VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES, SCHÉMAS II

RÉMY OUDOMPHENG

RÉSUMÉ. Cet exposé est une introduction au langage de la géométrie algébrique des variétés abstraites, dans l'esprit des définitions données par Weil [Wei46] et Grothendieck [GD60].

TABLE DES MATIÈRES

1. VARIÉTÉS ET SCHÉMAS ABSTRAITS

1.1. **Rappels sur la topologie de Zariski.** Soit X une variété algébrique affine (ou projective) définie sur un corps $\Bbbk$ d'anneau une $\Bbbk$-algèbre de type fini A. Si K est un corps quelconque contenant $\Bbbk$, les sous-ensembles algébriques $Y(K)$ de $X(K)$ définis par les différents idéaux de A forment les fermés d'une topologie dite *de Zariski* sur $X(K)$.

Définition. *Les points x de $X(K)$ définissent des idéaux premiers $\mathfrak{j}_x = \ker x : A \to K$. Un point sera dit* général *si cet idéal est nul (pour le différencier des opints* génériques *au sens de Grothendieck).*

Exemple. Soit X la variété définie sur le corps $\mathbb{Q}$ par l'équation $x^2 + y^2 = 1$. Alors le point $x = (\cos 1, \sin 1)$ est (vraisemblablement) un point général de X : en effet, son idéal (dans l'anneau $\mathbb{Q}[x, y]$) est probablement $(x^2 + y^2 - 1)$.

Lorsque $A/\mathfrak{j}_x$ est de degré de transcendance non nul sur $\Bbbk$, l'adhérence de x au sens de la topologie de Zariski est une sous-variété algébrique (intègre) de X : on dit que x est un point *générique* de cette sous-variété.

La topologie de Zariski identifie les points définissant le même idéal premier : il est donc naturel de définir un spectre premier (ou *schéma*) pour l'anneau A.

Définition (Spectre premier). *Soit A un anneau (quelconque). Le spectre premier de A est l'ensemble des idéaux premiers de A. Il est muni d'une topologie dite* de Zariski, *dont les fermés sont les parties de la forme $V(I)$ (ensemble des idéaux premiers contenant I).*

Attention : de même que deux algèbres de type fini différents peuvent définir des ensembles algébriques $X(K)$ identiques, deux anneaux distincts peuvent fournir le même spectre premier. Notamment, A et $A_{\mathrm{red}} = A/\sqrt{0}$ ont le même spectre premier.

Pour traiter ce problème, on munit l'ensemble algébrique $X(K)$ d'un *faisceau* de fonctions : si U est un ouvert de Zariski de X, on note $\mathcal{O}(U)$ le sous-anneau de l'anneau total de fractions $\operatorname{Frac} A$ constitué des f bien définies sur U. Dans le langage des ensembles algébriques, f est bien définie sur $U(K)$ si pour tout $x \in U(K)$ il existe une écriture $f = a/b$ telle que $b(x) \neq 0$.

Date: 26 novembre 2009.

Le spectre premier de A est lui aussi muni d'un faisceau de fonctions : ici, f est bien définie sur U si l'idéal des dénominateurs de f définit un fermé disjoint de U. On notera également $\operatorname{Spec} A$ le spectre premier de A muni de ce faisceau de fonctions (le faisceau *structural* $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$).

Theorème 1 (Grothendieck [GD60])**.** *La définition des spectres premiers fournit un plongement pleinement fidèle de la catégorie* $\mathbf{Aff} = (\mathbf{Alg}_{\mathbb{Z}})^{\mathrm{op}}$ *des schémas affines dans la catégorie des espaces topologiques munis d'un faisceau d'anneaux locaux.*

1.2. **Variétés projectives.** On définit aussi des variétés projectives : une *variété algébrique projective* sur un corps $\Bbbk$ est la donnée d'un entier n et d'un ensemble de polynômes *homogènes* en $n+1$ variables.

Un point d'une variété projective X à valeurs dans K est une classe d'équivalence, à homothétie près, d'éléments non nuls de K^{n+1} satisfaisant les équations de X. Les variétés projectives s'inscriront naturellement dans le contexte des variétés algébriques abstraites et des schémas.

L'ensemble d'équations vide définit un objet de dimension n, l'espace projectif (sur $\Bbbk$) noté $\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$. Les variétés projectives définissent aussi des ensembles de points X, mais un morphisme entre variétés projectives n'est plus donné par un morphisme d'anneaux : deux anneaux différents peuvent définir des variétés projectives isomorphes, et un morphisme d'anneaux ne définit que des applications partielles entre les ensembles de points.

La notion de variété abstraite permettra de définir avec précision ce qu'est un morphisme, en s'aidant du cas des variétés affines. Elle permettra aussi de définir des variétés *complètes* (ou *propres*) non nécessairement projectives.

Historiquement, les variétés algébriques en tant qu'objet d'étude abstrait ont été définies par Weil [Wei46] comme une réunion de variétés affines (ensembles de points à valeurs dans un corps très gros), où l'on identifie les différents points génériques.

Chevalley (séminaire Cartan) définit des *schémas* affines comme l'ensemble des idéaux premiers (ou plutôt des anneaux locaux) d'une $\Bbbk$-algèbre fixée. Étant donné un corps L, un schéma de L est alors un ensemble de sous-anneaux locaux de L, qui peut s'écrire comme réunion de schémas affines : ceci correspond à la définition d'un $\Bbbk$-schéma intègre de corps de fonctions L. Cette définition s'apparente à celle de Weil et fait apparaître l'importance des idéaux premiers [56].

Serre s'inspire quant à lui de la géométrie analytique et définit une variété algébrique comme un espace topologique, muni d'un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à une variété algébrique affine muni du faisceau des fonctions algébriques [Ser55].

1.3. **Les variétés abstraites.**

Définition. *Une* variété de Serre *(resp. un* schéma*) est un recollement formel de variétés algébriques affines (resp. de schémas affines)*

$$\coprod_{i,j,k} U_{ijk} \xrightarrow{\partial_1,\partial_2,\partial_3} \coprod_{i,j} U_{ij} \xrightarrow{\partial_1,\partial_2} \coprod_{i} U_i \dashrightarrow X$$

avec des identités simpliciales :

$$\begin{tikzcd}
U_{ijk} \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\partial_3"'] & U_{ik} \arrow[d, "\partial_2"] & U_{ijk} \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "\partial_1"'] & U_{ij} \arrow[d, "\partial_1"] & U_{ijk} \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\partial_1"'] & U_{ik} \arrow[d, "\partial_1"] \\
U_{ij} \arrow[r, "\partial_2"'] & U_i & U_{jk} \arrow[r, "\partial_2"'] & U_j & U_{jk} \arrow[r, "\partial_1"'] & U_i
\end{tikzcd}$$

formant trois carrés cartésiens et où les morphismes $\partial_2 : U_{ij} \to U_i$ *et* $\partial_1 : U_{ij} \to U_j$ *identifient* U_{ij} *à un ouvert de Zariski de* U_i *et* U_j*.*

Grâce à la construction des spectres premiers, on peut aussi définir la catégorie des schémas de la manière suivante :

Définition. *La catégorie des schémas est la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés, dont les objets sont les espaces localement isomorphes au spectre premier d'un anneau, vu comme espace localement annelé.*

Des définitions analogues donnent la catégorie des schémas comme la catégorie des faisceaux sur $\mathbf{Aff}_{\mathrm{Zar}}$ qui sont localement (pour la bonne définition de *sous-foncteur ouvert*) des faisceaux de points associés à un schéma affine.

1.4. **Les variétés projectives comme variétés abstraites.** Une variété projective sur un corps $\Bbbk$ est la donnée d'une $\Bbbk$-algèbre graduée de type fini. Dans le monde de la géométrie algébrique où les morphismes sont les applications *régulières*, il ne s'agit pas du tout d'une équivalence de catégories (les morphismes d'algèbres ne permettent de définir que des applications *rationnelles*).

Commençons par une définition ensembliste de variété projective :

Définition. *Soit $\Bbbk$ un corps et S une $\Bbbk$-algèbre graduée donnée par des générateurs $(T_0, \dots, T_n)$ de degré 1 et un idéal I d'équations polynomiales homogènes. La variété projective associée à S est un foncteur X sur les $\Bbbk$-algèbres tel que si K est une extension de $\Bbbk$, $X(K)$ est l'ensemble des éléments $[t_0 : \cdots : t_n]$ de $\mathbb{P}^N(K)$ satisfaisant les équations de I.*

Avec cette définition, un élément de $X(K)$ correspond à un morphisme homogène $S \to \Bbbk[U]$ avec $T_i \mapsto t_i U$: deux tels morphismes définissent le même point s'il existe un automorphisme $\Bbbk[U] \to \Bbbk[U]$ (de la forme $U \to \lambda U$) qui les relie. Comme précédemment, la topologie de Zariski conduit à considérer un ensemble d'idéaux premiers (cette fois *homogènes*) de S : un point définit un idéal premier gradué par $\ker x : S \to \Bbbk[U]$.

Définition. *Soit S un anneau gradué, par exemple $S = R[X_0, \dots, X_N]$ (gradué par le degré). Le spectre homogène de S, noté $\operatorname{Proj} S$, est l'espace topologique des idéaux premiers homogènes de S, muni de la topologie de Zariski (cf. EGA2).*

Il est muni d'une structure de schéma : si f est un élément homogène (dans S_d), l'ouvert de Zariski U_f des idéaux homogènes ne contenant pas f est naturellement en bijection avec le spectre premier de $S[f^{-1}]_0$. On peut alors munir les U_f du faisceau d'anneaux provenant de $\operatorname{Spec} S[1/f]_0$: ceci définit une structure de schéma sur S.

Si S est un anneau de polynômes en $n+1$ variables, il suffit d'un nombre fini d'ouverts affines pour décrire $\operatorname{Proj} S = \mathbb{P}^n$: l'ouvert de Zariski U_i est alors isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^n$, et son complémentaire est l'ensemble des *points à l'infini* par rapport à cet ouvert.

De manière générale, si $S = \Bbbk[X_0, \dots, X_N]/J$, on a des ouverts affines U_i : $U_i(K) \subset (\operatorname{Proj} S)(K)$ est l'ensemble des points de la forme $[t_0 : \cdots : t_i = 1 : \cdots : t_N]$ satisfisant les équations (affines) données par J.

2. Schémas relatifs, changement de base

2.1. **Schémas sur une base.** La catégorie des variétés algébriques (abstraites) sur $\Bbbk$ se généralise naturellement à la catégorie des schémas *sur une base S*. La catégorie de anneaux ($\mathbb{Z}$-algèbres) doit fournir la catégorie de tous les schémas : en se restreignant aux $\Bbbk$-algèbres on obtient la catégorie des *schémas sur* $\Bbbk$. Cette catégorie peut s'obtenir de manière élégante en considérant la catégorie des objets $X \to \operatorname{Spec} \Bbbk$ où X est un schéma (quelconque). Le morphisme $X \to \operatorname{Spec} \Bbbk$ (dit *structural*) indique de quelle façon les anneaux définissant X sont des $\Bbbk$-algèbres.

Si $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t]$ est la droite affine $\mathbb{A}^1$, un S-schéma affine est la donnée d'un anneau et d'un élément de cet anneau. Les $\mathbb{A}^1$-schéma sont donc les schémas munis d'une fonction, où encore les familles de schémas paramétrées par une droite. Si (R, f) est la donnée d'une $\Bbbk$-algèbre et d'un $f \in R$, on peut ainsi considérer la *fibre* $\operatorname{Spec}(R/(f-t))$ au-dessus de $t \in \Bbbk$.

2.2. **Changement de base.** Si $f : T \to S$ est un morphisme de schémas, et X est un S-schéma, le schéma $Y = X \times_S T$ est naturellement un T-schéma : on parle de changement de base. Le changement de base permet d'exprimer les opérations d'extension des scalaires, de spécialisation (fibre d'une famille), de changement de paramétrage (on pose $t = s^2 \dots$) et s'interprète de façon algébrique à l'aide du produit tensoriel.

Par exemple dans le cas $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} \Bbbk$, un changement de base transforme un schéma $\operatorname{Spec} A$ (où A est une $\Bbbk$-algèbre) en $\operatorname{Spec}(A \otimes_\Bbbk K)$. Considérons par exemple le schéma $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[T,U,V]/(U^2+V^2-T)$ sur $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[T]$: on a les changements de base suivants

$$T = \operatorname{Spec} \mathbb{Q} \quad f : -2 \longleftarrow T \quad Y = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{Q}[U,V]}{U^2+V^2+2} \text{ (une conique sans point)}$$

$$T = \operatorname{Spec} \mathbb{C} \quad f : \pi \longleftarrow T \quad Y = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{C}[U,V]}{U^2+V^2-\pi} \text{ (une conique complexe)}$$

$$T = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[s] \quad f : s^2 \longleftarrow T \quad Y = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{C}[U,V,s]}{U^2+V^2-s^2} \text{ (une famille de cercles concentriques)}$$

Exemple. Les changements de base donnés par une extension de corps séparable (un morphisme *étale*) feront le lien entre cohomologie étale et cohomologie galoisienne.

Considérons le changement de base $\operatorname{Spec}\mathbb{C} \to \operatorname{Spec}\mathbb{R}$. Soit X la conique affine d'équation $x^2+y^2+1=0$, vue comme $\mathbb{R}$-schéma. Alors X n'est pas isomorphe à l'hyperbole $xy=1$ car l'une admet un $\mathbb{R}$-point, pas l'autre.

En revanche, après changement de base à $\mathbb{C}$, on voit facilement que le morphisme d'algèbres $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1) \to \mathbb{C}[u,v]/(u^2+v^2+1)$ donné par $x=u+iv$, $y=-u+iv$ est un isomorphisme.

Exemple. Considérons le schéma $SO_2 \subset \mathbb{A}^4$ des matrices de la forme $\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$. Il s'agit du schéma affine donné par les équations $a_{11}=a_{24}$, $a_{12}+a_{21}=0$, $a_{11}^2+a_{12}^2=1$.

Il s'agit d'un *schéma en groupes* : ceci signifie que pour tout anneau R, $SO_2(R)$ est muni d'une structure de groupe, et que les applications d'inverse et de produit sont fonctorielles en R. On peut aussi dire qu'il existe des morphismes de schémas (affines) donnant l'inverse $(b \mapsto -b)$ ou le produit

$$a \to a_1a_2 - b_1b_2$$
$$b \to a_1b_2 + a_2b_1$$

Ce schéma n'est pas isomorphe au schéma $\mathbb{G}_m$ défini dans $\mathbb{A}^1$ par l'équation $t \neq 0$. On peut s'en convaincre assez facilement en comparant $SO_2(\mathbb{R})$, qui est un cercle et $\mathbb{G}_m(\mathbb{R})$, qui est une droite privée d'un point.

En revanche, après changement de base à $\mathbb{C}$, il existe bien un isomorphisme $SO_2 \simeq \mathbb{G}_m$ donné par les formules

$$t \to a+ib$$
$$a \to \frac{1}{2}(t+1/t)$$
$$b \to \frac{1}{2i}(t-1/t)$$

Ceci fait apparaître $SO_2(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des invariants de $SO_2(\mathbb{C})$ sous l'automorphisme $g \to \bar{g}^{-1}$.

2.3. **Point général, point générique.** Si X est une variété sur un corps $\Bbbk$, également vue comme un schéma sur $\Bbbk$, le point générique de X au sens des schémas de Grothendieck ne vérifie pas du tout les mêmes propriétés qu'un point générique au sens de Weil (à valeurs dans un corps K contenant le corps des fonctions de X).

Par exemple, soit X le plan affine sur $\mathbb{Q}$ de coordonnées (x,y) et Y la variété affine dans $\mathbb{A}^3$ donnée par l'équation $t^2+tx+y=0$: alors si $p=(x,y)$ est un points à coordonnées complexes génériques dans X, la fibre Y_p de $Y \to X$ en p est réunion disjointe de deux points (t,x,y), avec t l'une des racines de l'équation.

En revanche le *point générique schématique* (x,y) a pour fibre le schéma associé à l'anneau $k(x,y)/(t^2+tx+y)$, qui est un corps. Ce schéma est représenté par un espace topologique constitué d'un seul point : la différence provient du fait qu'il n'est pas possible de définir avec des polynômes sur $\mathbb{Q}$ une application des points génériques de X dans ceux de Y qui soit une section de la projection $Y \to R$. En revanche, le corps des fonctions de Y est une extension galoisienne de degré 2 de celui de X : la fibre générique est donc bien constituée de deux points, mais au sens de la topologie étale.

Références

[Die74] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*, Presses universitaires de France, 1974.

[Dol] I. Dolgachev, *Introduction to algebraic geometry*, available at `http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/631.pdf`.

[56] *Séminaire H. Cartan et C. Chevalley, 8e année : 1955/1956. Géométrie algébrique*, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1956 (French). MR 0097402 (20 #3871)

[GD60] A. Grothendieck and J.-A. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1960), no. 4, 228. MR 0217083 (36 #177a)

[Ser55] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61** (1955), 197–278 (French). MR 0068874 (16,953c)

[Wei46] André Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 29, American Mathematical Society, New York, 1946. MR 0023093 (9,303c)