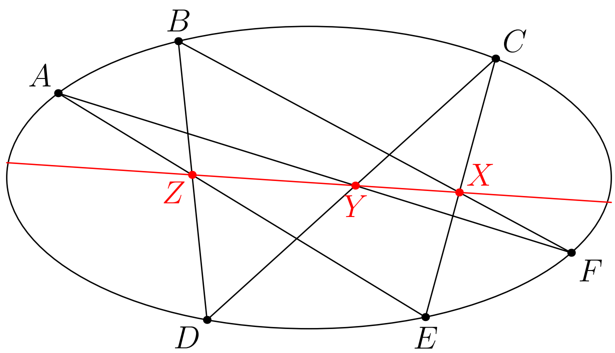

FIG. 19. Théorème de Pascal

DÉMONSTRATION. Notons X l'intersection de (BF) et (CE), Y l'intersection de (CD) et (AF), Z l'intersection de (AE) et (BD). On veut montrer que les droites (XZ), (AF) et (CD) sont concourantes. Soit Y_1 le point d'intersection de (AF) et (XZ) et Y_2 celui de (CD) et (XZ). □

4.6. Complément : formes quadratiques et coniques projectives. Dans la vision du plan projectif comme ensemble des droites de l'espace à trois dimensions, les coniques sont les courbes définies par une équation homogène de degré 2. Or, l'algèbre linéaire (théorème de Sylvester, réduction de Gauss) nous apprend qu'à une constante multiplicative près, et à transformation linéaire près, tout polynôme homogène de degré 2 en trois variables est soit de la forme $x^2 + y^2 - z^2$, soit de la forme $x^2 + y^2 + z^2$. Le premier est l'équation d'un cône, qui par projection sur un plan redonne les fameuses *sections coniques*, le second l'équation de l'origine, qui ne donne rien. C'est ainsi que l'on voit qu'il n'existe à transformation projective près qu'une seule conique.

On retrouve l'équation de la conique du plan affine (sans les points à l'infini), en posant, par exemple, $z = 1$ dans l'équation.

Un polynôme homogène q de degré 2 (une *forme quadratique*) donne naturellement naissance à une forme bilinéaire : si

$$q(v = (x, y, z)) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$$

on pose

$$b(v, v') = axx' + byy' + czz' + d(yz' + zy') + e(zx' + xz') + f(xy' + yx')$$

Deux vecteurs v et v' sont dits orthogonaux (pour q) si $b(v, v') = 0$.

La polarité est en fait la transformation associant à une droite de l'espace son plan orthogonal. Ainsi, si on considérait la polarité par rapport à la conique d'équation homogène $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, deux points seraient polaires si et seulement si les droites issues du centre de projection étaient orthogonales.

Table des figures

1 Le thorème de Ptolémée et sa preuve 5
2 Centre de gravité d'un triangle 6
3 Orthocentre d'un triangle 6
4 Cercle circonscrit à un triangle 7
5 Points remarquables du cercle circonscrit 7
6 Droite de Simson et droite de Steiner 8
7 Autour du milieu de l'arc... 9
8 Le cercle et la droite d'Euler 10
9 Le théorème de Feuerbach 10
10 Le triangle quelconque et ses points remarquables 11
11 Le triangle équilatéral 12
12 Le point de Fermat-Torricelli 13
13 Cercle des 6 points associé à des points isogonaux 14
14 Isogonal d'un point du cercle circonscrit 14
15 Le théorème de Desargues 15
16 Calcul du birapport de 4 droites 16
17 Polarité par rapport à un cercle 20
18 Polarité dans un quadrangle complet inscriptible 21
19 Théorème de Pascal 21

Index

barycentre, 2
bipoint, 2
birapport, 4

centre de gravité, 6
cercle
  circonscrit, 6
  d'Euler, 9
  exinscrit, 8
  inscrit, 8
conique, 19

division harmonique, 17
droite
  d'Euler, 9
  de Simson, 8, 13
  de Steiner, 8

espace affine, 3
espace euclidien, 5
espace principal homogène, 3
espace vectoriel, 3

forme quadratique, 22

hauteur, 6
homothétie, 3

inversion, 4
inégalité
  de Ptolémée, 5
isogonal, 13

médiane, 6

orthocentre, 6

plan projectif, 14
point, 2
  de Fermat, 12
  de Torricelli, 12
polarité, 20
produit scalaire, 3

théorème
  de Feuerbach, 9
  de Pascal, 21
translation, 2
triangle
  équilatéral, 12
  isocèle, 11
  rectangle, 11
triangle orthique, 6

vecteur, 2
  somme, 2

Références

Audin, Michèle, *Géométrie*, Collection Mathématiques, vol. 34, Belin, 1998.
Sortais, Yvonne and René Sortais, *La géométrie du triangle. Exercices résolus.*, Collection Formation des Enseignants et Formation Continue. Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1429, Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts, 1987.