Université de Nice-Sophia-Antipolis
Année universitaire 2008/2009
Licence 1, option *Nombres réels*
Feuille de TD numéro 5

Exercice 1 (La suite logistique). On étudie le *modèle logistique* d'évolution d'une population. En l'an 0, la population d'une ville est de u_0. Chaque année, la population augmente avec un taux $a < 1$, mais se réduit proportionnellement à un taux b qui reflète l'impact de la criminalité et des autres effets néfastes de la surpopulation.

Ceci se traduit par la relation

$$u_{n+1} = (1 + a)u_n - bu_n^2$$

où u_n est la population en l'an n.

Pour les applications numériques, on posera $u_0 = 1000$, $a = 0,02$ *(soit 2%) et* $b = 10^{-6}$.

1. *a)* Montrer que si $0 < u_n < a/b$, alors $u_{n+1} > u_n$.
   b) Montrer que $a - bu_{n+1} = (a - bu_n)(1 - bu_n)$. En déduire que $0 < u_n < a/b$ pour tout n, en utilisant par exemple une récurrence sur n.
   c) En déduire que la suite u_n est croissante. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

2. Le maire de la ville souhaite construire suffisamment de logements pour répondre aux besoins de sa population à très long terme (et même, éternellement). On va montrer que le nombre de logements nécessaires est la borne supérieure de (u_n), qui vaut $a/b = 20000$.
   a) Montrer que $1 - bu_n \leq 0.999$ pour tout n.
   b) On note $\ell = a/b$. Montrer que $(\ell - u_{n+1}) \leq (\ell - u_n) \times 0,999$ pour tout n. On pourra utiliser la réponse à la question *1.b)*.
   c) Application numérique : sachant que $0,999^{300} < 3/4$, montrer qu'au bout de 1000 ans, la population aura dépassé 10000.
   d) Donner un nombre d'années à partir duquel la population aura dépassé 19000.
   e) Montrer que pour tout $P < 20000$, il existe n tel que $u_n > P$. En déduire que (u_n) a pour borne supérieure ℓ : pourquoi faut-il absolument 20000 logements pour répondre aux besoins ?

3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Que peut-on dire de cette limite ?

Exercice 2 (Méthode de Newton pour le calcul de racines carrées). Soit A un réel positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 = A$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{A}{u_n}).$$

1. Montrer que pour tout n, on a $u_{n+1} > \sqrt{A}$. On pourra notamment s'inspirer de la relation $\frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{xy}$ (appelée *inégalité arithmético-géométrique*).

2. On note $v_n = u_n - \sqrt{A}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, et montrer que $v_{n+1} < v_n/2$.

3. En déduire que (u_n) a pour limite $\sqrt{A}$.

4. Dans le cas où $A = 3$, montrer que $v_1 < 1/2$ et que u_{10} est une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près.

5. On suppose que $A \geq 1$. Montrer que

$$\frac{v_{n+1}}{2} \leq \left(\frac{v_n}{2}\right)^2$$

6. En déduire, pour $A = 3$, que u_{10} est en fait une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-300} près (en remarquant que $v_1/2 < 1/4$).

Exercice 3 (L'équation de Pell-Fermat)**.** L'*équation de Pell-Fermat* est l'équation

$$p^2 - 2q^2 = 1$$

1. Montrer que si (p, q) est une solution de l'équation de Pell-Fermat, on a

$$\sqrt{2} \leq \frac{p}{q} \leq \sqrt{2} + 1/q^2$$

2. Montrer que si (p, q) vérifient l'équation, alors $(p^2 + 2q^2, 2pq)$ aussi. On définit ainsi une suite $p_1 = 3$, $q_1 = 2$, puis $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$ et $q_{n+1} = 2p_nq_n$.
3. Montrer que $2q_{n+1} > (2q_n)^2$. En déduire que la suite $u_n = p_n/q_n$ tend vers $\sqrt{2}$.
4. Montrer que $2q_n > 2^{2^n}$ pour tout n. En déduire que u_{10} est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-300} près.
5. Vérifier que la suite u_n n'est autre que la suite u_n de l'exercice précédent dans le cas $A = 2$.

Exercice 4 (Méthode de Newton pour le calcul de racines cubiques)**.** Soit $A = a^3$ un réel positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 = A$ et

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{u_n^2}\right).$$

1. Montrer que pour tout n, on a $u_{n+1} > \sqrt[3]{A}$. On pourra utiliser la relation $(2x + y)/3 \geq \sqrt[3]{x^2y}$ (généralisation de l'*inégalité arithmético-géométrique*).
2. On note $v_n = u_n - \sqrt[3]{A}$. Montrer que pour tout n, on a

$$v_{n+1} = v_n\frac{(2v_n^2 + 3av_n)}{3(v_n + a)^2}$$

3. En déduire que $v_{n+1} < \frac{2}{3}v_n$, et que u_n converge vers $\sqrt[3]{A}$.