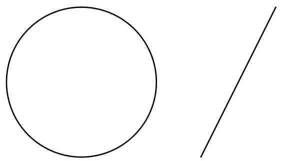
Un domaine des maths: la géométrie algébrique

La géométrie algébrique est celle des formes qui ont des équations. Grâce aux coordonnées cartésiennes, introduites par Descartes, on peut représenter un cercle par l'équation $x^2 + y^2 = 1$, ou encore une droite par une équation $y = 2x - 1$. Ces équations sont algébriques.



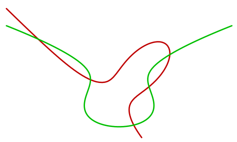
Entre la géométrie et l'algèbre

Le langage de la géométrie est relativement «visuel» : on y parle de courbes, de surfaces, d'intersections. Mais celui de l'algèbre décrit les transformations que l'on effectue sur les équations, on est vite amenés à utiliser des notions abstraites (poétiquement appelées anneaux, corps, idéaux).

La géométrie algébrique fournit un «dictionnaire» qui permet d'interpréter certains calculs «graphiquement».

Calculs algébriques et géométrie

La théorie de l'élimination est un ensemble d'algorithmes et de techniques qui servent à calculer l'intersection entre des courbes et des surfaces algébriques : par exemple les courbes de Bézier utilisées par les graphistes, qui sont en fait des morceaux de courbes algébriques bout-à-bout. L'élimination transforme un ensemble de plusieurs équations en une seule équation qui donne directement l'emplacement de l'intersection.

 $\Rightarrow x = \ldots$

Ce type de calculs fait partie de la géométrie semi-algébrique réelle. En robotique, on veut parfois savoir si un robot articulé peut atteindre une position particulière. Les algorithmes d'élimination transforment ce genre de question en une seule formule à calculer pour avoir la réponse.

En arithmétique

Parfois, la géométrie algébrique n'a de géométrie que le nom. Il arrive qu'on ne travaille pas sur de vraies courbes, mais sur des nombres entiers, qui sont du domaine de l'arithmétique. L'interprétation géométrique des calculs rend certains problèmes très simples en théorie, alors qu'ils ne le sont pas du tout en pratique : cette différence est très utilisée en cryptographie.

Les problèmes d'arithmétique ont poussé la géométrie algébrique vers une direction un peu inattendue au vingtième siècle, la théorie des motifs.

Géométrie algébrique abstraite

Les motifs devraient donner un point de vue unifié sur des choses qui n'ont aucun rapport (du moins en apparence) : le nombre de solutions de certaines équations arithmétiques, le type de forme qu'elles définissent (sa topologie), la valeur des certaines intégrales fabriquées à partir de ces formules. Le point commun est le concept de cohomologie qui pousse à l'emploi de théories de plus en plus abstraites pour essayer de dire ce que sont ces fameux motifs.

De nombreuses questions sont encore incomprises : par exemple, la résolution de la conjecture de Hodge (pour laquelle l'institut Clay promet un million de dollars) permettrait d'affirmer que si deux intégrales algébriques prennent exactement les mêmes valeurs, il est possible de le remarquer uniquement en transformant leur formule.