Université de Nice-Sophia-Antipolis
Année universitaire 2008–2009
Licence 1, option *Nombres réels*

Interrogation numéro 2, 15 octobre 2008. Corrigé.

Remarques. **Il est important de s'efforcer autant que possible de faire des *phrases*, et en particulier des phrases ayant un sens en français (ou plus généralement dans une des langues des interlocuteurs, y compris lorsqu'il s'agit de symboles mathématiques).**

Dans le même esprit, il faut éviter d'écrire seulement des formules les unes après les autres : comment peut-on savoir s'il y a un rapport entre ces différentes formules ? Est-ce que ces formules font partie d'un raisonnement ? Est-ce que ce sont les conséquences de quelque chose qu'on a écrit avant ?

Exercice 1. Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ qui suivent : donner l'ensemble de ses majorants ; dire si elle admet une borne supérieure et la donner le cas échéant ; dire si elle admet un plus grand élément et le donner le cas échéant.

i) $[0; 5\sqrt{2}]$;
ii) $[0; 5\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$;
iii) $[0; \sqrt{19}] \cap \mathbb{N}$;
iv) $[0; 5\sqrt{2}] \cup]17532, +\infty[$;
v) $\{5 - 3/n^2\}_{n \in \mathbb{N}^*}$;
vi) $\{5 + 3/n^2\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Remarques. On demandait des justifications pour le *ii)* et le *v)*. Dans ce corrigé, on les donnera toutes à titre d'exemple.

Avant de commencer, il est bon de rappeler les définitions et propriétés concernant les notions en question. Un *majorant* d'un ensemble de réels E est un nombre M supérieur à tous les éléments de E.

Si un ensemble **non vide** possède des majorants, on dit qu'il est *majoré*, et dans ce cas, l'ensemble des majorants est de la forme $[S, +\infty[$: S est le plus petit majorant et s'appelle la *borne supérieure*. Il n'est pas utile pour le moment d'étudier des ensembles vides.

Si un ensemble n'a pas de majorants, l'ensemble des majorants est vide (on note l'ensemble vide $\varnothing$). Dans ce cas, il n'y a pas de borne supérieure. **Il faut éviter de répondre $\varnothing$ à la question *Quelle est la borne supérieure ?*.** Cela voudrait dire que la borne est $\varnothing$ (ce qui ne veut pas forcément dire grand chose), alors qu'il n'y en a pas, c'est tout.

Lorsqu'on demande l'ensemble des majorants, les articles définis *le* et *les* (*le* ensemble de *les* majorants) signifient qu'on demande de donner la liste de *tous* les majorants : si on n'explique pas pourquoi il n'y a pas d'autres majorants, on a seulement donné *un* ensemble *de* majorants.

Habituellement, on dit qu'un nombre *est dans* un ensemble ou *appartient à* cet ensemble, et pas qu'il est *inclus* ou *compris* dedans.

Si dans un ensemble on peut trouver un élément qui est plus grand que tous les autres, on dit que c'est *le plus grand élément*. En général, il n'y en a pas. Mais s'il y en a un, c'est aussi la borne supérieure de l'ensemble.

Pour finir, rappelons que la notion de borne supérieure recouvre deux cas de figure : il s'agit soit d'un plus grand élément, soit d'un nombre *limite* (on dit un *point d'accumulation*). C'est un nombre qui n'est pas dans l'ensemble, mais il existe des éléments de l'ensemble dans n'importe quel intervalle autour de ce nombre.

Solution. i) L'intervalle $[0; 5\sqrt{2}]$ possède un plus grand élément qui est $5\sqrt{2}$: en effet, tout nombre compris entre 0 et $5\sqrt{2}$ est inférieur à $5\sqrt{2}$. Par conséquent, $5\sqrt{2}$ est aussi la borne supérieure de cet ensemble, et on en déduit que l'ensemble des majorants est $[5\sqrt{2}, +\infty[$.

ii) La notation $[0; 5\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ désigne l'intersection entre $[0; 5\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des nombres rationnels), c'est-à-dire les nombres qui sont à la fois compris entre 0 et $5\sqrt{2}$ et rationnels.

Cet ensemble n'a pas de plus grand élément. En effet, si R était le plus grand élément de cet ensemble, R serait un rationnel entre 0 et $5\sqrt{2}$, et comme $5\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, on aurait $R < 5\sqrt{2}$. Mais comme on peut trouver un autre rationnel S entre R et $5\sqrt{2}$, R n'est pas le plus grand.

Un raisonnement similaire montre que $5\sqrt{2}$ est le plus petit majorant, donc la borne supérieure. Si on considère un nombre plus petit, qu'on note m, on sait que $m < 5\sqrt{2}$, donc on peut trouver un nombre rationnel R entre m et $5\sqrt{2}$. On sait même qu'il existe un nombre *positif* entre m et $5\sqrt{2}$: par exemple $|R|$. Comme ce nombre est rationnel et dans $[0; 5\sqrt{2}]$, m ne peut pas être un majorant, car il faudrait que $m > |R|$. On en déduit que l'ensemble des majorants est $[5\sqrt{2}; +infty[$.

iii) La notation $[0; \sqrt{19}] \cap \mathbb{N}$ désigne l'ensemble les nombres entre 0 et $\sqrt{19}$ qui sont des entiers naturels. Un entier positif n est inférieur à $\sqrt{19}$ si et seulement si $n^2 \leqslant 19$: cet ensemble contient donc les nombres 0, 1, 2, 3, et 4. Le plus grand de ces nombres est 4, qui est donc aussi la borne supérieure, et les majorants de cet ensemble sont les éléments de $[4, +\infty[$.

iv) L'ensemble $[0; 5\sqrt{2}] \cup]17532, +\infty[$ contient les nombres entre 0 et $5\sqrt{2}$, ainsi que les nombres supérieurs à 17532.

Cet ensemble n'a pas de majorant : en effet, si M est un nombre réel quelconque, on peut trouver un nombre X supérieur à 17532 et supérieur à M (on peut par exemple prendre le plus grand nombre parmi $M + 1$ et 17533). Ce nombre X appartient à l'ensemble étudié, et il est plus grand que M, donc M n'est pas un majorant.

L'ensemble des majorants est donc $\varnothing$. Il n'y a donc ni borne supérieure, ni plus grand élément (s'il y en avait, ce seraient automatiquement des majorants).

v) Les nombres $5 - 3/n^2$ quand n est un entier naturel non nul, sont tous inférieurs à 5. Il n'y a pas de plus grand élément parmi eux : en effet, quel que soit l'entier n, on a $5 - 3/n^2 < 5 - 3/(n+1)^2$, donc $5 - 3/n^2$ ne peut pas être le plus grand.

Par contre, 5 est leur borne supérieure : en effet, 5 est plus grand que tous ces nombres, et si on considère un nombre plus petit, noté $5 - \varepsilon$ (où ε est un nombre positif), on peut trouver un nombre de la forme $5 - 3/n^2$ supérieur à $5 - \varepsilon$. Il suffit pour cela de choisir un entier naturel n tel que $n^2 > \varepsilon/3$. L'ensemble des majorants est $[5, +\infty[$.

(Le symbole ε est la lettre «epsilon» de l'alphabet grec.)

vi) Les nombres $5 + 3/n^2$ quand n est un entier naturel non nul, sont inférieurs à 8 : en effet, il est toujours vrai que $3/n^2 \leqslant 3$, donc $5 + 3/n^2 \leqslant 8$. Le nombre $5 + 3/1^2 = 8$ est un élément de l'ensemble en question, donc c'est le plus grand élément. C'est donc aussi la borne supérieure, et les majorants forment l'ensemble $[8, +\infty[$.

Remarques. Éviter d'écrire le symbole ∞ autant que possible. Il n'est en général utilisé que pour écrire les intervalles infinis comme $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$. Notamment, lorsqu'on prend l'inverse de $x > 0$, la conclusion importante n'est pas $1/x < +\infty$ (qui n'apporte rien, et après tout on pourrait tout aussi bien écrire $1/x < -\infty$?) mais $1/x > 0$.

Les quantificateurs universels et existentiels : il s'agit des expressions *pour tout* $n\dots$ et *il existe* $x\dots$, qu'on peut aussi écrire $\forall n$ et $\exists x$ dans une formule mathématique (mais en plein milieu d'une phrase, ça n'est pas élégant du tout).

L'expression *pour tout* x signifie que quelle que soit la valeur (explicite) qu'on donne à x, la propriété dont on parle est vraie. Généralement, on remplace les raisonnements sur «tous les x» par des raisonnements sur la variable abstraite x (la **lettre** x). À l'inverse, raisonner sur des variables littérales (c'est-à-dire des lettres), c'est faire un raisonnement valable pour toutes les valeurs qu'on peut donner à ces lettres.

Pour raisonner sur un x abstrait, on peut commencer par *Soit* x *un nombre quelconque* ou par *Pour tout nombre* $x\dots$. Si la partie abstraite est déjà finie ou pas encore commencée, la lettre x ne désigne rien du tout. On dit que x est une *variable muette*, c'est-à-dire qu'on aurait très bien pu l'appeler y ou z dans le paragraphe où on l'a utilisée, et que une fois ce paragraphe terminé, cette lettre ne veut plus rien dire.

Par exemple, on ne peut pas appeler $\mathcal{P}(n)$ la propriété «pour tout n, n est positif» : il y a deux n abstraits différents (celui de $\mathcal{P}(n)$ et celui de *pour tout* n) et on les confondrait.

Exercice 2.

a) Montrez que si $0 \leqslant x < 1$ alors $\frac{1}{1-x} \geqslant 1 + x$.

b) Montrez par récurrence sur n que pour tout réel $x \in [0;1[$ et tout entier $n \geqslant 0$ on a $\frac{1}{(1-x)^n} \geqslant 1 + nx$.

c) Calculez $(1,42)^2$.

d) On pose $q = 0,99994$. Montrez que $q^{14000} < 1/2$; en déduire un entier N tel que $q^n < 10^{-300}$ pour tout $n \geqslant N$.

Remarques. Lorsqu'on pose un exercice comportant plusieurs questions, c'est généralement pour aider à trouver la réponse à la dernière question, qui serait difficile à trouver sans les questions précédentes. Pourquoi ? Parce qu'il faut en général **utiliser les réponses aux questions précédentes pour y répondre**.

Peu de gens parlent d'*hérédité* ou d'*initialisation* pour décrire les étapes d'une démonstration par récurrence. Il est souvent plus courant d'exprimer avec une phrase que l'on fait une démonstration par récurrence. Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas mettre en valeur les deux étapes de la démonstration. Pour dire qu'une propriété $\mathcal{P}$ dépendant d'un entier n est vraie pour $n = k + 1$ si elle est vraie au rang $n = k$, on dit parfois que $\mathcal{P}$ *vérifie la propriété de récurrence.*

Solution. a) Si $0 \leqslant x < 1$, on sait que $(1 - x)$ est un nombre strictement positif. On va donc montrer que $1 \geqslant (1 + x)(1 - x)$. C'est vrai parce que $(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$, qui est inférieur à 1 car $x^2 \geqslant 0$. On peut alors diviser par $1 - x$, ce qui donne l'inégalité demandée.

b) Pour $n = 0$, la propriété recherchée s'écrit $1 \geqslant 1$, elle est vraie.

Soit k un entier quelconque. Supposons cette propriété vraie pour $n = k$, autrement dit $\frac{1}{(1-x)^k} \geqslant 1 + kx$. On montre que ceci implique qu'elle est vraie pour $n = k + 1$. En effet, si

$$\frac{1}{(1-x)^k} \geqslant 1 + kx$$

comme on sait d'après la question *a)* que

$$\frac{1}{1-x} \geqslant 1 + x$$

on peut multiplier les inégalités (**il s'agit de nombres positifs**) et on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \geqslant (1 + kx)(1 + x)$$

Comme $(1+kx)(1+x) = (1+(k+1)x+kx^2) \geqslant 1+(k+1)x$, on a démontré la propriété au rang $k+1$. Cette propriété vérifie donc la propriété de récurrence, et par récurrence sur n, elle est vraie pour tout entier n.

c) On a $(1,42)^2 = 1,42 \times 1,42 = 2,0164$.

d) On peut écrire $q = 1-x$ pour $x = 0,00006$. On va étudier $1/q^{14000}$ au lieu de q^{14000} : on veut savoir si $1/q^{14000} > 2$. Ceci s'écrit $\frac{1}{(1-x)^{14000}} > 2$.

La formule de la question *b)* montre que $1/(1-x)^{14000} \geqslant 1+14000x = 1,84$, ce qui ne répond pas encore à la question. Par contre, la même formule montre que $1/(1-x)^{7000} \geqslant 1+7000x = 1,42$. D'après la question *c)*, si on met cette formule au carré, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^{14000}} \geqslant 2,0164$$

donc $1/q^{14000} > 2$.

Pour obtenir une inégalité du type $q^n < 10^{-300}$, c'est-à-dire $1/q^n > 10^{300}$, on peut se souvenir que $2^{10} > 10^3$. En élévant cette inégalité à la puissance 100, on obtient $2^{1000} > 10^{300}$. Et comme $1/q^{14000000} > 2^{1000}$, on voit que pour tout n supérieur à 14 millions, $1/q^n > 10^{300}$, c'est-à-dire $q^n < 10^{-300}$.