

La notion de moment cinétique

Systèmes hamiltoniens, symétries et applications à la
géométrie algébrique

Rémy Oudompheng

4 décembre 2009

Résumé

Grâce au formalisme hamiltonien, il est possible de traduire la notion de moment cinétique à l'aide de la notion mathématique d'action de groupe hamiltonienne, qui rassemble les lois de conservation associées aux symétries d'un système.

Le procédé de réduction hamiltonienne, dont le prototype est l'étude d'un objet soumis à une force centrale, permet de faire correspondre certains objets de la géométrie algébrique avec des objets issus de la physique ou de l'analyse. Il permet d'exprimer de façon plus analytique la théorie géométrique des invariants de Mumford, et depuis les travaux d'Atiyah et Bott, on sait aussi s'en servir pour ramener l'étude des fibrés vectoriels aux équations de Yang-Mills.

Plan

- 1 Systèmes conservatifs et hamiltoniens
 - Particule dans un potentiel
 - Crochet de Poisson et quantités conservées
 - Quantification
- 2 Symétries et actions de groupes
 - Symétries et invariance
 - Symétries et quantités conservées
 - Réduction symplectique
- 3 Variétés symplectiques
 - Structures mathématiques
 - Actions hamiltoniennes
 - Exemples
- 4 Bibliographie

Une particule dans un potentiel est décrite par l'équation

$$m\ddot{q} = -\nabla V$$

- m est la masse
- q est la position
- V est le potentiel (fonction de q)

En introduisant $p = m\dot{q}$, on se ramène au premier ordre :

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q} \quad \dot{q} = p/m$$

Le formalisme hamiltonien introduit l'énergie mécanique

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

L'énergie mécanique est **une quantité conservée**.

Les équations du mouvement deviennent les équations de Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

On dit alors que le système est **hamiltonien**. La fonction H porte le nom très original de **Hamiltonien**.

L'**espace des phases** est l'espace des valeurs possibles de $x = (p, q)$. On écrit de façon un peu plus compacte :

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \xi_H(x) \text{ où } \xi_H = \omega(\nabla H)$$

Ici ω est une matrice antisymétrique : on dit que c'est une forme **symplectique** sur l'espace des phases. Le champ de vecteurs ξ_H est appelé le **gradient symplectique** de H . La trajectoire de x dans l'espace de phases suit le **flot hamiltonien** de H .

L'une des propriétés fondamentales est $\nabla \cdot \xi_H = 0$: c'est-à-dire que le flot hamiltonien conserve le volume de l'espace des phases.

Quelques exemples de systèmes hamiltoniens

- la particule libre : $H = p^2/2m$;
- l'oscillateur harmonique : $H = p^2/2m + kq^2/2$;
- le pendule pesant :

$$H = \frac{p^2}{2m(1 - q^2/\ell^2)} + mgq$$

(les trajectoires dans l'espace de phases sont des courbes elliptiques, mais ω n'est pas la forme standard);

- la particule en orbite : $H = p^2/2m - \frac{GMm}{r}$.

Utilisation de coordonnées complexes

Considérons l'oscillateur harmonique

$$H = p^2/2 + q^2/2$$

Il est commode d'introduire un paramètre complexe $z = p + iq$. Dans ce cas $H = |z|^2/2$ et les équations de Hamilton s'écrivent

$$\dot{z} = i\nabla H = iz.$$

C'est-à-dire que ω a été remplacé par le nombre complexe i . On dit qu'on a muni l'espace des phases d'une structure **kählérienne** (mélange entre structure symplectique et structure complexe).

Variation d'une fonction

Le crochet de Poisson permet d'exprimer la variation d'une fonction le long du flot d'un hamiltonien. Si (p, q) se déplace en fonction d'un hamiltonien H , la variation de $F(p, q)$ est

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} =: \{H, F\}\end{aligned}$$

L'expression $\{H, F\}$ s'appelle crochet de Poisson de H et F .

On peut vérifier les propriétés suivantes :

$$\{H, F\} + \{F, H\} = 0$$

$$\{H, FG\} = \{H, F\} G + \{H, G\} F$$

La première formule est évidente, et la seconde vient du fait que $\{H, FG\}$ exprime la variation de FG .

Algèbres de Poisson

On a aussi

$$\{\{H, F\}, G\} = \{H, \{F, G\}\} - \{F, \{H, G\}\}$$

Cette formule dit que si $X = \{H, F\}$, ξ_X est le **crochet de Lie** (commutateur) de ξ_H et ξ_F .

On trouve ainsi une structure d'**algèbre de Poisson** sur les fonctions (appelées aussi **hamiltoniens**). Si $\{H, F\} = 0$ on dit que les hamiltoniens H et F commutent.

Dans ce cas F est une **quantité conservée** par le flot de H : si $x(t)$ suit le flot hamiltonien de H , $F(x(t))$ est constante.

Intermède : systèmes quantiques

Un système hamiltonien classique admet souvent un analogue en mécanique quantique. On remplace

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \text{ par } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$$

où $\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\hat{q}_i = x_i$. Les hamiltoniens ne sont plus des fonctions mais des opérateurs différentiels.

On peut ensuite écrire l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

Quantification par déformation

Des fonctions en (p_i, q_i) on passe à l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}\{p_i, q_i\}$ qui est **non-commutative** et vérifie $[p_i, q_i] = -i\hbar$. De manière générale, on peut vérifier que

$$[f, g] = -i\hbar \{f, g\} + o(\hbar)$$

L'algèbre des polynômes standard est alors une approximation du système quantique, dont le premier ordre est donné par le crochet de Poisson, c'est la **quantification par déformation**. Il y a des travaux sur ce sujet en mathématiques : par exemple, par Kontsevich.

Les symétries (continues) d'un système sont décrites par un **groupe de Lie**: l'exemple le plus courant est le groupe SO_3 (groupe des rotations de l'espace).

On regarde plutôt l'algèbre de Lie (transformations infinitésimales). Dans le cas de SO_3 , une rotation infinitésimale est donnée par un vecteur Ω , qui représente l'axe de rotation. Plus traditionnellement, c'est une matrice antisymétrique, matrice de l'application $x \rightarrow \Omega \wedge x$.

Moment d'une transformation infinitésimale

Soit Ω un vecteur, définissant une rotation infinitésimale :

$$q \rightarrow q + (\Omega \wedge q) d\theta$$

$$p \rightarrow p + (\Omega \wedge p) d\theta$$

Cette transformation peut être décrite par des équations hamiltoniennes : en effet, posons

$$J_\Omega = [\Omega, q, p]$$

Alors (ô miracle) :

$$\frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{\partial J_\Omega}{\partial p} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\partial J_\Omega}{\partial q}$$

Moment d'une transformation infinitésimale

On dit que l'action des rotations est hamiltonienne et J_Ω s'appelle le **moment** de la rotation d'axe Ω .

Le **moment cinétique** est l'application $J: (q, p) \mapsto q \wedge p$. On constate que $J_\Omega = J \cdot \Omega$, c'est-à-dire que les moments des différentes rotations se déduisent de J .

On dit que J est la fonction moment de l'action de SO_3 sur l'espace de phases.

On vérifie $\{J_A, J_B\} = J_{A \wedge B}$: on a ainsi défini un **morphisme d'algèbres de Lie**

$$\mathfrak{so}_3 \simeq (\mathbb{R}^3, \wedge) \rightarrow (\text{fonctions}, \{\bullet, \bullet\})$$

Le théorème de Noether

Si un hamiltonien H est invariant par la rotation d'axe Ω , H ne varie pas le long du flot engendré par J_Ω .

On peut écrire $\{J_\Omega, H\} = \{H, J_\Omega\} = 0$: mais cela signifie que J_Ω est conservé par le système de hamiltonien H ! C'est le **théorème de Noether** ¹

Par exemple, dans le cas d'une particule soumise à une force centrale, le hamiltonien est invariant par toutes les rotations : le moment cinétique est alors conservé. C'est une des formulations de la **loi des aires** de Kepler.

¹Emmy Noether, aussi bien connue en physique qu'en géométrie algébrique.

Une particule se déplace dans un plan avec un hamiltonien

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{k}{r}$$

où $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ et $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$.

Ce hamiltonien est invariant par rotation (action du groupe SO_2): il commute avec le moment cinétique $J = q_1 p_2 - q_2 p_1$.
Pour des questions comme l'étude de la période du mouvement, on cherche à simplifier le hamiltonien.

Réduction hamiltonienne

La technique (classique) consiste à considérer J comme une constante j_0 :

$$p^2 = p_r^2 + \frac{j_0^2}{r^2}$$

Il reste

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{j_0^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r}$$

Le hamiltonien \bar{H} décrit l'évolution de la variable r : on peut décrire mathématiquement le nouvel espace de phases comme

$$(r, p_r) \in \frac{J^{-1}(j_0)}{SO_2}$$

Variétés symplectiques

Les propriétés des systèmes hamiltoniens se retrouvent sur n'importe quelle variété **symplectique**: c'est un espace muni d'un opérateur Ω comme ci-dessus, qui permet d'associer à la différentielle d'une fonction un champ de vecteurs de façon naturelle.

Dans le langage des tenseurs Ω est une **2-forme différentielle**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx_i \mapsto \xi_f = \sum_{ij} \omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

La propriété de Jacobi du crochet de Poisson nécessite que Ω corresponde à une forme différentielle **fermée**.

Variétés kählériennes

Theorem (Théorème de Darboux)

Sur une variété symplectique, il est possible de définir (localement) des coordonnées (p_i, q_i) qui identifient la variété à l'espace standard \mathbb{C}^n .

Parfois, cela permet de définir une notion de fonction holomorphe sur la variété : on dit alors que la variété est **kählérienne**. C'est le cas de \mathbb{C}^n avec les coordonnées

$$z_k = p_k + iq_k.$$

Si G est un groupe de Lie agissant sur une variété symplectique X , un élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est parfois décrit par un hamiltonien $\mu_{\mathfrak{g}}$: si c'est le cas on dit que l'action est **hamiltonienne**.

On décrit parfois le moment de l'action de G comme une application $X \rightarrow \mathfrak{g}^*$. C'est le cas du moment cinétique classique $(q, p) \mapsto q \wedge p$.

La réduction symplectique (ou réduction de Marsden-Weinstein) définit

$$X//G = \frac{\{\mu = \mu_0\}}{G}$$

Le théorème fondamental de la théorie dit que $X//G$ est encore une variété symplectique.

Liens avec la théorie des invariants

Soit X une variété projective, et G un groupe agissant sur X en préservant la forme de Kähler : on note K un sous-groupe compact maximal de G . Par exemple quand $G = SL_n(\mathbb{C})$, $K = SU_n$.

Theorem (Kirwan-Ness)

La réduction symplectique donnée par $\mu^{-1}(0)/K$ coïncide avec le quotient « algébrique » $X//G$ défini par les fonctions homogènes G -invariantes sur X .

Cette présentation a l'avantage de donner des quotients compacts et kählériens beaucoup plus facilement. L'autre méthode consiste à chercher des points **polystables** dans X , et construire un quotient X^{ss}/G .

Liens avec la théorie des invariants

Idée de preuve : le quotient $X//G$ ne retient que les points dont l'orbite sous l'action de G . Soit λ un élément de l'algèbre de Lie de K .

Alors $\log |e^{\lambda z} x|$ est constant pour $z \in \mathbb{R}$ et $\log |e^{i\lambda z} x|$ varie en fonction du moment J_λ .

On peut montrer que c'est une fonction convexe : il existe un unique λ où J_λ s'annule, sauf si $|e^{i\lambda z} x|$ tend vers zéro.

En imposant $J = 0$, on va éliminer les transformations dans la direction iK , il ne reste qu'à diviser par K .

Exemple 1 : l'espace projectif

L'espace projectif peut être décrit comme le quotient de \mathbb{C}^n par le groupe \mathbb{C}^* dont un compact maximal est représenté par le cercle unité.

En choisissant une représentation $z_k = p_k + iq_k$ on peut poser $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = |z|^2/2$ (c'est le hamiltonien de n oscillateurs harmoniques de même pulsation).

Le flot de ce hamiltonien correspond exactement à l'équation $\dot{z} = iz$, qui décrit l'action du cercle unité $z \mapsto e^{i\theta} z$.

L'espace projectif est donc

$$\mathbb{P}^{n-1} = \frac{\{|z| = 1\}}{\langle e^{i\theta} \rangle}$$

C'est l'ensemble des positions relatives de n oscillateurs harmoniques à énergie fixée. Si on fixe z_1 on va mesurer les positions relatives par z_i/z_1 .

Exemple 2 : invariants des formes binaires

Le groupe $SL_2(\mathbb{C})$ agit sur la droite projective par homographies : l'action induite par $SU_2(\mathbb{C})$ est en fait celle de SO_3 sur la sphère ordinaire.

Le hamiltonien de la rotation infinitésimale Ω est la fonction $J_\Omega(x) = x \cdot \Omega$. On peut résumer cela dans une fonction moment $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathfrak{so}_3^*$ donnée simplement par $x \mapsto x$: c'est un cas particulier de structure symplectique sur une **orbite coadjointe**.

Exemple 2 : invariants des formes binaires

Le groupe $SL_2(\mathbb{C})$ agit aussi sur les n -uplets de points dans \mathbb{P}^1 : ceux-ci peuvent être décrits par un polynôme homogène de degré n

$$(z_1, \dots, z_n) \rightarrow P = \prod (x_i - z_i y_i)$$

(une **forme binaire**).

Un raisonnement simple montre que $\sum z_i$, en tant qu'élément de \mathbb{R}^3 , est le moment de l'action de SU_2 .

On retrouve alors un résultat classique : une configuration de points est **polystable** si elle n'a pas plus de $n/2$ points au même endroit.

Exemple 2 : invariants des formes binaires

Exemple des formes quartiques

$$P = aX^4 + 4bX^3Y + 6cX^2Y^2 + 4dXY^3 + eY^4$$

On a deux invariants

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2$$

$$g_3 = ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3$$

On vérifie que ces invariants s'annulent pour $(X + tY)^4$ ($a = 1$, $b = t$, $c = t^2$, ...) et XY^3 mais pas, pas exemple, pour $(X^2 + Y^2)^2$.

Exemple 3 : équations de Yang-Mills

Sur une surface, une **connexion** unitaire de rang n est un opérateur (« dérivée covariante »)

$$\nabla_v X = \frac{\partial X}{\partial v} + A(v)X$$

où A est une matrice antihermitienne linéaire en v (la direction de dérivation).

Une transformation de jauge est donnée par une matrice unitaires $g(x)$ de fonctions et alors :

$$A(v, x) \mapsto g(x)^{-1} A(x, v) g(x) + g(x)^{-1} \frac{\partial g}{\partial v}(x)$$

Dans le cas abélien $n = 1$, A est en fait de la forme iX où X est un champ de vecteurs, et une transformation de jauge est de la forme $X \mapsto X + \nabla\varphi$.

La courbure d'une connexion

$$F_{v,w} = \frac{\partial w}{\partial A}(v) + \frac{1}{2}[A(v), A(w)]$$

exprime les relations de commutation entre les dérivées covariantes.

Sur une surface l'action du groupe de jauge sur les connexions est *hamiltonienne*: l'application moment est tout simplement donnée par la courbure.

La réduction hamiltonienne de cette action donne l'ensemble des connexions sans courbure, à action du groupe de jauge près : on trouve l'ensemble des systèmes locaux unitaires de rang n sur la surface c'est-à-dire $\text{Hom}(\pi_1(X), U_n)$.

On peut montrer que les connexions unitaires correspondent aussi à des opérateurs de dérivation

$$\partial X = \frac{\partial X}{\partial z} + \tilde{A}X$$

où \tilde{A} n'est plus spécialement unitaire.

Avec cette formulation, on peut faire le quotient par le groupe de jauge complexe, des matrices de fonctions $g(z)$ (pas forcément unitaires). Ce qu'on obtient est l'espace de modules des fibrés vectoriels semi-stables : c'est un objet très étudié en géométrie algébrique.

Ce genre d'objets a permis à la physique mathématique (notamment grâce à Witten) de redécouvrir les invariants **quantiques** des nœuds (le polynôme de Jones).

Le problème d'annulation de la courbure correspond à la minimisation de la fonctionnelle de Yang-Mills

$$\int_X |F|^2$$

Atiyah et Bott ont utilisé cette fonctionnelle pour étudier la topologie de l'espace des fibrés vectoriels.

Bibliographie



Michèle Audin

Torus actions on symplectic manifolds

Progress in Mathematics, 93

Birkhäuser, 2004



Richard P. Thomas

Notes on GIT and symplectic reduction for bundles and varieties

Surveys in Differential Geometry, 10 (2006)

arXiv math/0512411