Université de Nice-Sophia-Antipolis
Année universitaire 2008/2009
Licence 1, option *Nombres réels*

Contrôle continu, interrogation n°1

1^er octobre 2008
Groupe M3 : corrigé

Exercice 1. Soit (u_n) la suite d'entiers définie par les conditions $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout n. Montrez par récurrence sur n que $u_n = 2 + 3^n \times 8$ pour tout n.

Solution. Pour $n = 0$, il faut montrer que $u_0 = 2 + 3^0 \times 8 = 10$, ce qui est vrai.

On suppose maintenant que $u_k = 2 + 3^k \times 8$ (cas $n = k$). Alors

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k - 4 \\ &= 3 \times (2 + 3^k \times 8) - 4 \\ &= 6 + 3^{k+1} \times 8 - 4 \\ &= 2 + 3^{k+1} \times 8 \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété demandée pour $n = k + 1$.

On a ainsi démontré par récurrence sur n que $u_n = 2 + 3^n \times 8$ pour tout n. □

Exercice 2. Écrire l'entier 1234 en base 6, en base 9 et en base 11.

Solution. On effectue des divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{rl} 1234 = 6 \times 205 & +4 \\ 205 = 6 \times 34 & +1 \\ 34 = 6 \times 5 & +4 \\ 5 = 6 \times 0 & +5 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{rl} 1234 = 9 \times 137 & +1 \\ 137 = 9 \times 15 & +2 \\ 15 = 9 \times 1 & +6 \\ 1 = 9 \times 0 & +1 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{rr} 1234 = 11 \times 112 & +2 \\ 112 = 11 \times 10 & +2 \\ 10 = 11 \times 0 & +10 \end{array}$$

dont on déduit $1234 = \overline{5414}_6 = \overline{1621}_9 = \overline{A22}_{11}$. □

Exercice 3. Convertir en base 10 l'entier $\overline{37BA}_{13}$.

Solution. On peut utiliser l'algorithme de Hörner:

$$\begin{array}{rlr} \overline{3}_{13} = & & 3 \\ \overline{37}_{13} = & \overline{3}_{13} \times 13 & +7 = 46 \\ \overline{37B}_{13} = & \overline{37}_{13} \times 13 & +11 = 609 \\ \overline{37BA}_{13} = & \overline{37B}_{13} \times 13 & +10 = 7927 \end{array}$$

□

Exercice 4. Effectuez les opérations suivantes, en écrivant à chaque fois le résultat dans la même base que les deux nombres concernés :

$$\overline{2023}_6 + \overline{445}_6,\ \overline{2B7}_{12} \times \overline{128}_{12} \text{ et } \overline{7664}_8 - \overline{5027}_8.$$

Solution. On pose les opérations :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 1 & \\
 & 2 & 0 & 2 & 3 \\
+ & & 4 & 4 & 5 \\
\hline
 & 2 & 5 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 1 & \\
 & & 7 & 4 & \\
 & & 2 & B & 7 \\
\times & & 1 & 2 & 8 \\
\hline
1 & 2 & & & \\
 & 1 & B & 8 & 8 \\
 & 5 & B & 2 & \bullet \\
2 & B & 7 & \bullet & \bullet \\
\hline
3 & 7 & 5 & A & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & 7 & 6 & 6 & {}^{1}4 \\
- & 5 & 0 & 2 & 7 \\
 & & & 1 & \\
\hline
 & 2 & 6 & 3 & 5
\end{array}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\overline{2023}_6 + \overline{445}_6 &= \overline{2412}_6 \\
\overline{2B7}_{12} \times \overline{128}_{12} &= \overline{375A8}_{12} \\
\overline{7664}_8 - \overline{5027}_8 &= \overline{2635}_8
\end{aligned}
$$

$\square$