Université de Nice-Sophia-Antipolis
Année universitaire 2008/2009
Licence 1, option *Nombres réels*
Feuille de TD numéro 7bis

Test de connaissances

Les solutions seront disponibles à l'adresse `http://math.unice.fr/~oudomphe/textes/cours/TD7bcouleur.pdf`

1 Syntaxe et logique

1.1. Les phrases suivantes sont-elles *vraies*, *fausses* ou *ne veulent rien dire* ?

- Il existe un réel x tel que pour tout réel y, $x < y$.
- Il existe un réel y tel que l'ensemble des réels $x < y$.
- Pour tout réel x il existe un réel y tel que $y < x$
- Si $a < b$ et $b > c$, alors $a > c$.
- Si $a < b$ et $a > c$, alors $b > c$.
- La suite $(1/n)$ est un réel strictement positif.
- On a $x^2 \geq 0$, donc il existe un réel y tel que $y < x^2$.
- Soit x un réel : pour tout réel y, $y < x^2$.

1.2. Soit x un nombre réel : est-ce que *la phrase est vraie si $x < 1$*, *si la phrase est vraie alors $x < 1$*, *ni l'un ni l'autre* ?

- $x^2 < 1$
- $1 - x > 0$ (vert et rouge)
- $x^2 - x < 0$
- Tout entier naturel est supérieur à x.
- L'intervalle $]-\infty, x[$ a une borne supérieure.
- $\frac{2x-3}{x-2} > 1$

1.3. Dire si les nombres suivants sont *entiers*, *rationnels* ou *ni l'un ni l'autre*.

- 4
- $3/5$
- $\sqrt{2}$
- la limite de la suite $(1/n)$
- le nombre $\frac{n+3}{n+2}$ pour un entier positif n
- le nombre $\frac{2n+4}{n+2}$ pour un entier positif n
- $5 + \sqrt{2}$
- $(5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2})$
- $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$
- $(3/\sqrt{18})^4$

2 Bornes supérieure et inférieure

2.1. Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure ?

- $[0, 1]$
- $[0, 1[$
- $\mathbb{N}$
- l'ensemble des termes de la suite $(1/n)$
- l'ensemble des termes de la suite $(-1/n)$
- l'ensemble des termes de la suite $\left(n + \frac{1}{n}\right)$
- l'ensemble des termes de la suite $(\sqrt{n} - n)$
- l'ensemble des nombres tels que $2x - x^2 > 0$
- l'ensemble des nombres tels que $2x + x^2 > 0$

2.2. On considère l'ensemble E des rationnels compris entre 0 et $3\sqrt{7}$. Est-ce que les phrases suivantes sont vraies *si x est un majorant de E*, *si x est la borne supérieure de E*, *si x=4* ?

- x est positif (vert, rouge, noir)
- $x < 10$ (rouge, noir)
- si $y < x$, y n'est pas un majorant de E (rouge, noir)
- x appartient à E
- il existe un élément de E compris strictement entre x et $3\sqrt{7}$
- $x = 3\sqrt{7}$

3 Démonstrations

3.1. On veut montrer que la suite $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$ converge. Dire si les preuves proposées sont *justes*, *fausses*, ou *incomplètes* :

- On a $(2n+3)(n+2) > (2n+5)(n+1)$ donc (u_n) est décroissante, de plus (u_n) est minorée.
- On a $\frac{2n+3}{n+1} < \frac{2n+3}{n} = 2 + 3/n$, et $2 + 3/n$ est une suite convergente.
- On a $\frac{2n+3}{n+1} < \frac{2n+3}{n} = 2 + 3/n$, et la différence tend vers zéro : les suites sont adjacentes, et on sait que $2 + 3/n$ converge.
- La fonction $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et n converge vers $+\infty$.
- On a $u_n - 2 = 1/(n+1)$ et $1/(n+1)$ tend vers zéro.
- Soit ε un réel positif. Si $N < \varepsilon$, alors $2N + 3 < 3 + 2\varepsilon$ et $N + 1 < 1 + \varepsilon$ donc $u_n < 3 + 3\varepsilon$.

4 Suites

4.1. Dire si les suites sont *croissantes*, *décroissantes*, *ni l'un ni l'autre* (ici les suites commencent à $n = 1$) :

- $n^2 + n + 1$
- $n^2 - n + 1$
- $(3n+1)/(2n+1)$
- $(3n-1)/(2n-1)$
- $(3n-3)/(2n-3)$
- $(\sqrt{5} - 1)^n$
- $(\sqrt{2} - 1)^n$
- $(\sqrt{3} - 2)^n$

4.2. Dire si les suites *ont une limite*, *tendent vers $\pm\infty$*, *ni l'un ni l'autre* :

- n^2
- $1/n^2$
- $(-1)^n$
- $(-1/2)^n$
- $(n+1)^3 - n^3$
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- $\frac{3n+2+n^2}{n+1}$
- $\frac{3n+2}{n+1}$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$