Université de Nice-Sophia-Antipolis
Année universitaire 2008/2009
Licence 1, option *Nombres réels*
Feuille de TD numéro 8

Exercice 1 (La série harmonique)**.** On continue l'étude de la série harmonique commencée dans le TD7. On note

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

On a vu que la suite H_n était croissante mais pas majorée. Elle tend donc vers $+\infty$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$H_n = \log n + \gamma + o(1)$$

où γ est un nombre réel et $o(1)$ désigne un terme qui tend vers zéro.

On s'intéresse à la suite auxiliaire

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

On a vu que $v_n \geq \frac{1}{2}$, et on a vu que v_n était croissante et majorée, sa limite étant $\log 2$. On pose aussi

$$\mathcal{V}_n = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On admettra que $\mathcal{V}_n$ tend aussi vers $\log 2$.

a) Montrer que $H_{2^n} = 1 + \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{n-1}$ pour tout entier $n > 0$. En déduire que H_{2^n}/n est une suite convergente et déterminer sa limite. (*On utilisera le théorème de Cesàro : si* (u_n) *est une suite convergente, la suite définie par la formule* $\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$ *est aussi convergente et a la même limite.*)

b) Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe un entier k tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Montrer qu'alors

$$\frac{H_{2^k}}{(k+1)\log 2} < \frac{H_n}{\log n} < \frac{H_{2^{k+1}}}{k \log 2}.$$

En déduire que la suite $H_n/(\log n)$ a une limite, et que cette limite est 1.

c) Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

On pourra par exemple étudier le sens de variation des fonctions $1/x - \log(1+1/x)$ et $1/(x+1) - \log(1+1/x)$.

d) En déduire que les suites $H_n - \log n$ et $H_{n-1} - \log n$ convergent vers la même limite, notée γ.

e) Donner une méthode permettant de calculer la valeur de γ avec 3 chiffres significatifs. Évaluer le nombre d'opérations nécessaires, avec cette méthode, pour calculer les 100 premiers chiffres de γ. (*Une valeur approchée de* γ *est* 0,5772156649. *Source : Wikipédia.*)

Le nombre γ s'appelle la *constante d'Euler*. Il n'y a pas de formule simple permettant de l'exprimer directement.