Université de Nice-Sophia-Antipolis
Année universitaire 2008/2009
Licence 1, option *Nombres réels*

Contrôle continu, interrogation n°1

2 octobre 2008
Groupe I3 : corrigé

Exercice 1. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \neq 1$. Soit n un entier. Montrez par récurrence sur n que $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Si $q = 1$, que vaut l'expression de gauche en fonction de n ?

Solution. Pour $n = 0$, il faut montrer que $1 = \frac{q-1}{q-1}$, ce qui est vrai.

On suppose maintenant que $1 + q + \cdots + q^k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$ (cas $n = k$). Alors

$$\begin{aligned}
1 + q + \cdots + q^{k+1} &= (1 + q + \cdots + q^k) + q^{k+1} \\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} \\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + \frac{q^{k+2}-q^{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+2}-1}{q-1}
\end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété demandée pour $n = k + 1$.

On a ainsi démontré par récurrence sur n que $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour tout n.

Si $q = 1$, il y a $n+1$ termes dans la somme $1+q+\cdots+q^n$, et la somme vaut $n+1$. □

Exercice 2. Écrire l'entier 1318 en base 5, en base 9 et en base 11.

Solution. On effectue des divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{rl}
1318 = 5 \times 263 & +3 \\
263 = 5 \times 52 & +3 \\
52 = 5 \times 10 & +2 \\
10 = 5 \times 2 & +0 \\
2 = 5 \times 0 & +2
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{rl}
1318 = 9 \times 146 & +4 \\
146 = 9 \times 16 & +2 \\
16 = 9 \times 1 & +7 \\
1 = 9 \times 0 & +1
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{rr}
1318 = 11 \times 119 & +9 \\
119 = 11 \times 10 & +9 \\
10 = 11 \times 0 & +10
\end{array}$$

dont on déduit $1318 = \overline{20233}_5 = \overline{1724}_9 = \overline{A99}_{11}$. □

Exercice 3. Convertir en base 10 l'entier $\overline{17BA}_{14}$.

Solution. On peut utiliser l'algorithme de Hörner:

$$\begin{array}{rlr}
\overline{1}_{14} = & & 1 \\
\overline{17}_{14} = & \overline{1}_{14} \times 14 & +7 = 21 \\
\overline{17B}_{14} = & \overline{17}_{14} \times 14 & +11 = 305 \\
\overline{17BA}_{14} = & \overline{17B}_{14} \times 14 & +10 = 4280
\end{array}$$

□

Exercice 4. Effectuez les opérations suivantes, en écrivant à chaque fois le résultat dans la même base que les deux nombres concernés :

$$\overline{2343}_5 + \overline{442}_5,\ \overline{138}_{12} \times \overline{3A7}_{12} \text{ et } \overline{5662}_7 - \overline{4036}_7.$$

Solution. On pose les opérations :

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 2 & 3 & 4 & 3 \\
+ & & 4 & 4 & 2 \\
\hline
 & 3 & 3 & 4 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & & 2 & \\
 & & 3 & 6 & \\
 & & 2 & 4 & \\
 & & 1 & 3 & 8 \\
\times & & 3 & A & 7 \\
\hline
1 & & & & \\
 & & 9 & 1 & 8 \\
1 & 1 & 0 & 8 & \bullet \\
3 & B & 0 & \bullet & \bullet \\
\hline
5 & 0 & 9 & 9 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & 5 & 6 & 6 & {}^{1}2 \\
- & 4 & 0 & 3 & 6 \\
 & & & 1 & \\
\hline
 & 1 & 6 & 2 & 3
\end{array}$$

donc

$$\begin{aligned}
\overline{2343}_5 + \overline{442}_5 &= \overline{3340}_5 \\
\overline{138}_{12} \times \overline{3A7}_{12} &= \overline{50998}_{12} \\
\overline{5662}_7 - \overline{4036}_7 &= \overline{1623}_7
\end{aligned}$$

$\square$